

# Integraalifunktio

Hannu Lehto  
Lahden Lyseon lukio

<b>Osa I: Integraalifunktion määritelmä</b>	<b>2</b>
Esimerkki . . . . .	3
Integraalifunktio . . . . .	4
<b>Osa II: Integroimissääntöjä</b>	<b>6</b>
Polynomifunktio . . . . .	7
Potenssifunktio . . . . .	8
Potenssifunktio $y = x^{-1}$ . . . . .	11
Potenssifunktio $y = f(x)^{-1}$ . . . . .	12
Eksponenttifunktio . . . . .	14
Trigonometriset funktiot . . . . .	17
<b>Integroimismenetelmiä</b>	<b>19</b>
Paloittain määritelty funktio . . . . .	20
Osittaisintegrointi . . . . .	21
Osittaisintegrointiesimerkkejä . . . . .	22

**Esimerkki**

**Esimerkki.** Minkä funktion  $f$  derivaatta on  $f'(x) = 3x^2$ ?

$$f(x) = x^3 + c \quad (c \in \mathbb{R}).$$



3 / 22

**Integraalifunktio**

**Määritelmä 1.** Olkoon funktio  $f$  määritelty välillä  $I$ . Funktio  $F$  on funktion  $f$  *integraalifunktio*, jos

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in I.$$

**Esimerkki 1.** Onko funktio  $f(x) = \frac{1}{8}x^4 + \frac{5}{2}x^2 + 3x - 1$  funktion  $g(x) = \frac{1}{2}x^3 + 5x + 3$  integraalifunktio?

**Esimerkki 2.** Onko funktio  $f(x) = \sin 2x + \sin^2 x$  funktion  $g(x) = 2 \cos 2x + \sin 2x$  integraalifunktio?

4 / 22

**Integraalifunktio**

**Lause 1.** Jos  $F$  on eräs funktion  $f$  integraalifunktio, niin  $f$ :n kaikki integraalifunktiot ovat muotoa  $F(x) + c$ ,  $c \in \mathbb{R}$ . Vakio  $c$  on *integroimisvakio*.

**Esimerkki 1.** Määritä funktion  $f(x) = 2x - 1$  kaikki integraalifunktiot.

$$\int (2x - 1) dx = x^2 - x + c$$

**Esimerkki 2.** Määritä funktion  $f(x) = e^{3x}$  se integraalifunktio  $F$ , joka kulkee pisteen  $(0,2)$  kautta

$$\begin{aligned} F(x) &= \int e^{3x} dx = \frac{1}{3}e^{3x} + c \\ F(0) &= \frac{1}{3}e^0 + c = \frac{1}{3} + c = 2 \Rightarrow c = 1\frac{2}{3} \\ F(x) &= \frac{1}{3}e^{3x} + 1\frac{2}{3} \end{aligned}$$

5 / 22

**Polynomifunktio**

1.  $\int cf(x)dx = c \int f(x)dx, c \in \mathbb{R}$
2.  $\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
3.  $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c, n \in \mathbb{N}$

**Esimerkki.**  $\int (5x^3 - \frac{x^2}{2} + x - 1)dx = \frac{5}{4}x^4 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x + c$

7 / 22

**Potenssifunktio**

$$\int x^a dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + c, \quad a \neq -1, \quad a \in \mathbb{R}$$

**Esimerkki 1.**  $\int \frac{5}{x^2} dx$

**Esimerkki 2.**  $\int x\sqrt{x} dx$

8 / 22

**Potenssifunktio**

$$Df(x)^{a+1} = (a+1)f'(x)f(x)^a$$

$$\frac{1}{a+1}Df(x)^{a+1} = f'(x)f(x)^a$$

$$D\left(\frac{1}{a+1}f(x)^{a+1}\right) = f'(x)f(x)^a$$

Tästä saadaan integroimissääntö

$$\int \boxed{f'(x)} \boxed{f(x)^a} dx = \frac{1}{a+1}f(x)^{a+1} + c, \quad a \neq -1$$

sisäfunktion derivaatta

yhdistetty funktio

9 / 22

### Esimerkkejä

1.  $\int 3(3x - 1)^5 dx = \frac{1}{6}(3x - 1)^6 + c$
2.  $\int (5x - 3)^4 dx = \frac{1}{5} \int 5(5x - 3)^4 dx = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5}(5x - 3)^5 + c$
3.  $\int \frac{3}{(4x - 1)^2} dx$
4.  $\int \frac{1}{\sqrt{2x + 1}} dx$
5.  $\int x(2 + x^2)^2 dx$
6.  $\int (2 + x^2)^2 dx$

10 / 22

### Potenssifunktio $y = x^{-1}$

$$\int \frac{1}{x} dx = \int x^{-1} dx = \ln |x| + c, \quad (x \neq 0)^a$$

**Esimerkki.**  $\int \frac{4}{x} dx = 4 \int \frac{1}{x} dx = 4 \ln |x| + c$

11 / 22

<sup>a</sup>Voimassa väleillä, joihin  $x = 0$  ei kuulu. Katso tarkemmin MT10 s. 11–12

### Potenssifunktio $y = f(x)^{-1}$

$$D \ln |f(x)| = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

Tästä saadaan integroimissääntö

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int f'(x) f(x)^{-1} dx = \ln |f(x)| + c, \quad (f(x) \neq 0)^a$$

sisäfunktion derivaatta

yhdistetty funktio

12 / 22

<sup>a</sup>Voimassa väleillä, joihin funktion  $f(x)$  nollakohdat eivät kuulu.

### Esimerkkejä

$$1. \int \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \ln|x^2+1| + c = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + c, \quad x^2+1 > 0$$

$$2. \int \frac{x^2+x-3}{2x} dx = \frac{1}{2} \int \left( \frac{x^2}{x} + \frac{x}{x} - \frac{3}{x} \right) dx = \frac{1}{2} \int \left( x+1 - \frac{3}{x} \right) dx = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \ln|x| + c, \quad (x \neq 0)$$

13 / 22

### Eksponenttifunktio

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$1. \int \frac{e^x}{\sqrt{e^x+2}} dx$$

$$2. \int \frac{e^x}{3e^x+1} dx$$

14 / 22

### Eksponenttifunktio

$$De^{f(x)} = f'(x)e^{f(x)}$$

$$\int f'(x)e^{f(x)} dx = e^{f(x)} + c$$

$$1. \int e^{-x} dx$$

$$2. \int \frac{e^x + e^{-x}}{e^x} dx$$

15 / 22

### ★ Eksponenttifunktio

$$\int a^x dx = \int (e^{\ln a})^x dx$$

$$= \int e^{x \ln a} dx$$

$$= \frac{1}{\ln a} \int \ln a e^{x \ln a} dx$$

$$= \frac{1}{\ln a} e^{x \ln a} + c$$

$$= \frac{1}{\ln a} a^x + c, \quad (a > 0, a \neq 1)$$

16 / 22

## Trigonometriset funktiot

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

**Esimerkki.** Olkoon  $f''(x) = \cos x$ ,  $f(0) = 1$ ,  $f(\frac{\pi}{2}) = 2$ . Määritä funktio  $f$ .

17 / 22

## Trigonometriset funktiot

$$D \sin f(x) = f'(x) \cos f(x)$$

$$D \cos f(x) = -f'(x) \sin f(x)$$

$$\int f'(x) \cos f(x) dx = \sin f(x) + c$$

$$\int f'(x) \sin f(x) dx = -\cos f(x) + c$$

1.  $\int \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) dx$

2.  $\int \cos^2 x \sin x dx$

18 / 22

## Integroimismenetelmiä

19 / 22

### Paloittain määritelty funktio

1. Jatkuvalla funktiolla on integraalifunktio.
2. Integraalifunktio on derivoituva ja siten myös aina jatkuva.

**Esimerkki.** Määritä funktion  $f(x) = |x - 2|$  se integraalifunktio  $F$ , jolle on voimassa  $F(3) = 1$ .

$f$  on itseisarvofunktiona jatkuva ja siten integraalif. on olemassa.

20 / 22

## Osittaisintegrointi

$$D(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx$$

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

### Esimerkki 1.

$$\int x \sin x dx = x(-\cos x) - \int 1(-\cos x)dx = -x \cos x + \sin x + c$$

$$g(x) = x$$

$$g'(x) = 1$$

$$f'(x) = \sin x$$

$$f(x) = -\cos x$$

21 / 22

## Osittaisintegrointiesimerkkejä

1.  $\int 2xe^{-x} dx$

2.  $\int \ln x dx$

22 / 22