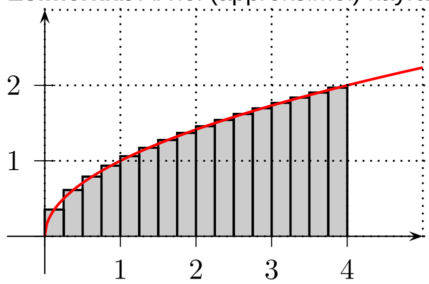
Määrätty integraali

Hannu Lehto
Lahden Lyseon lukio

Esimerkki

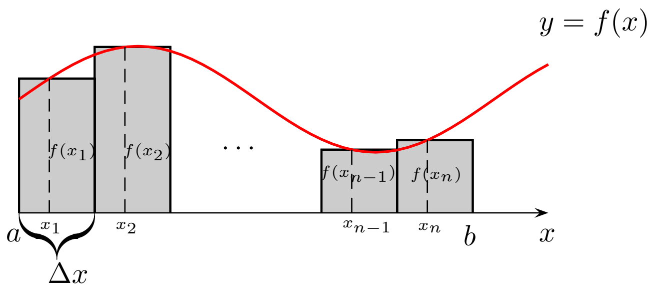
Esimerkki. Arvioi (approksimoi) käyrän $y = \sqrt{x}$, x-akselin ja suoran $x = 4$ rajoittaman pinnan ala.



Porrassummat (jakovälien lukumäärä on n)

n	S_n
4	5,384
8	5,352
16	5,340
$\downarrow$	$\downarrow$
∞	Pinta-ala

Porrassumma yli välin $[a, b]$



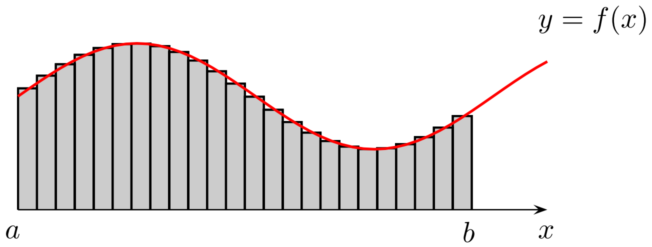
- Funktio f on määritelty välillä $[a, b]$.
- Väli jaetaan n:ään yhtä pitkään osaan, jolloin $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$.
- $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n$ ovat vastaavien jakovälien pisteitä.
- *Porrassumma* on

$$\begin{aligned} S_n &= f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \ldots + f(x_{n-1})\Delta x + f(x_n)\Delta x \\ &= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x \end{aligned}$$

.

Pinta-ala

Olkoon funktio f on jatkuva ja epänegatiivinen välillä $[a, b]$.



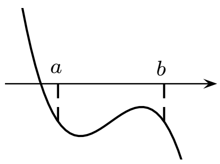
Silloin kuvassa olevan pinnan ala on porrassummien raja-arvo, kun jakovälien lukumäärä n lähestyy ääretöntä, ts.
$A = lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x.$

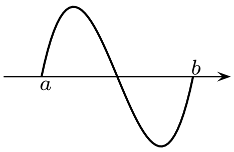
Osa II: Määrätty integraali

Määritelmä

Määritelmä 1. Olkoon funktio f jatkuva välillä $[a, b]$. Funktion f *määrätty integraali* $\int_a^b f(x)dx$ välillä $[a, b]$ on porrassumman raja-arvo, kun jakovälien lukumäärä lähestyy ääretöntä.

Mitä voidaan päätellä integraalista $\int_a^b f(x)dx$ seuraavissa tapauksissa?



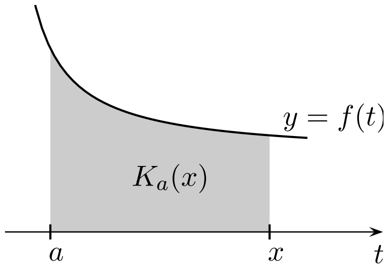


Kertymäfunktio

Olkoon f jatkuva. Funktio

$$K_a(x) = \int_a^x f(t)dt, \text{ missä } a \text{ on vakio ja } x > a,$$

on *kertymäfunktio* kohdassa a. Lisäksi $K_a(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$



Kertymäfunktion derivaatta

Lause 1.

$$K'_a(x) = D \int_a^x f(t)dt = f(x)$$

Todistus. Katso oppikirjasta MT10 s.59–60. □

Kertymäfunktio $K_a(x)$ on siis eräs funktion $f(x)$ integraalifunktio.

Määrätyn integraalin ja integraalifunktion yhteys

Lause 2. [a] *Olkoon $F(x)$ jokin välillä $[a, b]$ määritellyn jatkuvan funktion $f(x)$ integraalifunktio. Silloin on*

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).}$$

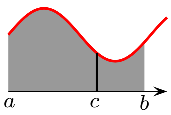
Todistus. $K_a(x) = F(x) + c$
Koska $K_a(a) = 0$,niin $F(a) + c = 0$,joten $-F(a) = c$.
$K_a(b) = F(b) + c$, joten $\int_a^b f(x)dx = K_a(b) = F(b) - F(a)$. □

Merkintä: $\int_a^b f(x)dx = \Big/_a^b F(x) \;= F(b) - F(a)$

[a] Lauseet 1 ja 2 muodostavat analyysin peruslauseen. Siitä saa lisätietoa esimerkiksi Solmu-lehden artikkelista.

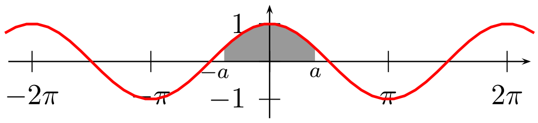
Määrätyn integraalin ominaisuuksia

1. $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$ (vakion siirtosääntö)
2. $\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
3. $\int_a^a f(x)dx = 0$
4. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
5. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ (paloittain integrointi)



Määrätyn integraalin ominaisuuksia

6. Jos f on parillinen, ts. $f(-x) = f(x)$,

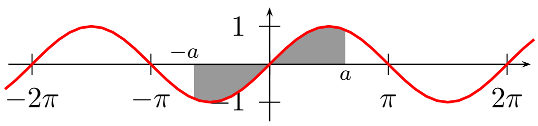


Kuva 1: Funktio $y = cosx$ on esimerkki parillisesta funktiosta

niin $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx.$

Määrätyn integraalin ominaisuuksia

7. Jos f on pariton, ts. $f(-x) = -f(x)$,



Kuva 2: Funktio $y = sinx$ on esimerkki parittomasta funktiosta

niin $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$

Määrätyn integraalin ominaisuuksia

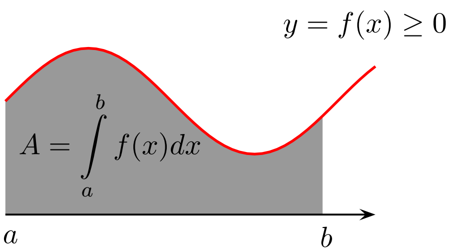
8. Osittaisintegrointi

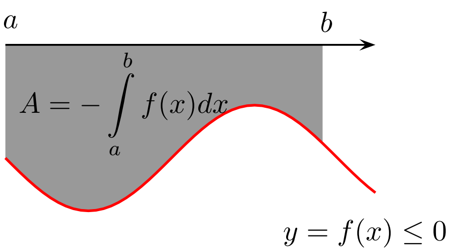
$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = \Big/_{\!a}^{\,b} f(x)g(x) - \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

Esimerkki. $\displaystyle\int_0^1 xe^x dx$

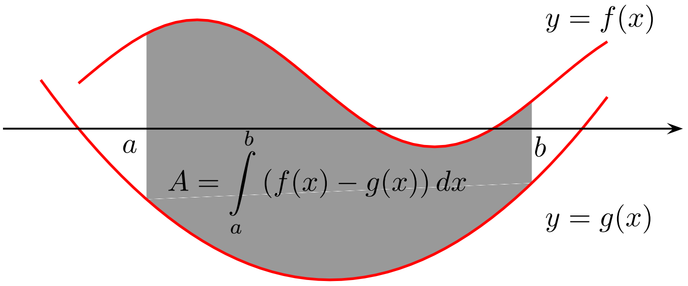
Osa III: Pinta-aloja

Käyrän ja x-akselin välinen ala

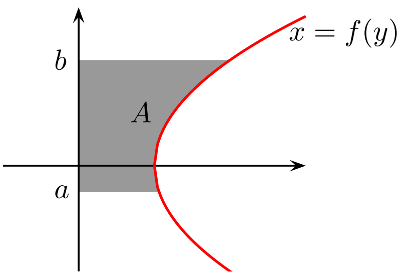




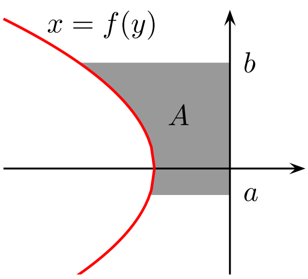
Kahden käyrän välinen ala



Käyrän ja y-akselin välinen ala



$$A = \int_a^b f(y)dy$$



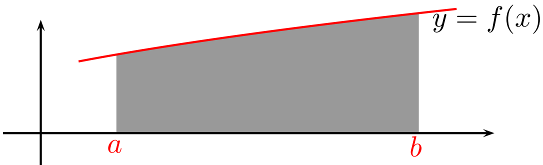
$$A = -\int_a^b f(y)dy$$

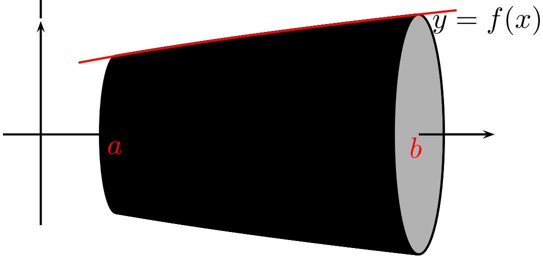
Esimerkki

Laske käyrän $y = x^3$, y-akselin ja suoran $y = 2$ rajoittaman pinnan ala.

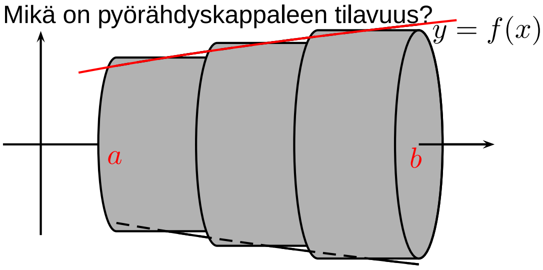
Pyörähdysakselina x-akseli

Funktio f on jatkuva välillä $[a, b]$. Alue pyörähtää *x-akselin* ympäri.

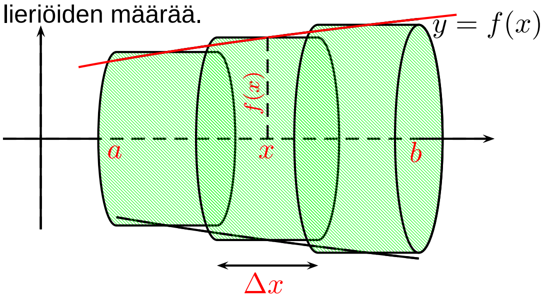




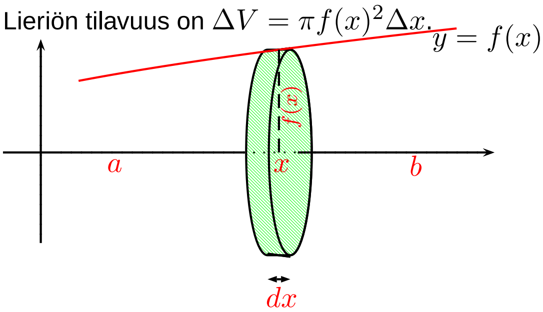
Mikä on pyörähdyskappaleen tilavuus?



Tilavuuden likiarvo on suorien ympyräpohjaisten lieriöiden tilavuuksien summa. Likiarvo paranee lisäämällä lieriöiden määrää.



Lieriön tilavuus on $\Delta V = \pi f(x)^2 \Delta x$.

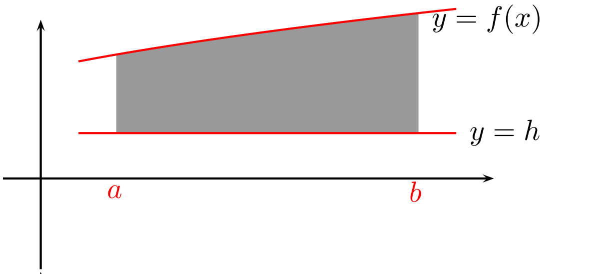


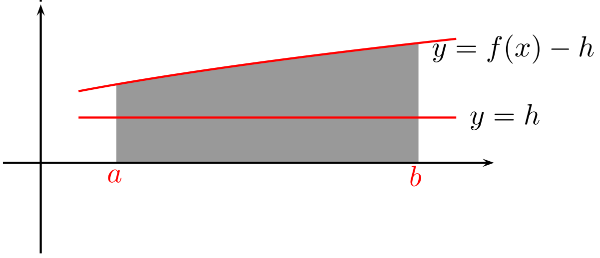
Kun $\Delta x \to 0$, saadaan ”äärettömän pieni” pituusalkio dx ja tätä vastaava ”äärettömän pieni” tilavuusalkio $dV = \pi f(x)^2 dx$. Laskemalla yhteen ”äärettömän monta äärettömän pientä” tilavuusalkiota väliltä $[a, b]$ saadaan pyörähdyskappaleen tilavuus

$$\boxed{V = \int_a^b dV = \pi \int_a^b f(x)^2 dx}$$

Pyörähdysakselina suora $y = h$

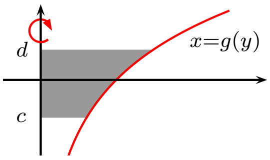
Funktio f on jatkuva välillä $[a, b]$. Alue pyörähtää *suoran $y = h$* ympäri.





$$V = \pi \int_a^b (f(x) - h)^2 \, dx$$

Pyörähdysakselina y-akseli



$$V = \pi \int_c^d g(y)^2 dy$$

Esimerkki. Käyrän $y = \sqrt{x}$ ja suorien $y = 2$ ja $x = 0$ rajaama alue pyörähtää y-akselin ympäri. Laske tilavuus.