Tautologia

Hannu Lehto
Lahden Lyseon lukio

Tautologia

Annetuista lauseista loogisilla konnektiiveillä saatu yhdistetty lause on on tautologia(pätevä), jos se on aina tosi — siis riippumatta annettujen lauseiden totuusarvoista.

Tautologiaa voidaan tutkia totuustauluilla. Onko esimerkiksi lause $a \vee b \Rightarrow a$ tautologia eli pätevä?

a	b	$a \vee b$	$a \vee b \Rightarrow a$
0	0		
0	1		
1	0		
1	1		

a	b	$a \vee b$	$a \vee b \Rightarrow a$
0	0	0	
0	1	1	
1	0	1	
1	1	1	

a	b	$a \vee b$	$a \vee b \Rightarrow a$
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	1
1	1	1	1

a	b	$a \vee b$	$a \vee b \Rightarrow a$
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	1
1	1	1	1

Lause ei ole tautologia.

2 / 6

Esimerkki 1

Kirjoita lauselogiikan kielellä seuraavat väitteet:

1. Jos on aamu, niin olen väsynyt.
2. Ei ole totta, että on aamu ja en ole väsynyt.

Olkoon p = on aamu ja q = olen väsynyt.

1. $p \Rightarrow q$
2. $\neg(p \wedge \neg q)$

Ovatko väitteet **1.** ja **2.** yhtäpitäviä, ts. onko lause $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)$ tautologia?

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$\neg(p \wedge \neg q)$
0	0				
0	1				
1	0				
1	1				

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$\neg(p \wedge \neg q)$
0	0	1	1	0	1
0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0
1	1	1	0	0	1

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$\neg(p \wedge \neg q)$
0	0	1	1	0	1
0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0
1	1	1	0	0	1

samat

ovat yhtäpitäviä

3 / 6

Esimerkki 2

Osoita, että lause $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$ on tautologia.

4 / 6

Joitakin tautologioita

1. $\neg(p \wedge \neg p)$ poissuljetun ristiriidan laki
2. $p \vee \neg p$ poissuljetun kolmannen laki
3. $\neg\neg p \Leftrightarrow p$ kaksoisnegaation laki
4. $p \wedge p \Leftrightarrow p$
5. $p \vee p \Leftrightarrow p$
6. $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$ de Morgan
7. $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$ de Morgan
8. $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \neg p \vee q$ implikaation ominaisuus
9. vaihdantalait
10. liitäntälait
11. osittelulait

Esimerkkejä

Esimerkki 1. Osoita käyttämättä totuustauluja, että lauseet

$$\neg a \wedge (b \vee c) \text{ ja } \neg(a \vee (\neg b \wedge \neg c))$$

ovat yhtäpitäviä eli ekvivalentteja, ts. että lause

$$\neg a \wedge (b \vee c) \Leftrightarrow \neg(a \vee (\neg b \wedge \neg c))$$

on tautologia eli pätevä.

Esimerkki 2. Sievennä lause $\neg(p \vee q \Rightarrow \neg p \wedge \neg q)$.