Eukleideen algoritmi

Hannu Lehto
Lahden Lyseon lukio

Suurin yhteinen tekijä

Esimerkki. Määritä lukujen 300 ja 105 suurin yhteinen tekijä $syt(300, 105)$ (greatest common divisor gcd).

Yksinkertaisin — mutta ei tehokkain — tapa on jakaa luvut alkutekijöihin ja muodostaa yhteisten tekijöiden tulo.
$300 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$
$105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$
Täten on $syt(300, 105) = 3 \cdot 5 = 15.$

2 / 8

Pienin yhteinen jaettava

Lukujen a ja b pienin yhteinen jaettava on pienin positiivinen luku, joka on jaollinen sekä a:lla että b:llä.

Esimerkki. Määritä lukujen 300 ja 105 pienin yhteinen jaettava $pyj(300, 105)$ eli pienin yhteinen monikerta $pym(300, 105)$ (least common multiple lcm).

Eräs keino on jakaa luvut alkutekijöihin ja muodostaa tulo, jossa on jokaista alkutekijää niin monta kuin sitä on siinä luvussa, jossa sitä on eniten.
$300 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$
$105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$
Täten on $pyj(300, 105) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 = 2100.$

3 / 8

Syt:n ja pyj:n tulo

Lause. Olkoon a ja b positiivisia kokonaislukuja. Silloin on

$$ab = syt(a, b) \cdot pyj(a, b)$$

Todistus.

■

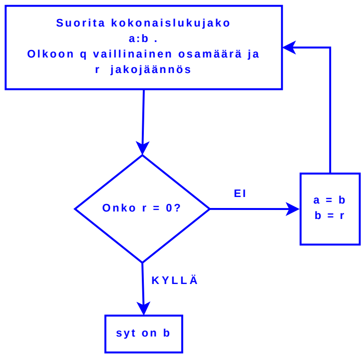
Syt:n laskemiseksi esitetään myöhemmin tehokas Eukleideen algoritmi. Pyj on siksi usein näppärä laskea kaavalla

$$pyj(a, b) = \frac{ab}{syt(a, b)}.$$

4 / 8

Eukleideen algoritmi

Kahden positiivisen kokonaisluvun a ja b (a >b) suurin yhteinen tekijä syt(a,b) voidaan määrittää seuraavasti:



Esimerkki 1

Määritä Eukleideen algoritmilla syt(2805,546).

a	b	Jakoyhtälö
2805	546	2805=5·546 + 75
546	75	546=7·75 + 21
75	21	75=3·21 + 12
21	12	21=1·12 + 9
12	9	12=1·9 + 3
9	3	9=3·3 + 0
3	0	

Täten on syt(2805,546)=3.

Syt(a,b) voidaan myös esittää muodossa $xa + yb$, missä $x, y \in \mathbb{Z}$.

syt(2805, 546)=3 = 12-1·9= -1·(21-1·12)+1·12= 2·12–1·21

= 2·(75-3·21)–1·21= -7·21+2·75

= -7·(546-7·75)+2·75= 51·75–7·546

= 51·(2805-5·546)–7·546= -262·546+51·2805

Esimerkki 2

Määritä Eukleideen algoritmilla syt(256,96). Esitä lisäksi syt muodossa 256x+96y.

a	b	Jakoyhtälö
256	96	256=2·96 + 64
96	64	96=1·64 + 32
64	32	64=2·32 + 0
32	0	

Täten on syt(256,96)=32.

Syt(a,b) voidaan myös esittää muodossa $xa + yb$, missä $x, y \in \mathbb{Z}$.

syt(256, 96)=32 = 96-1·64= -1·(256-2·96)+1·96= 3·96–1·256

Eukleideen algoritmi ohjelmoituna TI-laskimille

```
ClrHome
Disp "syt(A,B)"
Disp "A>B"
Input "A=",A
Input "B=",B
A→C
B→D
round((A/B-int(A/B))*B)→R
While R≠0
B→A
R→B
round((A/B-int(A/B))*B)→R
End
ClrHome
Output(1,1,"Lukujen")
Output(2,1,C)
Output(3,1,D)
Output(4,1,"syt on")
Output(4,8,B)
```

Laskimissa on yleensä valmiit rutiinit syt:n (gcd=greatest common divisor) ja pym:n (lcm=least common multiple) laskemista varten.

8 / 8