

Integraalifunktio

Hannu Lehto
Lahden Lyseon lukio



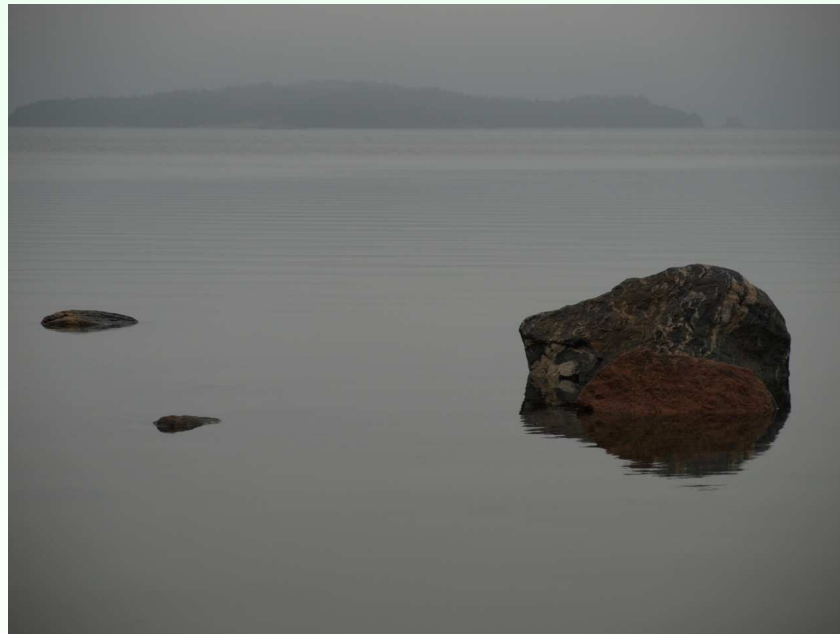
Osa I: Integraalifunktion
määritelmä

- Esimerkki
- Integraalifunktio

Osa II:
Integroimissääntöjä

Integroimismenetelmiä

Osa I: Integraalifunktion määritelmä



Esimerkki

Osa I: Integraalifunktion
määritelmä

- **Esimerkki**
- Integraalifunktio

Osa II:
Integroimissääntöjä

Integroimismenetelmiä

Esimerkki. Minkä funktion f derivaatta on $f'(x) = 3x^2$?

Esimerkki

Osa I: Integraalifunktion
määritelmä

- **Esimerkki**
- Integraalifunktio

Osa II:
Integroimissääntöjä

Integroimismenetelmiä

Esimerkki. Minkä funktion f derivaatta on $f'(x) = 3x^2$?

$$f(x) = x^3$$

Esimerkki

Osa I: Integraalifunktion
määritelmä

- **Esimerkki**
- Integraalifunktio

Osa II:
Integroimissääntöjä

Integroimismenetelmiä

Esimerkki. Minkä funktion f derivaatta on $f'(x) = 3x^2$?

$$f(x) = x^3 + c \quad (c \in \mathbb{R}).$$

Esimerkki

Osa I: Integraalifunktion
määritelmä

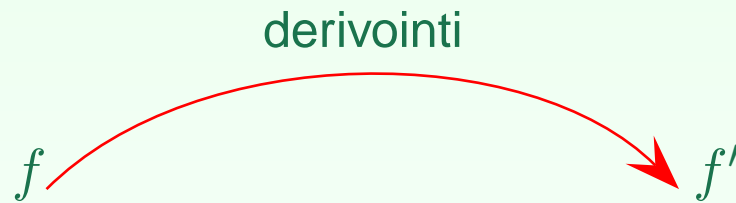
- Esimerkki
- Integraalifunktio

Osa II:
Integroimissääntöjä

Integroimismenetelmiä

Esimerkki. Minkä funktion f derivaatta on $f'(x) = 3x^2$?

$$f(x) = x^3 + c \quad (c \in \mathbb{R}).$$



Esimerkki

Osa I: Integraalifunktion
määritelmä

- Esimerkki
- Integraalifunktio

Osa II:
Integroimissääntöjä

Integroimismenetelmiä

Esimerkki. Minkä funktion f derivaatta on $f'(x) = 3x^2$?

$$f(x) = x^3 + c \quad (c \in \mathbb{R}).$$



Integraalifunktio

Osa I: Integraalifunktion
määritelmä

- Esimerkki
- **Integraalifunktio**

Osa II:
Integroimissääntöjä

Integroimismenetelmiä

Määritelmä 1. Olkoon funktio f määritelty välillä I . Funktio F on funktion f *integraalifunktio*, jos

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in I.$$

Integraalifunktio

Osa I: Integraalifunktion
määritelmä

- Esimerkki
- **Integraalifunktio**

Osa II:
Integroimissääntöjä

Integroimismenetelmiä

Määritelmä 1. Olkoon funktio f määritelty välillä I . Funktio F on funktion f *integraalifunktio*, jos

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in I.$$

Esimerkki 1. Onko funktio $f(x) = \frac{1}{8}x^4 + \frac{5}{2}x^2 + 3x - 1$ funktion $g(x) = \frac{1}{2}x^3 + 5x + 3$ integraalifunktio?

Integraalifunktio

Osa I: Integraalifunktion
määritelmä

- Esimerkki
- **Integraalifunktio**

Osa II:
Integroimissääntöjä

Integroimismenetelmiä

Määritelmä 1. Olkoon funktio f määritelty välillä I . Funktio F on funktion f *integraalifunktio*, jos

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in I.$$

Esimerkki 1. Onko funktio $f(x) = \frac{1}{8}x^4 + \frac{5}{2}x^2 + 3x - 1$ funktion $g(x) = \frac{1}{2}x^3 + 5x + 3$ integraalifunktio?

Esimerkki 2. Onko funktio $f(x) = \sin 2x + \sin^2 x$ funktion $g(x) = 2 \cos 2x + \sin 2x$ integraalifunktio?

Integraalifunktio

Osa I: Integraalifunktion
määritelmä

- Esimerkki
- **Integraalifunktio**

Osa II:
Integroimissääntöjä

Integroimismenetelmiä

Lause 1. *Jos F on eräs funktion f integraalifunktio, niin f :n kaikki integraalifunktiot ovat muotoa $F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$. Vakio c on **integroimisvakio**.*

Integraalifunktio

Osa I: Integraalifunktion
määritelmä

- Esimerkki
- **Integraalifunktio**

Osa II:
Integroimissääntöjä

Integroimismenetelmiä

Lause 1. Jos F on eräs funktion f integraalifunktio, niin f :n kaikki integraalifunktiot ovat muotoa $F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$. Vakio c on *integroimisvakio*.

Esimerkki 1. Määritä funktion $f(x) = 2x - 1$ kaikki integraalifunktiot.

Integraalifunktio

Osa I: Integraalifunktion
määritelmä

- Esimerkki
- **Integraalifunktio**

Osa II:
Integroimissääntöjä

Integroimismenetelmiä

Lause 1. Jos F on eräs funktion f integraalifunktio, niin f :n kaikki integraalifunktiot ovat muotoa $F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$. Vakio c on *integroimisvakio*.

Esimerkki 1. Määritä funktion $f(x) = 2x - 1$ kaikki integraalifunktiot.

$$\int (2x - 1)dx =$$

Integraalifunktio

Osa I: Integraalifunktion
määritelmä

- Esimerkki
- **Integraalifunktio**

Osa II:
Integroimissääntöjä

Integroimismenetelmiä

Lause 1. Jos F on eräs funktion f integraalifunktio, niin f :n kaikki integraalifunktiot ovat muotoa $F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$. Vakio c on *integroimisvakio*.

Esimerkki 1. Määritä funktion $f(x) = 2x - 1$ kaikki integraalifunktiot.

$$\int (2x - 1)dx = x^2 - x + c$$

Esimerkki 2. Määritä funktion $f(x) = e^{3x}$ se integraalifunktio F , joka kulkee pisteen $(0,2)$ kautta

Integraalifunktio

Osa I: Integraalifunktion
määritelmä

- Esimerkki
- **Integraalifunktio**

Osa II:
Integroimissääntöjä

Integroimismenetelmiä

Lause 1. Jos F on eräs funktion f integraalifunktio, niin f :n kaikki integraalifunktiot ovat muotoa $F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$. Vakio c on *integroimisvakio*.

Esimerkki 1. Määritä funktion $f(x) = 2x - 1$ kaikki integraalifunktiot.

$$\int (2x - 1) dx = x^2 - x + c$$

Esimerkki 2. Määritä funktion $f(x) = e^{3x}$ se integraalifunktio F , joka kulkee pisteen $(0,2)$ kautta

$$F(x) = \int e^{3x} dx =$$

Integraalifunktio

Osa I: Integraalifunktion
määritelmä

- Esimerkki
- **Integraalifunktio**

Osa II:
Integroimissääntöjä

Integroimismenetelmiä

Lause 1. Jos F on eräs funktion f integraalifunktio, niin f :n kaikki integraalifunktiot ovat muotoa $F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$. Vakio c on *integroimisvakio*.

Esimerkki 1. Määritä funktion $f(x) = 2x - 1$ kaikki integraalifunktiot.

$$\int (2x - 1) dx = x^2 - x + c$$

Esimerkki 2. Määritä funktion $f(x) = e^{3x}$ se integraalifunktio F , joka kulkee pisteen $(0,2)$ kautta

$$F(x) = \int e^{3x} dx = \frac{1}{3}e^{3x} + c$$

Integraalifunktio

Osa I: Integraalifunktion
määritelmä

- Esimerkki
- **Integraalifunktio**

Osa II:
Integroimissääntöjä

Integroimismenetelmiä

Lause 1. Jos F on eräs funktion f integraalifunktio, niin f :n kaikki integraalifunktiot ovat muotoa $F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$. Vakio c on *integroimisvakio*.

Esimerkki 1. Määritä funktion $f(x) = 2x - 1$ kaikki integraalifunktiot.

$$\int (2x - 1)dx = x^2 - x + c$$

Esimerkki 2. Määritä funktion $f(x) = e^{3x}$ se integraalifunktio F , joka kulkee pisteen $(0,2)$ kautta

$$\begin{aligned} F(x) &= \int e^{3x} dx = \frac{1}{3}e^{3x} + c \\ F(0) &= \frac{1}{3}e^0 + c = \end{aligned}$$

Integraalifunktio

Osa I: Integraalifunktion
määritelmä

- Esimerkki
- **Integraalifunktio**

Osa II:
Integroimissääntöjä

Integroimismenetelmiä

Lause 1. Jos F on eräs funktion f integraalifunktio, niin f :n kaikki integraalifunktiot ovat muotoa $F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$. Vakio c on *integroimisvakio*.

Esimerkki 1. Määritä funktion $f(x) = 2x - 1$ kaikki integraalifunktiot.

$$\int (2x - 1) dx = x^2 - x + c$$

Esimerkki 2. Määritä funktion $f(x) = e^{3x}$ se integraalifunktio F , joka kulkee pisteen $(0,2)$ kautta

$$\begin{aligned} F(x) &= \int e^{3x} dx = \frac{1}{3}e^{3x} + c \\ F(0) &= \frac{1}{3}e^0 + c = \frac{1}{3} + c = 2 \Rightarrow \end{aligned}$$

Integraalifunktio

Osa I: Integraalifunktion
määritelmä

- Esimerkki
- **Integraalifunktio**

Osa II:
Integroimissääntöjä

Integroimismenetelmiä

Lause 1. Jos F on eräs funktion f integraalifunktio, niin f :n kaikki integraalifunktiot ovat muotoa $F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$. Vakio c on *integroimisvakio*.

Esimerkki 1. Määritä funktion $f(x) = 2x - 1$ kaikki integraalifunktiot.

$$\int (2x - 1) dx = x^2 - x + c$$

Esimerkki 2. Määritä funktion $f(x) = e^{3x}$ se integraalifunktio F , joka kulkee pisteen $(0,2)$ kautta

$$\begin{aligned} F(x) &= \int e^{3x} dx = \frac{1}{3}e^{3x} + c \\ F(0) &= \frac{1}{3}e^0 + c = \frac{1}{3} + c = 2 \Rightarrow c = 1\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Integraalifunktio

Osa I: Integraalifunktion
määritelmä

- Esimerkki
- **Integraalifunktio**

Osa II:
Integroimissääntöjä

Integroimismenetelmiä

Lause 1. Jos F on eräs funktion f integraalifunktio, niin f :n kaikki integraalifunktiot ovat muotoa $F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$. Vakio c on *integroimisvakio*.

Esimerkki 1. Määritä funktion $f(x) = 2x - 1$ kaikki integraalifunktiot.

$$\int (2x - 1) dx = x^2 - x + c$$

Esimerkki 2. Määritä funktion $f(x) = e^{3x}$ se integraalifunktio F , joka kulkee pisteen $(0,2)$ kautta

$$\begin{aligned} F(x) &= \int e^{3x} dx = \frac{1}{3}e^{3x} + c \\ F(0) &= \frac{1}{3}e^0 + c = \frac{1}{3} + c = 2 \Rightarrow c = 1\frac{2}{3} \\ F(x) &= \frac{1}{3}e^{3x} + 1\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Osa I: Integraalifunktion
määritelmä

Osa II:
Integroimissääntöjä

● Polynomifunktio

● Potenssifunktio

● Potenssifunktio

$$y = x^{-1}$$

● Potenssifunktio

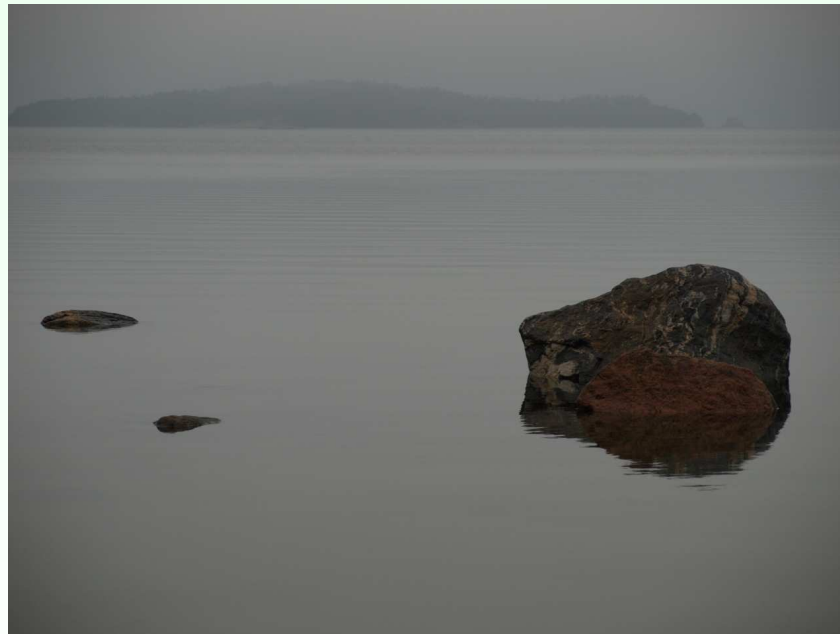
$$y = f(x)^{-1}$$

● Eksponenttifunktio

● Trigonometriset
funktiot

Integroimismenetelmiä

Osa II: Integroimissääntöjä



Polynomifunktio

Osa I: Integraalifunktion
määritelmä

Osa II:
Integroimissääntöjä

● **Polynomifunktio**

● Potenssifunktio

● Potenssifunktio

$y = x^{-1}$

● Potenssifunktio

$y = f(x)^{-1}$

● Eksponenttifunktio

● Trigonometriset
funktiot

Integroimismenetelmiä

$$1. \int cf(x)dx = c \int f(x)dx, c \in \mathbb{R}$$

Polynomifunktio

Osa I: Integraalifunktion
määritelmä

Osa II:
Integroimissääntöjä

● **Polynomifunktio**

● Potenssifunktio

● Potenssifunktio

$y = x^{-1}$

● Potenssifunktio

$y = f(x)^{-1}$

● Eksponenttifunktio

● Trigonometriset
funktiot

Integroimismenetelmiä

$$1. \int cf(x)dx = c \int f(x)dx, c \in \mathbb{R}$$

$$2. \int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

Polynomifunktio

Osa I: Integraalifunktion
määritelmä

Osa II:
Integroimissääntöjä

● **Polynomifunktio**

● Potenssifunktio

● Potenssifunktio

$y = x^{-1}$

● Potenssifunktio

$y = f(x)^{-1}$

● Eksponenttifunktio

● Trigonometriset
funktiot

Integroimismenetelmiä

$$1. \int cf(x)dx = c \int f(x)dx, c \in \mathbb{R}$$

$$2. \int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$3. \int x^n dx =$$

Polynomifunktio

Osa I: Integraalifunktion
määritelmä

Osa II:
Integroimissääntöjä

● **Polynomifunktio**

● Potenssifunktio

● Potenssifunktio

$y = x^{-1}$

● Potenssifunktio

$y = f(x)^{-1}$

● Eksponenttifunktio

● Trigonometriset
funktiot

Integroimismenetelmiä

$$1. \int cf(x)dx = c \int f(x)dx, c \in \mathbb{R}$$

$$2. \int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$3. \int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c, n \in \mathbb{N}$$

Polynomifunktio

Osa I: Integraalifunktion
määritelmä

Osa II:
Integroimissääntöjä

● **Polynomifunktio**

● Potenssifunktio

● Potenssifunktio

$y = x^{-1}$

● Potenssifunktio

$y = f(x)^{-1}$

● Eksponenttifunktio

● Trigonometriset
funktiot

Integroimismenetelmiä

$$1. \int cf(x)dx = c \int f(x)dx, c \in \mathbb{R}$$

$$2. \int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$3. \int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c, n \in \mathbb{N}$$

Esimerkki.

$$\int \left(5x^3 - \frac{x^2}{2} + x - 1\right) dx =$$

Polynomifunktio

Osa I: Integraalifunktion
määritelmä

Osa II:
Integroimissääntöjä

● **Polynomifunktio**

● Potenssifunktio

● Potenssifunktio

$y = x^{-1}$

● Potenssifunktio

$y = f(x)^{-1}$

● Eksponenttifunktio

● Trigonometriset
funktiot

Integroimismenetelmiä

$$1. \int cf(x)dx = c \int f(x)dx, c \in \mathbb{R}$$

$$2. \int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$3. \int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c, n \in \mathbb{N}$$

Esimerkki.

$$\int (5x^3 - \frac{x^2}{2} + x - 1)dx = \frac{5}{4}x^4 -$$

Polynomifunktio

Osa I: Integraalifunktion
määritelmä

Osa II:
Integroimissääntöjä

● **Polynomifunktio**

● Potenssifunktio

● Potenssifunktio

$y = x^{-1}$

● Potenssifunktio

$y = f(x)^{-1}$

● Eksponenttifunktio

● Trigonometriset
funktiot

Integroimismenetelmiä

$$1. \int cf(x)dx = c \int f(x)dx, c \in \mathbb{R}$$

$$2. \int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$3. \int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c, n \in \mathbb{N}$$

Esimerkki.

$$\int \left(5x^3 - \frac{x^2}{2} + x - 1\right) dx = \frac{5}{4}x^4 - \frac{1}{6}x^3 +$$

Polynomifunktio

Osa I: Integraalifunktion
määritelmä

Osa II:
Integroimissääntöjä

● **Polynomifunktio**

● Potenssifunktio

● Potenssifunktio

$y = x^{-1}$

● Potenssifunktio

$y = f(x)^{-1}$

● Eksponenttifunktio

● Trigonometriset
funktiot

Integroimismenetelmiä

$$1. \int cf(x)dx = c \int f(x)dx, c \in \mathbb{R}$$

$$2. \int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$3. \int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c, n \in \mathbb{N}$$

Esimerkki.

$$\int (5x^3 - \frac{x^2}{2} + x - 1)dx = \frac{5}{4}x^4 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 -$$

Polynomifunktio

Osa I: Integraalifunktion
määritelmä

Osa II:
Integroimissääntöjä

● Polynomifunktio

● Potenssifunktio

● Potenssifunktio

$y = x^{-1}$

● Potenssifunktio

$y = f(x)^{-1}$

● Eksponenttifunktio

● Trigonometriset
funktiot

Integroimismenetelmiä

$$1. \int cf(x)dx = c \int f(x)dx, c \in \mathbb{R}$$

$$2. \int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$3. \int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c, n \in \mathbb{N}$$

Esimerkki.

$$\int (5x^3 - \frac{x^2}{2} + x - 1)dx = \frac{5}{4}x^4 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x +$$

Polynomifunktio

Osa I: Integraalifunktion
määritelmä

Osa II:
Integroimissääntöjä

● **Polynomifunktio**

● Potenssifunktio

● Potenssifunktio

$y = x^{-1}$

● Potenssifunktio

$y = f(x)^{-1}$

● Eksponenttifunktio

● Trigonometriset
funktiot

Integroimismenetelmiä

$$1. \int cf(x)dx = c \int f(x)dx, c \in \mathbb{R}$$

$$2. \int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$3. \int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c, n \in \mathbb{N}$$

Esimerkki.

$$\int \left(5x^3 - \frac{x^2}{2} + x - 1\right) dx = \frac{5}{4}x^4 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x + c$$

Potenssifunktio

Osa I: Integraalifunktion
määritelmä

Osa II:
Integroimissääntöjä

● Polynomifunktio

● **Potenssifunktio**

● Potenssifunktio

$$y = x^{-1}$$

● Potenssifunktio

$$y = f(x)^{-1}$$

● Eksponenttifunktio

● Trigonometriset
funktiot

Integroimismenetelmiä

$$\int x^a dx =$$

Potenssifunktio

Osa I: Integraalifunktion
määritelmä

Osa II:
Integroimissääntöjä

● Polynomifunktio

● **Potenssifunktio**

● Potenssifunktio

$$y = x^{-1}$$

● Potenssifunktio

$$y = f(x)^{-1}$$

● Eksponenttifunktio

● Trigonometriset
funktiot

Integroimismenetelmiä

$$\int x^a dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} + c,$$

Potenssifunktio

Osa I: Integraalifunktion
määritelmä

Osa II:
Integroimissääntöjä

● Polynomifunktio

● **Potenssifunktio**

● Potenssifunktio

$y = x^{-1}$

● Potenssifunktio

$y = f(x)^{-1}$

● Eksponenttifunktio

● Trigonometriset
funktiot

Integroimismenetelmiä

$$\int x^a dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} + c, \quad a \neq -1, \quad a \in \mathbb{R}$$

Potenssifunktio

Osa I: Integraalifunktion
määritelmä

Osa II:
Integroimissääntöjä

● Polynomifunktio

● **Potenssifunktio**

● Potenssifunktio

$y = x^{-1}$

● Potenssifunktio

$y = f(x)^{-1}$

● Eksponenttifunktio

● Trigonometriset
funktiot

Integroimismenetelmiä

$$\int x^a dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} + c, \quad a \neq -1, \quad a \in \mathbb{R}$$

Esimerkki 1. $\int \frac{5}{x^2} dx$

Potenssifunktio

Osa I: Integraalifunktion
määritelmä

Osa II:
Integroimissääntöjä

● Polynomifunktio

● **Potenssifunktio**

● Potenssifunktio

$y = x^{-1}$

● Potenssifunktio

$y = f(x)^{-1}$

● Eksponenttifunktio

● Trigonometriset
funktiot

Integroimismenetelmiä

$$\int x^a dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} + c, \quad a \neq -1, \quad a \in \mathbb{R}$$

Esimerkki 1. $\int \frac{5}{x^2} dx$

Esimerkki 2. $\int x\sqrt{x} dx$

Potenssifunktio

Osa I: Integraalifunktion
määritelmä

Osa II:
Integroimissääntöjä

● Polynomifunktio

● **Potenssifunktio**

● Potenssifunktio

$$y = x^{-1}$$

● Potenssifunktio

$$y = f(x)^{-1}$$

● Eksponenttifunktio

● Trigonometriset
funktiot

Integroimismenetelmiä

$$Df(x)^{a+1} =$$

Potenssifunktio

Osa I: Integraalifunktion
määritelmä

Osa II:
Integroimissääntöjä

● Polynomifunktio

● **Potenssifunktio**

● Potenssifunktio

$$y = x^{-1}$$

● Potenssifunktio

$$y = f(x)^{-1}$$

● Eksponenttifunktio

● Trigonometriset
funktiot

Integroimismenetelmiä

$$Df(x)^{a+1} = (a+1)f'(x)f(x)^a$$

Potenssifunktio

Osa I: Integraalifunktion
määritelmä

Osa II:
Integroimissääntöjä

● Polynomifunktio

● **Potenssifunktio**

● Potenssifunktio

$y = x^{-1}$

● Potenssifunktio

$y = f(x)^{-1}$

● Eksponenttifunktio

● Trigonometriset
funktiot

Integroimismenetelmiä

$$Df(x)^{a+1} = (a+1)f'(x)f(x)^a$$
$$\frac{1}{a+1}Df(x)^{a+1} = f'(x)f(x)^a$$

Potenssifunktio

Osa I: Integraalifunktion
määritelmä

Osa II:
Integroimissääntöjä

● Polynomifunktio

● **Potenssifunktio**

● Potenssifunktio

$y = x^{-1}$

● Potenssifunktio

$y = f(x)^{-1}$

● Eksponenttifunktio

● Trigonometriset
funktiot

Integroimismenetelmiä

$$Df(x)^{a+1} = (a+1)f'(x)f(x)^a$$

$$\frac{1}{a+1}Df(x)^{a+1} = f'(x)f(x)^a$$

$$D\left(\frac{1}{a+1}f(x)^{a+1}\right) = f'(x)f(x)^a$$

Potenssifunktio

Osa I: Integraalifunktion
määritelmä

Osa II:
Integroimissääntöjä

● Polynomifunktio

● **Potenssifunktio**

● Potenssifunktio

$y = x^{-1}$

● Potenssifunktio

$y = f(x)^{-1}$

● Eksponenttifunktio

● Trigonometriset

funktiot

Integroimismenetelmiä

$$Df(x)^{a+1} = (a+1)f'(x)f(x)^a$$

$$\frac{1}{a+1}Df(x)^{a+1} = f'(x)f(x)^a$$

$$D\left(\frac{1}{a+1}f(x)^{a+1}\right) = f'(x)f(x)^a$$

Tästä saadaan integroimissääntö

$$\int f'(x) f(x)^a dx = \frac{1}{a+1} f(x)^{a+1} + c, \quad a \neq -1$$

Potenssifunktio

Osa I: Integraalifunktion
määritelmä

Osa II:
Integroimissääntöjä

● Polynomifunktio

● **Potenssifunktio**

● Potenssifunktio

$y = x^{-1}$

● Potenssifunktio

$y = f(x)^{-1}$

● Eksponenttifunktio

● Trigonometriset
funktiot

Integroimismenetelmiä

$$Df(x)^{a+1} = (a+1)f'(x)f(x)^a$$
$$\frac{1}{a+1}Df(x)^{a+1} = f'(x)f(x)^a$$
$$D\left(\frac{1}{a+1}f(x)^{a+1}\right) = f'(x)f(x)^a$$

Tästä saadaan integroimissääntö

$$\int f'(x) f(x)^a dx = \frac{1}{a+1} f(x)^{a+1}, \quad a \neq -1$$

sisäfunktion derivaatta

yhdistetty funktio

Esimerkkejä

Osa I: Integraalifunktion
määritelmä

Osa II:
Integroimissääntöjä

● Polynomifunktio

● **Potenssifunktio**

● Potenssifunktio

$$y = x^{-1}$$

● Potenssifunktio

$$y = f(x)^{-1}$$

● Eksponenttifunktio

● Trigonometriset
funktiot

Integroimismenetelmiä

$$1. \int 3(3x - 1)^5 dx =$$

Esimerkkejä

Osa I: Integraalifunktion
määritelmä

Osa II:
Integroimissääntöjä

● Polynomifunktio

● **Potenssifunktio**

● Potenssifunktio

$$y = x^{-1}$$

● Potenssifunktio

$$y = f(x)^{-1}$$

● Eksponenttifunktio

● Trigonometriset
funktiot

Integroimismenetelmiä

$$1. \int 3(3x - 1)^5 dx = \frac{1}{6}(3x - 1)^6 + c$$

Esimerkkejä

Osa I: Integraalifunktion
määritelmä

Osa II:
Integroimissääntöjä

● Polynomifunktio

● Potenssifunktio

● Potenssifunktio
 $y = x^{-1}$

● Potenssifunktio
 $y = f(x)^{-1}$

● Eksponenttifunktio

● Trigonometriset
funktiot

Integroimismenetelmiä

$$1. \int 3(3x - 1)^5 dx = \frac{1}{6}(3x - 1)^6 + c$$

$$2. \int (5x - 3)^4 dx =$$

Esimerkkejä

Osa I: Integraalifunktion
määritelmä

Osa II:
Integroimissääntöjä

● Polynomifunktio

● **Potenssifunktio**

● Potenssifunktio
 $y = x^{-1}$

● Potenssifunktio
 $y = f(x)^{-1}$

● Eksponenttifunktio

● Trigonometriset
funktiot

Integroimismenetelmiä

$$1. \int 3(3x - 1)^5 dx = \frac{1}{6}(3x - 1)^6 + c$$

$$2. \int (5x - 3)^4 dx = \boxed{\frac{1}{5}} \int \boxed{5} (5x - 3)^4 dx =$$

Esimerkkejä

Osa I: Integraalifunktion
määritelmä

Osa II:
Integroimissääntöjä

● Polynomifunktio

● **Potenssifunktio**

● Potenssifunktio
 $y = x^{-1}$

● Potenssifunktio
 $y = f(x)^{-1}$

● Eksponenttifunktio

● Trigonometriset
funktiot

Integroimismenetelmiä

$$1. \int 3(3x - 1)^5 dx = \frac{1}{6}(3x - 1)^6 + c$$

$$2. \int (5x - 3)^4 dx = \boxed{\frac{1}{5}} \int \boxed{5} (5x - 3)^4 dx = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} (5x - 3)^5 + c$$

Esimerkkejä

Osa I: Integraalifunktion
määritelmä

Osa II:
Integroimissääntöjä

● Polynomifunktio

● **Potenssifunktio**

● Potenssifunktio
 $y = x^{-1}$

● Potenssifunktio
 $y = f(x)^{-1}$

● Eksponenttifunktio

● Trigonometriset
funktiot

Integroimismenetelmiä

$$1. \int 3(3x - 1)^5 dx = \frac{1}{6}(3x - 1)^6 + c$$

$$2. \int (5x - 3)^4 dx = \boxed{\frac{1}{5}} \int \boxed{5} (5x - 3)^4 dx = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} (5x - 3)^5 + c$$

$$3. \int \frac{3}{(4x - 1)^2} dx$$

Esimerkkejä

Osa I: Integraalifunktion
määritelmä

Osa II:
Integroimissääntöjä

● Polynomifunktio

● Potenssifunktio

● Potenssifunktio
 $y = x^{-1}$

● Potenssifunktio
 $y = f(x)^{-1}$

● Eksponenttifunktio

● Trigonometriset
funktiot

Integroimismenetelmiä

$$1. \int 3(3x - 1)^5 dx = \frac{1}{6}(3x - 1)^6 + c$$

$$2. \int (5x - 3)^4 dx = \boxed{\frac{1}{5}} \int \boxed{5} (5x - 3)^4 dx = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} (5x - 3)^5 + c$$

$$3. \int \frac{3}{(4x - 1)^2} dx$$

$$4. \int \frac{1}{\sqrt{2x + 1}} dx$$

Esimerkkejä

Osa I: Integraalifunktion
määritelmä

Osa II:
Integroimissääntöjä

● Polynomifunktio

● Potenssifunktio

● Potenssifunktio
 $y = x^{-1}$

● Potenssifunktio
 $y = f(x)^{-1}$

● Eksponenttifunktio

● Trigonometriset
funktiot

Integroimismenetelmiä

$$1. \int 3(3x - 1)^5 dx = \frac{1}{6}(3x - 1)^6 + c$$

$$2. \int (5x - 3)^4 dx = \boxed{\frac{1}{5}} \int \boxed{5} (5x - 3)^4 dx = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} (5x - 3)^5 + c$$

$$3. \int \frac{3}{(4x - 1)^2} dx$$

$$4. \int \frac{1}{\sqrt{2x + 1}} dx$$

$$5. \int x(2 + x^2)^2 dx$$

Esimerkkejä

Osa I: Integraalifunktion
määritelmä

Osa II:
Integroimissääntöjä

● Polynomifunktio

● Potenssifunktio

● Potenssifunktio
 $y = x^{-1}$

● Potenssifunktio
 $y = f(x)^{-1}$

● Eksponenttifunktio

● Trigonometriset
funktiot

Integroimismenetelmiä

$$1. \int 3(3x - 1)^5 dx = \frac{1}{6}(3x - 1)^6 + c$$

$$2. \int (5x - 3)^4 dx = \boxed{\frac{1}{5}} \int \boxed{5} (5x - 3)^4 dx = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} (5x - 3)^5 + c$$

$$3. \int \frac{3}{(4x - 1)^2} dx$$

$$4. \int \frac{1}{\sqrt{2x + 1}} dx$$

$$5. \int x(2 + x^2)^2 dx$$

$$6. \int (2 + x^2)^2 dx$$

Potenssifunktio $y = x^{-1}$

Osa I: Integraalifunktion
määritelmä

Osa II:
Integroimissääntöjä

- Polynomifunktio
- Potenssifunktio
- **Potenssifunktio**
 $y = x^{-1}$
- Potenssifunktio
 $y = f(x)^{-1}$
- Eksponenttifunktio
- Trigonometriset
funktiot

Integroimismenetelmiä

$$\int \frac{1}{x} dx = \int x^{-1} dx =$$

Potenssifunktio $y = x^{-1}$

Osa I: Integraalifunktion
määritelmä

Osa II:
Integroimissääntöjä

- Polynomifunktio
- Potenssifunktio
- Potenssifunktio
 $y = x^{-1}$
- Potenssifunktio
 $y = f(x)^{-1}$
- Eksponenttifunktio
- Trigonometriset
funktiot

Integroimismenetelmiä

$$\int \frac{1}{x} dx = \int x^{-1} dx = \ln |x| + c, \quad (x \neq 0)^1$$

Potenssifunktio $y = x^{-1}$

Osa I: Integraalifunktion
määritelmä

Osa II:
Integroimissääntöjä

- Polynomifunktio
- Potenssifunktio
- **Potenssifunktio**
 $y = x^{-1}$
- Potenssifunktio
 $y = f(x)^{-1}$
- Eksponenttifunktio
- Trigonometriset
funktiot

Integroimismenetelmiä

$$\int \frac{1}{x} dx = \int x^{-1} dx = \ln |x| + c, \quad (x \neq 0)^1$$

Esimerkki. $\int \frac{4}{x} dx =$

Potenssifunktio $y = x^{-1}$

Osa I: Integraalifunktion
määritelmä

Osa II:
Integroimissääntöjä

● Polynomifunktio

● Potenssifunktio

● Potenssifunktio

$y = x^{-1}$

● Potenssifunktio

$y = f(x)^{-1}$

● Eksponenttifunktio

● Trigonometriset
funktiot

Integroimismenetelmiä

$$\int \frac{1}{x} dx = \int x^{-1} dx = \ln |x| + c, \quad (x \neq 0)^1$$

Esimerkki. $\int \frac{4}{x} dx = 4 \int \frac{1}{x} dx =$

Potenssifunktio $y = x^{-1}$

Osa I: Integraalifunktion
määritelmä

Osa II:
Integroimissääntöjä

- Polynomifunktio
- Potenssifunktio
- **Potenssifunktio**
 $y = x^{-1}$
- Potenssifunktio
 $y = f(x)^{-1}$
- Eksponenttifunktio
- Trigonometriset
funktiot

Integroimismenetelmiä

$$\int \frac{1}{x} dx = \int x^{-1} dx = \ln |x| + c, \quad (x \neq 0)^1$$

Esimerkki. $\int \frac{4}{x} dx = 4 \int \frac{1}{x} dx = 4 \ln |x| + c$

¹Voimassa väleillä, joihin $x = 0$ ei kuulu. Katso tarkemmin MT10 s. 11–12

Potenssifunktio $y = f(x)^{-1}$

Osa I: Integraalifunktion
määritelmä

Osa II:
Integroimissääntöjä

● Polynomifunktio

● Potenssifunktio

● Potenssifunktio

$y = x^{-1}$

● **Potenssifunktio**

$y = f(x)^{-1}$

● Eksponenttifunktio

● Trigonometriset
funktiot

Integroimismenetelmiä

$$D \ln |f(x)| =$$

Potenssifunktio $y = f(x)^{-1}$

Osa I: Integraalifunktion
määritelmä

Osa II:
Integroimissääntöjä

● Polynomifunktio

● Potenssifunktio

● Potenssifunktio

$y = x^{-1}$

● **Potenssifunktio**

$y = f(x)^{-1}$

● Eksponenttifunktio

● Trigonometriset
funktiot

Integroimismenetelmiä

$$D \ln |f(x)| = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

Tästä saadaan integroimissääntö

Potenssifunktio $y = f(x)^{-1}$

Osa I: Integraalifunktion
määritelmä

Osa II:
Integroimissääntöjä

● Polynomifunktio

● Potenssifunktio

● Potenssifunktio

$y = x^{-1}$

● **Potenssifunktio**

$y = f(x)^{-1}$

● Eksponenttifunktio

● Trigonometriset
funktiot

Integroimismenetelmiä

$$D \ln |f(x)| = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

Tästä saadaan integroimissääntö

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int f'(x) f(x)^{-1} dx = \ln |f(x)| + c, (f(x) \neq 0)^2$$

²Voimassa väleillä, joihin funktion $f(x)$ nollakohdat eivät kuulu.

Potenssifunktio $y = f(x)^{-1}$

Osa I: Integraalifunktion
määritelmä

Osa II:
Integroimissääntöjä

● Polynomifunktio

● Potenssifunktio

● Potenssifunktio

$y = x^{-1}$

● **Potenssifunktio**

$y = f(x)^{-1}$

● Eksponenttifunktio

● Trigonometriset
funktiot

Integroimismenetelmiä

$$D \ln |f(x)| = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

Tästä saadaan integroimissääntö

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \boxed{f'(x)} \boxed{f(x)^{-1}} dx = \ln |f(x)| + c, (f(x) \neq 0)^2$$

sisäfunktion derivaatta

yhdistetty funktio

²Voimassa väleillä, joihin funktion $f(x)$ nollakohdat eivät kuulu.

Esimerkkejä

Osa I: Integraalifunktion
määritelmä

Osa II:
Integroimissääntöjä

● Polynomifunktio

● Potenssifunktio

● Potenssifunktio

$y = x^{-1}$

● Potenssifunktio

$y = f(x)^{-1}$

● Eksponenttifunktio

● Trigonometriset
funktiot

Integroimismenetelmiä

$$1. \int \frac{x}{x^2 + 1} dx =$$

Esimerkkejä

Osa I: Integraalifunktion
määritelmä

Osa II:
Integroimissääntöjä

● Polynomifunktio

● Potenssifunktio

● Potenssifunktio

$y = x^{-1}$

● Potenssifunktio

$y = f(x)^{-1}$

● Eksponenttifunktio

● Trigonometriset
funktiot

Integroimismenetelmiä

$$1. \int \frac{x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2 + 1} dx =$$

Esimerkkejä

Osa I: Integraalifunktion
määritelmä

Osa II:
Integroimissääntöjä

● Polynomifunktio

● Potenssifunktio

● Potenssifunktio

$y = x^{-1}$

● Potenssifunktio

$y = f(x)^{-1}$

● Eksponenttifunktio

● Trigonometriset
funktiot

Integroimismenetelmiä

$$1. \int \frac{x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \ln |x^2 + 1| + c =$$

Esimerkkejä

Osa I: Integraalifunktion
määritelmä

Osa II:
Integroimissääntöjä

● Polynomifunktio

● Potenssifunktio

● Potenssifunktio

$y = x^{-1}$

● Potenssifunktio

$y = f(x)^{-1}$

● Eksponenttifunktio

● Trigonometriset
funktiot

Integroimismenetelmiä

$$\begin{aligned} 1. \int \frac{x}{x^2 + 1} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \ln |x^2 + 1| + c = \\ &\frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + c, \quad x^2 + 1 > 0 \end{aligned}$$

Esimerkkejä

Osa I: Integraalifunktion
määritelmä

Osa II:
Integroimissääntöjä

● Polynomifunktio

● Potenssifunktio

● Potenssifunktio

$y = x^{-1}$

● Potenssifunktio

$y = f(x)^{-1}$

● Eksponenttifunktio

● Trigonometriset
funktiot

Integroimismenetelmiä

$$1. \int \frac{x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \ln |x^2 + 1| + c = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + c, \quad x^2 + 1 > 0$$

$$2. \int \frac{x^2 + x - 3}{2x} dx =$$

Esimerkkejä

Osa I: Integraalifunktion
määritelmä

Osa II:
Integroimissääntöjä

● Polynomifunktio

● Potenssifunktio

● Potenssifunktio

$y = x^{-1}$

● Potenssifunktio

$y = f(x)^{-1}$

● Eksponenttifunktio

● Trigonometriset
funktiot

Integroimismenetelmiä

$$1. \int \frac{x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \ln |x^2 + 1| + c =$$
$$\frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + c, \quad x^2 + 1 > 0$$

$$2. \int \frac{x^2 + x - 3}{2x} dx = \frac{1}{2} \int \left(\frac{x^2}{x} + \frac{x}{x} - \frac{3}{x} \right) dx =$$

Esimerkkejä

Osa I: Integraalifunktion
määritelmä

Osa II:
Integroimissääntöjä

● Polynomifunktio

● Potenssifunktio

● Potenssifunktio

$y = x^{-1}$

● Potenssifunktio

$y = f(x)^{-1}$

● Eksponenttifunktio

● Trigonometriset
funktiot

Integroimismenetelmiä

$$1. \int \frac{x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \ln |x^2 + 1| + c = \\ \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + c, \quad x^2 + 1 > 0$$

$$2. \int \frac{x^2 + x - 3}{2x} dx = \frac{1}{2} \int \left(\frac{x^2}{x} + \frac{x}{x} - \frac{3}{x} \right) dx = \\ \frac{1}{2} \int \left(x + 1 - \frac{3}{x} \right) dx =$$

Esimerkkejä

Osa I: Integraalifunktion
määritelmä

Osa II:
Integroimissääntöjä

● Polynomifunktio

● Potenssifunktio

● Potenssifunktio

$y = x^{-1}$

● Potenssifunktio

$y = f(x)^{-1}$

● Eksponenttifunktio

● Trigonometriset
funktiot

Integroimismenetelmiä

$$\begin{aligned} 1. \int \frac{x}{x^2 + 1} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \ln |x^2 + 1| + c = \\ &\frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + c, \quad x^2 + 1 > 0 \\ 2. \int \frac{x^2 + x - 3}{2x} dx &= \frac{1}{2} \int \left(\frac{x^2}{x} + \frac{x}{x} - \frac{3}{x} \right) dx = \\ &\frac{1}{2} \int \left(x + 1 - \frac{3}{x} \right) dx = \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{2} x - \frac{3}{2} \ln |x| + c, \quad (x \neq 0) \end{aligned}$$

Eksponenttifunktio

Osa I: Integraalifunktion
määritelmä

Osa II:
Integroimissääntöjä

● Polynomifunktio

● Potenssifunktio

● Potenssifunktio

$y = x^{-1}$

● Potenssifunktio

$y = f(x)^{-1}$

● Eksponenttifunktio

● Trigonometriset
funktiot

Integroimismenetelmiä

$$\int e^x dx =$$

Eksponenttifunktio

Osa I: Integraalifunktion
määritelmä

Osa II:
Integroimissääntöjä

● Polynomifunktio

● Potenssifunktio

● Potenssifunktio
 $y = x^{-1}$

● Potenssifunktio
 $y = f(x)^{-1}$

● Eksponenttifunktio

● Trigonometriset
funktiot

Integroimismenetelmiä

$$\int e^x dx = e^x + c$$

1. $\int \frac{e^x}{\sqrt{e^x + 2}} dx$

Eksponenttifunktio

Osa I: Integraalifunktion
määritelmä

Osa II:
Integroimissääntöjä

● Polynomifunktio

● Potenssifunktio

● Potenssifunktio

$y = x^{-1}$

● Potenssifunktio

$y = f(x)^{-1}$

● Eksponenttifunktio

● Trigonometriset
funktiot

Integroimismenetelmiä

$$\int e^x dx = e^x + c$$

1. $\int \frac{e^x}{\sqrt{e^x + 2}} dx$

2. $\int \frac{e^x}{3e^x + 1} dx$

Eksponenttifunktio

Osa I: Integraalifunktion
määritelmä

Osa II:
Integroimissääntöjä

- Polynomifunktio
- Potenssifunktio
- Potenssifunktio
 $y = x^{-1}$
- Potenssifunktio
 $y = f(x)^{-1}$
- Eksponenttifunktio
- Trigonometriset
funktiot

Integroimismenetelmiä

$$De^{f(x)} =$$

Eksponenttifunktio

Osa I: Integraalifunktion
määritelmä

Osa II:
Integroimissääntöjä

● Polynomifunktio

● Potenssifunktio

● Potenssifunktio

$$y = x^{-1}$$

● Potenssifunktio

$$y = f(x)^{-1}$$

● Eksponenttifunktio

● Trigonometriset
funktiot

Integroimismenetelmiä

$$De^{f(x)} = f'(x)e^{f(x)}$$

Eksponenttifunktio

Osa I: Integraalifunktion
määritelmä

Osa II:
Integroimissääntöjä

● Polynomifunktio

● Potenssifunktio

● Potenssifunktio

$y = x^{-1}$

● Potenssifunktio

$y = f(x)^{-1}$

● Eksponenttifunktio

● Trigonometriset
funktiot

Integroimismenetelmiä

$$De^{f(x)} = f'(x)e^{f(x)}$$

$$\int f'(x)e^{f(x)} dx = e^{f(x)} + c$$

Eksponenttifunktio

Osa I: Integraalifunktion
määritelmä

Osa II:
Integroimissääntöjä

● Polynomifunktio

● Potenssifunktio

● Potenssifunktio

$y = x^{-1}$

● Potenssifunktio

$y = f(x)^{-1}$

● Eksponenttifunktio

● Trigonometriset
funktiot

Integroimismenetelmiä

$$De^{f(x)} = f'(x)e^{f(x)}$$

$$\int f'(x)e^{f(x)} dx = e^{f(x)} + c$$

1. $\int e^{-x} dx$

Eksponenttifunktio

Osa I: Integraalifunktion
määritelmä

Osa II:
Integroimissääntöjä

● Polynomifunktio

● Potenssifunktio

● Potenssifunktio

$y = x^{-1}$

● Potenssifunktio

$y = f(x)^{-1}$

● Eksponenttifunktio

● Trigonometriset
funktiot

Integroimismenetelmiä

$$De^{f(x)} = f'(x)e^{f(x)}$$

$$\int f'(x)e^{f(x)} dx = e^{f(x)} + c$$

1. $\int e^{-x} dx$

2. $\int \frac{e^x + e^{-x}}{e^x} dx$

★ Eksponenttifunktio

Osa I: Integraalifunktion
määritelmä

Osa II:
Integroimissääntöjä

● Polynomifunktio

● Potenssifunktio

● Potenssifunktio

$$y = x^{-1}$$

● Potenssifunktio

$$y = f(x)^{-1}$$

● Eksponenttifunktio

● Trigonometriset
funktiot

Integroimismenetelmiä

$$\int a^x dx =$$

★ Eksponenttifunktio

Osa I: Integraalifunktion
määritelmä

Osa II:
Integroimissääntöjä

● Polynomifunktio

● Potenssifunktio

● Potenssifunktio

$y = x^{-1}$

● Potenssifunktio

$y = f(x)^{-1}$

● Eksponenttifunktio

● Trigonometriset
funktiot

Integroimismenetelmiä

$$\int a^x dx = \int \left(e^{\ln a} \right)^x dx$$

=

★ Eksponenttifunktio

Osa I: Integraalifunktion
määritelmä

Osa II:
Integroimissääntöjä

● Polynomifunktio

● Potenssifunktio

● Potenssifunktio

$y = x^{-1}$

● Potenssifunktio

$y = f(x)^{-1}$

● Eksponenttifunktio

● Trigonometriset
funktiot

Integroimismenetelmiä

$$\int a^x dx = \int (e^{\ln a})^x dx$$

$$= \int e^{x \ln a} dx$$

=

★ Eksponenttifunktio

Osa I: Integraalifunktion
määritelmä

Osa II:
Integroimissääntöjä

● Polynomifunktio

● Potenssifunktio

● Potenssifunktio

$y = x^{-1}$

● Potenssifunktio

$y = f(x)^{-1}$

● Eksponenttifunktio

● Trigonometriset
funktiot

Integroimismenetelmiä

$$\begin{aligned}\int a^x dx &= \int (e^{\ln a})^x dx \\ &= \int e^{x \ln a} dx \\ &= \frac{1}{\ln a} \int \ln a e^{x \ln a} dx \\ &= \end{aligned}$$

★ Eksponenttifunktio

Osa I: Integraalifunktion
määritelmä

Osa II:
Integroimissääntöjä

● Polynomifunktio

● Potenssifunktio

● Potenssifunktio

$y = x^{-1}$

● Potenssifunktio

$y = f(x)^{-1}$

● Eksponenttifunktio

● Trigonometriset
funktiot

Integroimismenetelmiä

$$\begin{aligned}\int a^x dx &= \int (e^{\ln a})^x dx \\ &= \int e^{x \ln a} dx \\ &= \frac{1}{\ln a} \int \ln a e^{x \ln a} dx \\ &= \frac{1}{\ln a} e^{x \ln a} + c \\ &= \end{aligned}$$

★ Eksponenttifunktio

Osa I: Integraalifunktion
määritelmä

Osa II:
Integroimissääntöjä

● Polynomifunktio

● Potenssifunktio

● Potenssifunktio

$y = x^{-1}$

● Potenssifunktio

$y = f(x)^{-1}$

● Eksponenttifunktio

● Trigonometriset
funktiot

Integroimismenetelmiä

$$\begin{aligned}\int a^x dx &= \int \left(e^{\ln a}\right)^x dx \\ &= \int e^{x \ln a} dx \\ &= \frac{1}{\ln a} \int \ln a e^{x \ln a} dx \\ &= \frac{1}{\ln a} e^{x \ln a} + c \\ &= \frac{1}{\ln a} a^x + c, \quad (a > 0, a \neq 1)\end{aligned}$$

Trigonometriset funktiot

Osa I: Integraalifunktion
määritelmä

Osa II:
Integroimissääntöjä

● Polynomifunktio

● Potenssifunktio

● Potenssifunktio

$y = x^{-1}$

● Potenssifunktio

$y = f(x)^{-1}$

● Eksponenttifunktio

● **Trigonometriset
funktio**

Integroimismenetelmiä

$$\int \sin x dx =$$

Trigonometriset funktiot

Osa I: Integraalifunktion
määritelmä

Osa II:
Integroimissääntöjä

● Polynomifunktio

● Potenssifunktio

● Potenssifunktio

$y = x^{-1}$

● Potenssifunktio

$y = f(x)^{-1}$

● Eksponenttifunktio

● **Trigonometriset
funktio**

Integroimismenetelmiä

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x dx =$$

Trigonometriset funktiot

Osa I: Integraalifunktion
määritelmä

Osa II:
Integroimissääntöjä

● Polynomifunktio

● Potenssifunktio

● Potenssifunktio

$y = x^{-1}$

● Potenssifunktio

$y = f(x)^{-1}$

● Eksponenttifunktio

● **Trigonometriset
funktio**

Integroimismenetelmiä

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

Trigonometriset funktiot

Osa I: Integraalifunktion
määritelmä

Osa II:
Integroimissääntöjä

● Polynomifunktio

● Potenssifunktio

● Potenssifunktio

$y = x^{-1}$

● Potenssifunktio

$y = f(x)^{-1}$

● Eksponenttifunktio

● **Trigonometriset
funktio**

Integroimismenetelmiä

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

Esimerkki. Olkoon $f''(x) = \cos x$, $f(0) = 1$, $f(\frac{\pi}{2}) = 2$. Määritä
funktio f .

Trigonometriset funktiot

Osa I: Integraalifunktion
määritelmä

Osa II:
Integroimissääntöjä

● Polynomifunktio

● Potenssifunktio

● Potenssifunktio

$y = x^{-1}$

● Potenssifunktio

$y = f(x)^{-1}$

● Eksponenttifunktio

● **Trigonometriset
funktio**

Integroimismenetelmiä

$$D \sin f(x) =$$

Trigonometriset funktiot

Osa I: Integraalifunktion
määritelmä

Osa II:
Integroimissääntöjä

● Polynomifunktio

● Potenssifunktio

● Potenssifunktio

$y = x^{-1}$

● Potenssifunktio

$y = f(x)^{-1}$

● Eksponenttifunktio

● **Trigonometriset
funktio**

Integroimismenetelmiä

$$D \sin f(x) = f'(x) \cos f(x)$$

$$D \cos f(x) =$$

Trigonometriset funktiot

Osa I: Integraalifunktion
määritelmä

Osa II:
Integroimissääntöjä

● Polynomifunktio

● Potenssifunktio

● Potenssifunktio

$y = x^{-1}$

● Potenssifunktio

$y = f(x)^{-1}$

● Eksponenttifunktio

● **Trigonometriset
funktio**

Integroimismenetelmiä

$$D \sin f(x) = f'(x) \cos f(x)$$

$$D \cos f(x) = -f'(x) \sin f(x)$$

Trigonometriset funktiot

Osa I: Integraalifunktion
määritelmä

Osa II:
Integroimissääntöjä

● Polynomifunktio

● Potenssifunktio

● Potenssifunktio

$y = x^{-1}$

● Potenssifunktio

$y = f(x)^{-1}$

● Eksponenttifunktio

● **Trigonometriset
funktio**

Integroimismenetelmiä

$$D \sin f(x) = f'(x) \cos f(x)$$

$$D \cos f(x) = -f'(x) \sin f(x)$$

$$\int f'(x) \cos f(x) dx = \sin f(x) + c$$

Trigonometriset funktiot

Osa I: Integraalifunktion
määritelmä

Osa II:
Integroimissääntöjä

● Polynomifunktio

● Potenssifunktio

● Potenssifunktio

$y = x^{-1}$

● Potenssifunktio

$y = f(x)^{-1}$

● Eksponenttifunktio

● **Trigonometriset
funktio**

Integroimismenetelmiä

$$D \sin f(x) = f'(x) \cos f(x)$$

$$D \cos f(x) = -f'(x) \sin f(x)$$

$$\int f'(x) \cos f(x) dx = \sin f(x) + c$$

$$\int f'(x) \sin f(x) dx = -\cos f(x) + c$$

Trigonometriset funktiot

Osa I: Integraalifunktion
määritelmä

Osa II:
Integroimissääntöjä

● Polynomifunktio

● Potenssifunktio

● Potenssifunktio

$y = x^{-1}$

● Potenssifunktio

$y = f(x)^{-1}$

● Eksponenttifunktio

● **Trigonometriset
funktiot**

Integroimismenetelmiä

$$D \sin f(x) = f'(x) \cos f(x)$$

$$D \cos f(x) = -f'(x) \sin f(x)$$

$$\int f'(x) \cos f(x) dx = \sin f(x) + c$$

$$\int f'(x) \sin f(x) dx = -\cos f(x) + c$$

1. $\int \cos \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) dx$

Trigonometriset funktiot

Osa I: Integraalifunktion
määritelmä

Osa II:
Integroimissääntöjä

● Polynomifunktio

● Potenssifunktio

● Potenssifunktio

$y = x^{-1}$

● Potenssifunktio

$y = f(x)^{-1}$

● Eksponenttifunktio

● **Trigonometriset
funktio**

Integroimismenetelmiä

$$D \sin f(x) = f'(x) \cos f(x)$$

$$D \cos f(x) = -f'(x) \sin f(x)$$

$$\int f'(x) \cos f(x) dx = \sin f(x) + c$$

$$\int f'(x) \sin f(x) dx = -\cos f(x) + c$$

1. $\int \cos \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) dx$
2. $\int \cos^2 x \sin x dx$

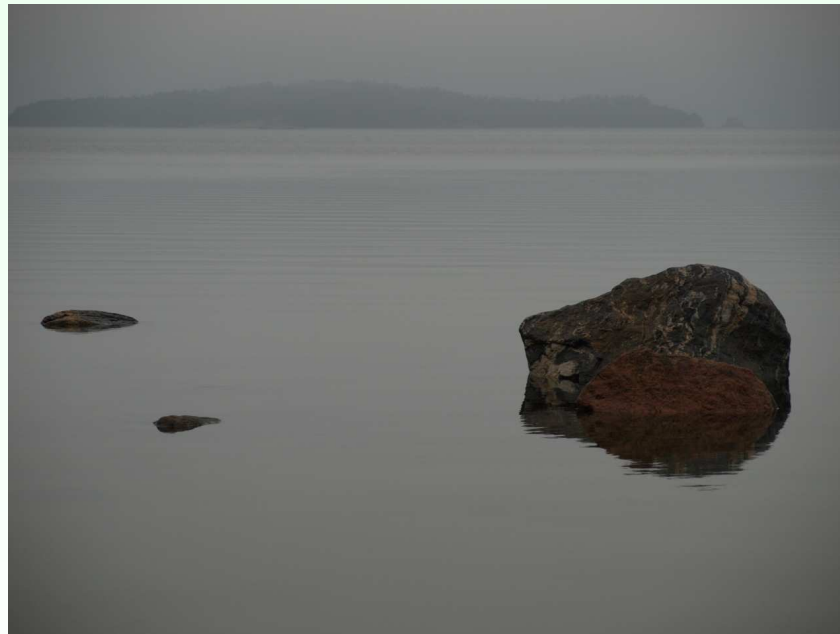
Osa I: Integraalifunktion
määritelmä

Osa II:
Integroimissääntöjä

Integroimismenetelmiä

- Paloittain määritelty funktio
- Osittaisintegrointi
- Osittaisintegrointiesimerkkejä

Integroimismenetelmiä



Paloittain määritelty funktio

Osa I: Integraalifunktion
määritelmä

Osa II:
Integroimissääntöjä

Integroimismenetelmiä

- **Paloittain määritelty funktio**
- Osittaisintegrointi
- Osittaisintegrointiesimerkkejä

1. Jatkuvalla funktiolla on integraalifunktio.

Paloittain määritelty funktio

Osa I: Integraalifunktion
määritelmä

Osa II:
Integroimissääntöjä

Integroimismenetelmiä

- **Paloittain määritelty funktio**
- Osittaisintegrointi
- Osittaisintegrointiesimerkkejä

1. Jatkuvilla funktiolla on integraalifunktio.
2. Integraalifunktio on derivoituva ja siten myös aina jatkuva.

Paloittain määritelty funktio

Osa I: Integraalifunktion
määritelmä

Osa II:
Integroimissääntöjä

Integroimismenetelmiä

● **Paloittain määritelty
funktio**

● Osittaisintegrointi

● Osittaisintegrointiesi-
merkkejä

1. Jatkuvilla funktiolla on integraalifunktio.
2. Integraalifunktio on derivoituva ja siten myös aina jatkuva.

Esimerkki. Määritä funktion $f(x) = |x - 2|$ se integraalifunktio F ,
jolle on voimassa $F(3) = 1$.

Paloittain määritelty funktio

Osa I: Integraalifunktion
määritelmä

Osa II:
Integroimissääntöjä

Integroimismenetelmiä

● **Paloittain määritelty
funktio**

● Osittaisintegrointi

● Osittaisintegrointiesi-
merkkejä

1. Jatkuvilla funktiolla on integraalifunktio.
2. Integraalifunktio on derivoituva ja siten myös aina jatkuva.

Esimerkki. Määritä funktion $f(x) = |x - 2|$ se integraalifunktio F ,
jolle on voimassa $F(3) = 1$.

f on itseisarvofunktiona jatkuva ja siten integraalif. on olemassa.

Osittaisintegrointi

$$D(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Osittaisintegrointi

$$D(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx$$

Osittaisintegrointi

$$D(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx$$

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

Esimerkki.

$$\int x \sin x dx$$

Osittaisintegrointi

$$D(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx$$

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

Esimerkki.

$$\int x \sin x dx$$

Osittaisintegrointi

$$D(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx$$

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

Esimerkki.

$$\int \boxed{x} \boxed{\sin x} dx$$

$$g(x) = x$$

$$f'(x) = \sin x$$

Osittaisintegrointi

$$D(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx$$

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

Esimerkki.

$$\int x \sin x dx$$

$$g(x) = x$$

$$g'(x) = 1$$

$$f'(x) = \sin x$$

$$f(x) = -\cos x$$

Osittaisintegrointi

$$D(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx$$

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

Esimerkki.

$$\int x \sin x dx = x(-\cos x) - \int 1(-\cos x)dx$$

$$g(x) = x$$

$$g'(x) = 1$$

$$f'(x) = \sin x$$

$$f(x) = -\cos x$$

Osittaisintegrointi

$$D(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx$$

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

Esimerkki 1.

$$\int \boxed{x} \boxed{\sin x} dx = x(-\cos x) - \int 1(-\cos x)dx = -x \cos x + \sin x + c$$

$$g(x) = x$$

$$g'(x) = 1$$

$$f'(x) = \sin x$$

$$f(x) = -\cos x$$

Osittaisintegrointiesimerkkejä

Osa I: Integraalifunktion
määritelmä

Osa II:
Integroimissääntöjä

Integroimismenetelmiä

- Paloittain määritelty funktio
- Osittaisintegrointi
- **Osittaisintegrointiesimerkkejä**

1. $\int 2xe^{-x} dx$

2. $\int \ln x dx$