

Lauselogiikka

Tautologia

Hannu Lehto



Tautologia

Sisältö

- Tautologia
- Esimerkki 1
- Esimerkki 2
- Joitakin tautologioita
- Esimerkkejä

Annetuista lauseista loogisilla konnektiiveillä saatu yhdistetty lause on on **tautologia**(pätevä), jos se on aina tosi — siis riippumatta annettujen lauseiden totuusarvoista.

Tautologia

Sisältö

- Tautologia
- Esimerkki 1
- Esimerkki 2
- Joitakin tautologioita
- Esimerkkejä

Annetuista lauseista loogisilla konnektiiveillä saatu yhdistetty lause on on **tautologia**(pätevä), jos se on aina tosi — siis riippumatta annettujen lauseiden totuusarvoista.

Tautologiaa voidaan tutkia totuustauluilla. Onko esimerkiksi lause $a \vee b \Rightarrow a$ tautologia eli pätevä?

Tautologia

Sisältö

- Tautologia
- Esimerkki 1
- Esimerkki 2
- Joitakin tautologioita
- Esimerkkejä

Annetuista lauseista loogisilla konnektiiveillä saatu yhdistetty lause on on **tautologia** (pätevä), jos se on aina tosi — siis riippumatta annettujen lauseiden totuusarvoista.

Tautologiaa voidaan tutkia totuustauluilla. Onko esimerkiksi lause $a \vee b \Rightarrow a$ tautologia eli pätevä?

a	b	$a \vee b$	$a \vee b \Rightarrow a$
0	0		
0	1		
1	0		
1	1		

Tautologia

Sisältö

- Tautologia
- Esimerkki 1
- Esimerkki 2
- Joitakin tautologioita
- Esimerkkejä

Annetuista lauseista loogisilla konnektiiveillä saatu yhdistetty lause on on **tautologia** (pätevä), jos se on aina tosi — siis riippumatta annettujen lauseiden totuusarvoista.

Tautologiaa voidaan tutkia totuustauluilla. Onko esimerkiksi lause $a \vee b \Rightarrow a$ tautologia eli pätevä?

a	b	$a \vee b$	$a \vee b \Rightarrow a$
0	0	0	
0	1	1	
1	0	1	
1	1	1	

Tautologia

Sisältö

- Tautologia
- Esimerkki 1
- Esimerkki 2
- Joitakin tautologioita
- Esimerkkejä

Annetuista lauseista loogisilla konnektiiveillä saatu yhdistetty lause on on **tautologia** (pätevä), jos se on aina tosi — siis riippumatta annettujen lauseiden totuusarvoista.

Tautologiaa voidaan tutkia totuustauluilla. Onko esimerkiksi lause $a \vee b \Rightarrow a$ tautologia eli pätevä?

a	b	$a \vee b$	$a \vee b \Rightarrow a$
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	1
1	1	1	1

Tautologia

Sisältö

- Tautologia
- Esimerkki 1
- Esimerkki 2
- Joitakin tautologioita
- Esimerkkejä

Annetuista lauseista loogisilla konnektiiveillä saatu yhdistetty lause on on **tautologia** (pätevä), jos se on aina tosi — siis riippumatta annettujen lauseiden totuusarvoista.

Tautologiaa voidaan tutkia totuustauluilla. Onko esimerkiksi lause $a \vee b \Rightarrow a$ tautologia eli pätevä?

a	b	$a \vee b$	$a \vee b \Rightarrow a$
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	1
1	1	1	1

Lause ei ole tautologia.

Sisältö

- Tautologia
- **Esimerkki 1**
- Esimerkki 2
- Joitakin tautologioita
- Esimerkkejä

Esimerkki 1

Kirjoita lauselogiikan kielellä seuraavat väitteet:

1. Jos on aamu, niin olen väsynyt.
2. Ei ole totta, että on aamu ja en ole väsynyt.

Sisältö

- Tautologia
- **Esimerkki 1**
- Esimerkki 2
- Joitakin tautologioita
- Esimerkkejä

Esimerkki 1

Kirjoita lauselogiikan kielellä seuraavat väitteet:

1. Jos on aamu, niin olen väsynyt.
2. Ei ole totta, että on aamu ja en ole väsynyt.

Olkoon $p =$ on aamu ja $q =$ olen väsynyt.

Sisältö

- Tautologia
- **Esimerkki 1**
- Esimerkki 2
- Joitakin tautologioita
- Esimerkkejä

Esimerkki 1

Kirjoita lauselogiikan kielellä seuraavat väitteet:

1. Jos on aamu, niin olen väsynyt.
2. Ei ole totta, että on aamu ja en ole väsynyt.

Olkoon $p =$ on aamu ja $q =$ olen väsynyt.

1. $p \Rightarrow q$

Sisältö

- Tautologia
- **Esimerkki 1**
- Esimerkki 2
- Joitakin tautologioita
- Esimerkkejä

Esimerkki 1

Kirjoita lauselogiikan kielellä seuraavat väitteet:

1. Jos on aamu, niin olen väsynyt.
2. Ei ole totta, että on aamu ja en ole väsynyt.

Olkoon $p =$ on aamu ja $q =$ olen väsynyt.

1. $p \Rightarrow q$
2. $\neg (p \wedge \neg q)$

Sisältö

- Tautologia
- **Esimerkki 1**
- Esimerkki 2
- Joitakin tautologioita
- Esimerkkejä

Esimerkki 1

Kirjoita lauselogiikan kielellä seuraavat väitteet:

1. Jos on aamu, niin olen väsynyt.
2. Ei ole totta, että on aamu ja en ole väsynyt.

Olkoon $p =$ on aamu ja $q =$ olen väsynyt.

1. $p \Rightarrow q$
2. $\neg(p \wedge \neg q)$

Ovatko väitteet **1.** ja **2.** yhtäpitäviä, ts. onko lause $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)$ tautologia?

Esimerkki 1

Sisältö

- Tautologia
- **Esimerkki 1**
- Esimerkki 2
- Joitakin tautologioita
- Esimerkkejä

Kirjoita lauselogiikan kielellä seuraavat väitteet:

1. Jos on aamu, niin olen väsynyt.
2. Ei ole totta, että on aamu ja en ole väsynyt.

Olkoon $p =$ on aamu ja $q =$ olen väsynyt.

1. $p \Rightarrow q$
2. $\neg(p \wedge \neg q)$

Ovatko väitteet **1.** ja **2.** yhtäpitäviä, ts. onko lause $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)$ tautologia?

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$\neg(p \wedge \neg q)$
0	0				
0	1				
1	0				
1	1				

Esimerkki 1

Sisältö

- Tautologia
- **Esimerkki 1**
- Esimerkki 2
- Joitakin tautologioita
- Esimerkkejä

Kirjoita lauselogiikan kielellä seuraavat väitteet:

1. Jos on aamu, niin olen väsynyt.
2. Ei ole totta, että on aamu ja en ole väsynyt.

Olkoon $p =$ on aamu ja $q =$ olen väsynyt.

1. $p \Rightarrow q$
2. $\neg(p \wedge \neg q)$

Ovatko väitteet **1.** ja **2.** yhtäpitäviä, ts. onko lause $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)$ tautologia?

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$\neg(p \wedge \neg q)$
0	0	1	1	0	1
0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0
1	1	1	0	0	1

Esimerkki 1

Sisältö

- Tautologia
- **Esimerkki 1**
- Esimerkki 2
- Joitakin tautologioita
- Esimerkkejä

Kirjoita lauselogiikan kielellä seuraavat väitteet:

1. Jos on aamu, niin olen väsynyt.
2. Ei ole totta, että on aamu ja en ole väsynyt.


Olkoon $p =$ on aamu ja $q =$ olen väsynyt.

1. $p \Rightarrow q$
2. $\neg(p \wedge \neg q)$

Ovatko väitteet **1.** ja **2.** yhtäpitäviä, ts. onko lause $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)$ tautologia?

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$\neg(p \wedge \neg q)$
0	0	1	1	0	1
0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0
1	1	1	0	0	1

samat
ovat yhtäpitäviä



Esimerkki 2

Osoita, että lause $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$ on tautologia.

Sisältö

- Tautologia
- Esimerkki 1
- **Esimerkki 2**
- Joitakin tautologioita
- Esimerkkejä

Joitakin tautologioita

1. $\neg(p \wedge \neg p)$ poissuljetun ristiriidan laki

Sisältö

- Tautologia
- Esimerkki 1
- Esimerkki 2
- Joitakin tautologioita
- Esimerkkejä

Joitakin tautologioita

Sisältö

- Tautologia
- Esimerkki 1
- Esimerkki 2
- Joitakin tautologioita
- Esimerkkejä

1. $\neg (p \wedge \neg p)$

poissuljetun ristiriidan laki

2. $p \vee \neg p$

poissuljetun kolmannen laki

Joitakin tautologioita

Sisältö

- Tautologia
- Esimerkki 1
- Esimerkki 2
- Joitakin tautologioita
- Esimerkkejä

1. $\neg(p \wedge \neg p)$ poissuljetun ristiriidan laki
2. $p \vee \neg p$ poissuljetun kolmannen laki
3. $\neg\neg p \Leftrightarrow p$ kaksoisnegaation laki

Joitakin tautologioita

Sisältö

- Tautologia
- Esimerkki 1
- Esimerkki 2
- Joitakin tautologioita
- Esimerkkejä

1. $\neg (p \wedge \neg p)$ poissuljetun ristiriidan laki
2. $p \vee \neg p$ poissuljetun kolmannen laki
3. $\neg \neg p \Leftrightarrow p$ kaksoisnegaation laki
4. $p \wedge p \Leftrightarrow p$

Joitakin tautologioita

Sisältö

- Tautologia
- Esimerkki 1
- Esimerkki 2
- Joitakin tautologioita
- Esimerkkejä

1. $\neg (p \wedge \neg p)$ poissuljetun ristiriidan laki
2. $p \vee \neg p$ poissuljetun kolmannen laki
3. $\neg\neg p \Leftrightarrow p$ kaksoisnegaation laki
4. $p \wedge p \Leftrightarrow p$
5. $p \vee p \Leftrightarrow p$

Joitakin tautologioita

Sisältö

- Tautologia
- Esimerkki 1
- Esimerkki 2
- Joitakin tautologioita
- Esimerkkejä

1. $\neg (p \wedge \neg p)$ poissuljetun ristiriidan laki
2. $p \vee \neg p$ poissuljetun kolmannen laki
3. $\neg \neg p \Leftrightarrow p$ kaksoisnegaation laki
4. $p \wedge p \Leftrightarrow p$
5. $p \vee p \Leftrightarrow p$
6. $\neg (p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$ de Morgan

Joitakin tautologioita

Sisältö

- Tautologia
- Esimerkki 1
- Esimerkki 2
- Joitakin tautologioita
- Esimerkkejä

1. $\neg (p \wedge \neg p)$ poissuljetun ristiriidan laki

2. $p \vee \neg p$ poissuljetun kolmannen laki

3. $\neg \neg p \Leftrightarrow p$ kaksoisnegaation laki

4. $p \wedge p \Leftrightarrow p$

5. $p \vee p \Leftrightarrow p$

6. $\neg (p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$ de Morgan

7. $\neg (p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$ de Morgan

Joitakin tautologioita

Sisältö

- Tautologia
- Esimerkki 1
- Esimerkki 2
- Joitakin tautologioita
- Esimerkkejä

1. $\neg (p \wedge \neg p)$ poissuljetun ristiriidan laki
2. $p \vee \neg p$ poissuljetun kolmannen laki
3. $\neg \neg p \Leftrightarrow p$ kaksoisnegaation laki
4. $p \wedge p \Leftrightarrow p$
5. $p \vee p \Leftrightarrow p$
6. $\neg (p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$ de Morgan
7. $\neg (p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$ de Morgan
8. $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \neg p \vee q$ implikaation ominaisuus

Joitakin tautologioita

Sisältö

- Tautologia
- Esimerkki 1
- Esimerkki 2
- Joitakin tautologioita
- Esimerkkejä

1. $\neg (p \wedge \neg p)$ poissuljetun ristiriidan laki
2. $p \vee \neg p$ poissuljetun kolmannen laki
3. $\neg \neg p \Leftrightarrow p$ kaksoisnegaation laki
4. $p \wedge p \Leftrightarrow p$
5. $p \vee p \Leftrightarrow p$
6. $\neg (p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$ de Morgan
7. $\neg (p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$ de Morgan
8. $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \neg p \vee q$ implikaation ominaisuus
9. vaihdantalait

Joitakin tautologioita

Sisältö

- Tautologia
- Esimerkki 1
- Esimerkki 2
- Joitakin tautologioita
- Esimerkkejä

1. $\neg (p \wedge \neg p)$ poissuljetun ristiriidan laki
2. $p \vee \neg p$ poissuljetun kolmannen laki
3. $\neg \neg p \Leftrightarrow p$ kaksoisnegaation laki
4. $p \wedge p \Leftrightarrow p$
5. $p \vee p \Leftrightarrow p$
6. $\neg (p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$ de Morgan
7. $\neg (p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$ de Morgan
8. $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \neg p \vee q$ implikaation ominaisuus
9. vaihdantalait
10. liitäntälait

Joitakin tautologioita

Sisältö

- Tautologia
- Esimerkki 1
- Esimerkki 2
- Joitakin tautologioita
- Esimerkkejä

1. $\neg(p \wedge \neg p)$

poissuljetun ristiriidan laki

2. $p \vee \neg p$

poissuljetun kolmannen laki

3. $\neg\neg p \Leftrightarrow p$

kaksoisnegaation laki

4. $p \wedge p \Leftrightarrow p$

5. $p \vee p \Leftrightarrow p$

6. $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$

de Morgan

7. $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$

de Morgan

8. $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \neg p \vee q$

implikaation ominaisuus

9. vaihdantalait

10. liitöntälait

11. osittelulait

Esimerkkejä

Sisältö

- Tautologia
- Esimerkki 1
- Esimerkki 2
- Joitakin tautologioita
- **Esimerkkejä**

Esimerkki 1. Osoita käyttämättä totuustauluja, että lauseet

$$\neg a \wedge (b \vee c) \text{ ja } \neg (a \vee (\neg b \wedge \neg c))$$

ovat yhtäpitäviä eli ekvivalentteja, ts. että lause

$$\neg a \wedge (b \vee c) \Leftrightarrow \neg (a \vee (\neg b \wedge \neg c))$$

on tautologia eli pätevä.

Esimerkkejä

Sisältö

- Tautologia
- Esimerkki 1
- Esimerkki 2
- Joitakin tautologioita
- **Esimerkkejä**

Esimerkki 1. Osoita käyttämättä totuustauluja, että lauseet

$$\neg a \wedge (b \vee c) \text{ ja } \neg (a \vee (\neg b \wedge \neg c))$$

ovat yhtäpitäviä eli ekvivalentteja, ts. että lause

$$\neg a \wedge (b \vee c) \Leftrightarrow \neg (a \vee (\neg b \wedge \neg c))$$

on tautologia eli pätevä.

Esimerkki 2. Sievennä lause $\neg (p \vee q \Rightarrow \neg p \wedge \neg q)$.