Diofantoksen yhtälö

Hannu Lehto
Lahden Lyseon lukio

Lause 1

Diofantoksen yhtälö on muotoa $ax + by = c$, missä $a, b, c \in \mathbb{Z}$ ja $x, y \in \mathbb{Z}$.
Lause 1. Olkoon $syt(a, b) = 1$ ja olkoon Diofantoksen yhtälön eräs ratkaisu x_0, y_0. Silloin yhtälön yleinen ratkaisu on

$$x = x_0 + tb, \quad y = y_0 - ta, \quad t \in \mathbb{Z}$$

Todistus.
1) Osoitetaan, että $x = x_0 + tb, \quad y = y_0 - ta$ on ratkaisu.

2) Osoitetaan, että kaikki ratkaisut ovat muotoa $x = x_0 + tb, \quad y = y_0 - ta.$

■

Lause 2

Lause 2. Diofantoksen yhtälöllä $ax + by = c$ on ratkaisu, joss $d = syt(a, b)$ on vakion c tekijä.
Todistus.
'$\Rightarrow$'

'$\Leftarrow$'

■

Diofantoksen yhtälön ratkaiseminen

Diofantoksen yhtälö on muotoa $ax + by = c$, missä kertoimet $a, b, c \in \mathbb{Z}$ ja ratkaisuiksi kelpuutetaan vain kokonaisluvut.

1. Etsi $d = syt(a, b)$.

2a. Jos $d \mid c$,niin jaa yhtälö $ax + by = c$ puolittain d:llä, jolloin saadaan yhtälö $mx + ny = p$.
3a. Etsi yhtälön $mx + ny = 1$ yksittäisratkaisu $x = x_0$, $y = y_0$.
4a. Muodosta yhtälön $mx + ny = p$ yksittäisratkaisu $x = p \cdot x_0$, $y = p \cdot y_0$.
5a. Muodosta alkuperäisen yhtälön $ax+by = c$ yleinen ratkaisu $x = p \cdot x_0 + n \cdot t$, $y = p \cdot y_0 - m \cdot t$.

2b. Jos $d \nmid c$,niin yhtälöllä $ax + by = c$ ei ole kokonaislukuratkaisuja.

Esimerkki 1

Ratkaise Diofantoksen yhtälö $36x + 28y = 8$.

Syt(36,28)=4. Koska 4 on luvun 8 tekijä, niin yhtälöllä on ratkaisuja.
Jaetaan yhtälö puolittain luvulla 4, jolloin saadaan $9x + 7y = 2$.
Etsitään yhtälölle $9x + 7y = 1$ yksittäisratkaisu Eukleideen algoritmilla:

a	b	Jakoyhtälö
9	7	9=1·7 + 2
7	2	7=3·2 + 1
2	1	2=2·1 + 0
1	0	

Täten on syt(9,7)=1.
Syt(a,b) voidaan myös esittää muodossa $xa + yb$, missä $x, y \in \mathbb{Z}$.
syt(9, 7)=1 = 7-3·2= -3·(9-1·7)+1·7= 4·7–3·9
Täten yhtälön $9x + 7y = 1$ yksittäisratkaisu on $x = -3$, $y = 4$.

Esimerkki 1

Yhtälön $9x + 7y = 2$ yksittäisratkaisu on siis $x = -6$, $y = 8$
Alkuperäisen yhtälön $36x + 28y = 8$ yleinen ratkaisu on
$\boxed{x = -6 + 7t, y = 8 - 9t, t \in \mathbb{Z}}$.

Esimerkki 2

Kauppias myy nestemäistä ihmerohtoa. Hänellä on käytössään vain 25 ml ja 36 ml mitta-astiat.

1. Voiko kauppias mitata minkä tilavuuden tahansa?
2. Kauppias myy 30 ml ihmerohtoa? Miten mittaus tapahtuu?

Olkoon tilavuus c. Mittaus onnistuu, jos Diofantoksen yhtälöllä $36x + 25y = c$ on ratkaisu.Koska $syt(36, 25) = 1$, niin ratkaisu on olemassa kaikilla c:n arvoilla.

Esimerkki 2

Ratkaistaan Diofantoksen yhtälö $36x + 25y = 30$.
Etsitään yhtälölle $36x + 25y = 1$ yksittäisratkaisu Eukleideen algoritmilla:

a	b	Jakoyht$\ddot{a}l\ddot{o}$
36	25	36=1·25 + 11
25	11	25=2·11 + 3
11	3	11=3·3 + 2
3	2	3=1·2 + 1
2	1	2=2·1 + 0
1	0	

Täten on syt(36,25)=1.
Syt(a,b) voidaan myös esittää muodossa $xa + yb$, missä $x, y \in \mathbb{Z}$.
syt(36, 25)=1 = 3-1·2= -1·(11-3·3)+1·3= 4·3–1·11
= 4·(25-2·11)–1·11= -9·11+4·25
= -9·(36-1·25)+4·25= 13·25–9·36
Täten yhtälön $36x + 25y = 1$ yksittäisratkaisu on $x = -9$, $y = 13$.

10 / 11

Esimerkki 2

Yhtälön $36x + 25y = 30$ yksittäisratkaisu on siis $x = 30 \cdot (-9)$, $y = 30 \cdot 13$ eli $x = -270$, $y = 390$.
Yleinen ratkaisu on $x = -270 + 25t$, $y = 390 - 36t$.
Valitsemalla $t = 11$ saadaan $x = 5$ ja $y = -6$, joten kauppias mittaa ensin 5 isoa mittaa ja ottaa sitten pois 6 pientä mittaa.

11 / 11