Predikaattilogiikka

Hannu Lehto
Lahden Lyseon lukio

Predikaatti

Esimerkki 1.

- 6-4=2 on suljettu lause eli propositio. Se on joko tosi tai epätosi
- x-4=2 on *avoin lause eli predikaatti*. Sen totuusarvo riippuu muuttujasta x.

Predikaattilogiikan ilmaisuvoima on suurempi kuin lauselogiikan. Erityisesti predikaattilogiikalla voidaan kuvata objektien ominaisuuksia ja objektien välisiä suhteita.

Esimerkki 2. Määritellään yksipaikkainen predikaatti O(x)="x on opettaja" ja kaksipaikkainen predikaatti M(x,y)=" x opettaa oppiainetta y".

- O(Lehto) on tosi eli Lehdolla on ominaisuus O.
- M(Lehto,matematiikka) on tosi.
- O(Lehto)$\wedge$ M(Lehto, ruotsi) on epätosi

2 / 7

Predikaatit ja konnektiivit

Predikaateista ja loogisista konnektiiveista ($\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$) voidaan muodostaa uusia predikaatteja.

Esimerkki 3. Olkoon O(x)="x on opettaja", N(x)="x on nainen"

1. O(x)$\wedge$ N(x) ="x on opettaja ja nainen" eli ratkaisujoukkona on opettajien joukon ja naisten joukon leikkaus $\cap$.
2. O(x)$\vee$ N(x) = " x on opettaja tai nainen" eli ratkaisujoukkona on opettajien joukon ja naisten joukon unioni $\cup$.
3. $\neg N(x)$= "x on mies" eli ratkaisujoukkona on naisten joukon komplementti.

3 / 7

Kaikkikvanttori eli universaalikvanttori

Jos jokainen predikaatin P(x) määrittelyjoukon X alkio toteuttaa predikaatin, niin merkitään:

$$\forall x \in X : P(x).$$

Vaihtoehtoiset merkintätavat: $P(x), \forall x \in X$ tai lyhyemmin $\forall x P(x)$.

Esimerkki 4. Olkoon P(x)="x:llä on parta", J(x)="x on joulupukki". Selitä seuraavat predikaatit:

- $\forall x\, (J(x) \Rightarrow P(x))$
- $\neg \forall x\, (P(x) \Rightarrow J(x))$
- $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$

4 / 7

Olemassaolokvanttori eli eksistenssikvanttori

Jos on olemassa (ainakin yksi) predikaatin P(x) määrittelyjoukon alkio, joka toteuttaa predikaatin, niin merkitään:

$$\exists x \in X : P(x).$$

Lyhyempi merkintätapa $\exists x P(x)$.

Esimerkki 5. Olkoon Y(x,y)="x on y:n ystävä". Selitä seuraavat predikaatit:

- $\forall x \exists y Y(x, y)$
- $\exists x \forall y \neg Y(x, y)$
- $\exists x \in \mathbb{Z} : x^2 + x - 2 = 0$

5 / 7

Negaation siirto kvanttorin ohi

Esimerkki 6. Miten seuraavat lauseet voidaan ilmaista toisin?

1. ”Eivät kaikki joulupukit asu korvatunturilla.”
   ”On olemassa joulupukki, joka ei asu Korvatunturilla.”
2. ”Ei ole olemassa epärehellistä joulupukkia.”
   ”Kaikki joulupukit ovat rehellisiä.”

Lause. Olkoon $P(x)$ predikaatti, jonka määrittelyjoukko on X. Silloin lauseet

1. $\neg\forall x \in X : P(x) \Leftrightarrow \exists x \in X : \neg P(x)$
2. $\neg\exists x \in X : P(x) \Leftrightarrow \forall x \in X : \neg P(x)$

ovat tosia.

6 / 7

Päättely

Esimerkki 7. Formalisoidaan seuraava päättely predikaattilogiikan kielelle.

1. Kaikki autot ruostuvat.
2. Lada on auto.
3. Siis Lada ruostuu.

Olkoon A(x)=”x on auto”, R(x)=”x ruostuu”.

$$\begin{array}{l} \forall x\,(A(x) \quad \Rightarrow R(x)) \\ A(Lada) \\ \hline R(Lada) \end{array}$$

Kuva 1: Päättely esitettynä logiikan merkintätavalla

$$\begin{array}{rl} \forall x & \in A : R(x) \\ Lada & \in A \\ \hline R(Lada) & \end{array}$$

Kuva 2: Päättely esitettynä matematiikan merkintätavalla. Kuvassa A on autojen joukko.

7 / 7