

# Jakoyhtälö ja lukujärjestelmät

Hannu Lehto  
Lahden Lyseon lukio



# Jakoyhtälö

- Jakoyhtälö
- Lukujärjestelmät
- Muunto  
10-järjestelmään
- Muunto  
10-järjestelmästä

**Lause.** Jos  $a \geq 0$  ja  $b > 0$  sekä  $a, b \in \mathbb{Z}$ , niin on olemassa sellaiset *yksikäsitteiset* kokonaisluvut  $q$  ja  $r$ , että

$$a = qb + r, \quad 0 \leq r < b$$

Tässä  $q$  on (vaillinainen) osamäärä ja  $b$  on jakojäännös.

## Jakoyhtälö

- **Jakoyhtälö**

- Lukujärjestelmät

- Muunto

- 10-järjestelmään

- Muunto

- 10-järjestelmästä

**Lause.** Jos  $a \geq 0$  ja  $b > 0$  sekä  $a, b \in \mathbb{Z}$ , niin on olemassa sellaiset *yksikäsitteiset* kokonaisluvut  $q$  ja  $r$ , että

$$a = qb + r, \quad 0 \leq r < b$$

Tässä  $q$  on (vaillinainen) osamäärä ja  $b$  on jakojäännös.

★ **Todistus.**

1) *Olemassaolo.*

Joukossa  $\{a - kb \mid k \in \mathbb{Z}\}$  on pienin ei-negatiivinen kokonaisluku.

## Jakoyhtälö

- Jakoyhtälö

- Lukujärjestelmät

- Muunto

- 10-järjestelmään

- Muunto

- 10-järjestelmästä

**Lause.** Jos  $a \geq 0$  ja  $b > 0$  sekä  $a, b \in \mathbb{Z}$ , niin on olemassa sellaiset *yksikäsitteiset* kokonaisluvut  $q$  ja  $r$ , että

$$a = qb + r, \quad 0 \leq r < b$$

Tässä  $q$  on (vaillinainen) osamäärä ja  $b$  on jakojäännös.

★ **Todistus.**

1) *Olemassaolo.*

Joukossa  $\{a - kb \mid k \in \mathbb{Z}\}$  on pienin ei-negatiivinen kokonaisluku. Olkoon se  $r = a - qb$ . Nyt on  $r < b$ , koska

## Jakoyhtälö

- Jakoyhtälö

- Lukujärjestelmät

- Muunto

- 10-järjestelmään

- Muunto

- 10-järjestelmästä

**Lause.** Jos  $a \geq 0$  ja  $b > 0$  sekä  $a, b \in \mathbb{Z}$ , niin on olemassa sellaiset *yksikäsitteiset* kokonaisluvut  $q$  ja  $r$ , että

$$a = qb + r, \quad 0 \leq r < b$$

Tässä  $q$  on (vaillinainen) osamäärä ja  $b$  on jakojäännös.

★ **Todistus.**

1) *Olemassaolo.*

Joukossa  $\{a - kb \mid k \in \mathbb{Z}\}$  on pienin ei-negatiivinen kokonaisluku. Olkoon se  $r = a - qb$ . Nyt on  $r < b$ , koska muuten  $r - b = a - qb - b = a - (q + 1)b$  olisi r:ää pienempi ↯.

## Jakoyhtälö

- Jakoyhtälö

- Lukujärjestelmät

- Muunto

- 10-järjestelmään

- Muunto

- 10-järjestelmästä

**Lause.** Jos  $a \geq 0$  ja  $b > 0$  sekä  $a, b \in \mathbb{Z}$ , niin on olemassa sellaiset *yksikäsitteiset* kokonaisluvut  $q$  ja  $r$ , että

$$a = qb + r, \quad 0 \leq r < b$$

Tässä  $q$  on (vaillinainen) osamäärä ja  $b$  on jakojäännös.

★ **Todistus.**

1) *Olemassaolo.*

Joukossa  $\{a - kb \mid k \in \mathbb{Z}\}$  on pienin ei-negatiivinen kokonaisluku. Olkoon se  $r = a - qb$ . Nyt on  $r < b$ , koska muuten  $r - b = a - qb - b = a - (q + 1)b$  olisi r:ää pienempi ⚡. Täten on  $a = qb + r$ .

## Jakoyhtälö — todistus jatkuu

- Jakoyhtälö
- Lukujärjestelmät
- Muunto  
10-järjestelmään
- Muunto  
10-järjestelmästä

2) *Yksikäsitteisyys.*

Olkoon

$$a = qb + r = q'b + r' \quad \text{ja} \quad q' > q. \quad (1)$$

## Jakoyhtälö — todistus jatkuu

- Jakoyhtälö
- Lukujärjestelmät
- Muunto
- 10-järjestelmään
- Muunto
- 10-järjestelmästä

2) *Yksikäsitteisyys.*

Olkoon

$$a = qb + r = q'b + r' \quad \text{ja} \quad q' > q. \quad (1)$$

Tällöin on  $r - r' = (q' - q)b \geq b$ .



## Jakoyhtälö — todistus jatkuu

- Jakoyhtälö
- Lukujärjestelmät
- Muunto
- 10-järjestelmään
- Muunto
- 10-järjestelmästä

2) *Yksikäsitteisyys.*

Olkoon

$$a = qb + r = q'b + r' \quad \text{ja} \quad q' > q. \quad (1)$$

Tällöin on  $r - r' = (q' - q)b \geq b$ . Koska  $0 \leq r, r' < b$ ,

## Jakoyhtälö — todistus jatkuu

- Jakoyhtälö

- Lukujärjestelmät

- Muunto

- 10-järjestelmään

- Muunto

- 10-järjestelmästä

2) *Yksikäsitteisyys.*

Olkoon

$$a = qb + r = q'b + r' \quad \text{ja} \quad q' > q. \quad (1)$$

Tällöin on  $r - r' = (q' - q)b \geq b$ . Koska  $0 \leq r, r' < b$ , niin  $r - r' < b \nmid$ .

## Jakoyhtälö — todistus jatkuu

- Jakoyhtälö

- Lukujärjestelmät

- Muunto

- 10-järjestelmään

- Muunto

- 10-järjestelmästä

2) Yksikäsitteisyys.

Olkoon

$$a = qb + r = q'b + r' \quad \text{ja} \quad q' > q. \quad (1)$$

Tällöin on  $r - r' = (q' - q)b \geq b$ . Koska  $0 \leq r, r' < b$ , niin  $r - r' < b$   $\nmid$ . Nyt ainoa mahdollisuus on, että  $q = q'$ , koska jos olisi  $q' < q$ , niin jouduttaisiin vastaavasti ristiriitaan tarkastelemalla yhtälöä  $r' - r = (q - q')b$ .

## Jakoyhtälö — todistus jatkuu

- Jakoyhtälö

- Lukujärjestelmät

- Muunto

- 10-järjestelmään

- Muunto

- 10-järjestelmästä

2) Yksikäsitteisyys.

Olkoon

$$a = qb + r = q'b + r' \quad \text{ja} \quad q' > q. \quad (1)$$

Tällöin on  $r - r' = (q' - q)b \geq b$ . Koska  $0 \leq r, r' < b$ , niin  $r - r' < b$   $\nmid$ . Nyt ainoa mahdollisuus on, että  $q = q'$ , koska jos olisi  $q' < q$ , niin jouduttaisiin vastaavasti ristiriitaan tarkastelemalla yhtälöä  $r' - r = (q - q')b$ . Nyt myös (1):n mukaan  $r = r'$ .



## Jakoyhtälö — todistus jatkuu

- Jakoyhtälö

- Lukujärjestelmät

- Muunto

- 10-järjestelmään

- Muunto

- 10-järjestelmästä

### 2) Yksikäsitteisyys.

Olkoon

$$a = qb + r = q'b + r' \quad \text{ja} \quad q' > q. \quad (1)$$

Tällöin on  $r - r' = (q' - q)b \geq b$ . Koska  $0 \leq r, r' < b$ , niin  $r - r' < b$   $\nmid$ . Nyt ainoa mahdollisuus on, että  $q = q'$ , koska jos olisi  $q' < q$ , niin jouduttaisiin vastaavasti ristiriitaan tarkastelemalla yhtälöä  $r' - r = (q - q')b$ . Nyt myös (1):n mukaan  $r = r'$ .



**Esimerkki.**  $31 = 4 \cdot 7 + 3$

# Lukujärjestelmät

- Jakoyhtälö
- **Lukujärjestelmät**
- Muunto  
10-järjestelmään
- Muunto  
10-järjestelmästä

Nykyisin käytössä olevat lukujärjestelmät ovat **paikkajärjestelmiä**.  
Yleisimmät kantaluvut ovat 10, 2, 8 ja 16.

# Lukujärjestelmät

- Jakoyhtälö
- **Lukujärjestelmät**
- Muunto  
10-järjestelmään
- Muunto  
10-järjestelmästä

Nykyisin käytössä olevat lukujärjestelmät ovat **paikkajärjestelmiä**.

Yleisimmät kantaluvut ovat 10, 2, 8 ja 16.

Esimerkiksi 10-järjestelmässä

$$54906 = 5 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0$$

# Lukujärjestelmät

- Jakoyhtälö
- **Lukujärjestelmät**
- Muunto  
10-järjestelmään
- Muunto  
10-järjestelmästä

Nykyisin käytössä olevat lukujärjestelmät ovat **paikkajärjestelmiä**.

Yleisimmät kantaluvut ovat 10, 2, 8 ja 16.

Esimerkiksi 10-järjestelmässä

$$54906 = 5 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0$$

**Binäärijärjestelmässä** kantaluku on 2 ja numerosymboleina vain bitit 0 ja 1.



## Lukujärjestelmät

- Jakoyhtälö
- **Lukujärjestelmät**
- Muunto  
10-järjestelmään
- Muunto  
10-järjestelmästä

Nykyisin käytössä olevat lukujärjestelmät ovat **paikkajärjestelmiä**.

Yleisimmät kantaluvut ovat 10, 2, 8 ja 16.

Esimerkiksi 10-järjestelmässä

$$54906 = 5 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0$$

**Binäärijärjestelmässä** kantaluku on 2 ja numerosymboleina vain bitit 0 ja 1.

**Oktaalijärjestelmässä** kantalukuna on 8 ja numerosymboleina 0,1,...,7.

# Lukujärjestelmät

- Jakoyhtälö
- **Lukujärjestelmät**
- Muunto  
10-järjestelmään
- Muunto  
10-järjestelmästä

Nykyisin käytössä olevat lukujärjestelmät ovat **paikkajärjestelmiä**.

Yleisimmät kantaluvut ovat 10, 2, 8 ja 16.

Esimerkiksi 10-järjestelmässä

$$54906 = 5 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0$$

**Binäärijärjestelmässä** kantaluku on 2 ja numerosymboleina vain bitit 0 ja 1.

**Oktaalijärjestelmässä** kantalukuna on 8 ja numerosymboleina 0,1,...,7.

**Heksadesimaalijärjestelmässä** kantalukuna on 16 ja numerosymboleina 0,1,...,9, A, B, C, D, E, F.

# Muunto 10-järjestelmään

- Jakoyhtälö
- Lukujärjestelmät
- **Muunto**  
10-järjestelmään
- Muunto  
10-järjestelmästä

$$101101_2 =$$

## Muunto 10-järjestelmään

- Jakoyhtälö
- Lukujärjestelmät
- **Muunto**  
10-järjestelmään
- Muunto  
10-järjestelmästä

$$101101_2 = 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$

## Muunto 10-järjestelmään

- Jakoyhtälö
- Lukujärjestelmät
- **Muunto**  
10-järjestelmään
- Muunto  
10-järjestelmästä

$$\begin{aligned}101101_2 &= 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \\ &= 1 \cdot 32 + 1 \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 1\end{aligned}$$

## Muunto 10-järjestelmään

- Jakoyhtälö
- Lukujärjestelmät
- **Muunto**  
10-järjestelmään
- Muunto  
10-järjestelmästä

$$\begin{aligned}101101_2 &= 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \\ &= 1 \cdot 32 + 1 \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 1 \\ &= 45_{10}\end{aligned}$$

## Muunto 10-järjestelmään

- Jakoyhtälö
- Lukujärjestelmät
- **Muunto**  
10-järjestelmään
- Muunto  
10-järjestelmästä

$$\begin{aligned}101101_2 &= 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \\ &= 1 \cdot 32 + 1 \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 1 \\ &= 45_{10} \\ 7DA9_{16} &= \end{aligned}$$

## Muunto 10-järjestelmään

- Jakoyhtälö
- Lukujärjestelmät
- **Muunto**  
10-järjestelmään
- Muunto  
10-järjestelmästä

$$\begin{aligned}101101_2 &= 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \\ &= 1 \cdot 32 + 1 \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 1 \\ &= 45_{10} \\ 7DA9_{16} &= 7 \cdot 16^3 + 13 \cdot 16^2 + 10 \cdot 16^1 + 9 \cdot 16^0\end{aligned}$$



## Muunto 10-järjestelmään

- Jakoyhtälö
- Lukujärjestelmät
- **Muunto**  
10-järjestelmään
- Muunto  
10-järjestelmästä

$$\begin{aligned}101101_2 &= 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \\ &= 1 \cdot 32 + 1 \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 1 \\ &= 45_{10} \\ 7DA9_{16} &= 7 \cdot 16^3 + 13 \cdot 16^2 + 10 \cdot 16^1 + 9 \cdot 16^0 \\ &= 7 \cdot 4096 + 13 \cdot 256 + 10 \cdot 16 + 9\end{aligned}$$

## Muunto 10-järjestelmään

- Jakoyhtälö
- Lukujärjestelmät
- **Muunto**  
10-järjestelmään
- Muunto  
10-järjestelmästä

$$\begin{aligned}101101_2 &= 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \\ &= 1 \cdot 32 + 1 \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 1 \\ &= 45_{10} \\ 7DA9_{16} &= 7 \cdot 16^3 + 13 \cdot 16^2 + 10 \cdot 16^1 + 9 \cdot 16^0 \\ &= 7 \cdot 4096 + 13 \cdot 256 + 10 \cdot 16 + 9 \\ &= 32169_{10}\end{aligned}$$

## Muunto 10-järjestelmästä

- Jakoyhtälö
- Lukujärjestelmät
- Muunto 10-järjestelmään
- **Muunto 10-järjestelmästä**

10-järjestelmän luku muutetaan  $b$ -järjestelmään jakamalla kantaluvulla  $b$ . Jakojäännöksistä muodostuu vastaava  $b$ -järjestelmän luku.

**Esimerkki 1.** Muuta 10-järjestelmän luku 29 binääriluvuksi.

## Muunto 10-järjestelmästä

- Jakoyhtälö
- Lukujärjestelmät
- Muunto 10-järjestelmään
- **Muunto 10-järjestelmästä**

10-järjestelmän luku muutetaan b-järjestelmään jakamalla kantaluvulla b. Jakojäännöksistä muodostuu vastaava b-järjestelmän luku.

**Esimerkki 1.** Muuta 10-järjestelmän luku 29 binääriluvuksi.

$$29 = 2 \cdot 14 + 1$$

$$14 = 2 \cdot 7 + 0$$

$$7 = 2 \cdot 3 + 1$$

$$3 = 2 \cdot 1 + 1$$

$$1 = 2 \cdot 0 + 1$$



## Muunto 10-järjestelmästä

- Jakoyhtälö
- Lukujärjestelmät
- Muunto 10-järjestelmään
- **Muunto 10-järjestelmästä**

10-järjestelmän luku muutetaan b-järjestelmään jakamalla kantaluvulla b. Jakojäännöksistä muodostuu vastaava b-järjestelmän luku.

**Esimerkki 1.** Muuta 10-järjestelmän luku 29 binääriluvuksi.

$$29 = 2 \cdot 14 + 1$$

$$14 = 2 \cdot 7 + 0$$

$$7 = 2 \cdot 3 + 1$$

$$3 = 2 \cdot 1 + 1$$

$$1 = 2 \cdot 0 + 1$$



$$29_{10} = 11101_2$$

# Muunto 10-järjestelmästä


- Jakoyhtälö
- Lukujärjestelmät
- Muunto  
10-järjestelmään
- Muunto  
10-järjestelmästä

**Esimerkki 2.** Muuta 10-järjestelmän luku 1475  
heksadesimaaliluvuksi.

## Muunto 10-järjestelmästä

- Jakoyhtälö
- Lukujärjestelmät
- Muunto 10-järjestelmään
- Muunto 10-järjestelmästä


**Esimerkki 2.** Muuta 10-järjestelmän luku 1475 heksadesimaaliluvuksi.

$$\begin{aligned} 1475 &= 16 \cdot 92 + 3 \\ 92 &= 16 \cdot 5 + 12 \\ 5 &= 16 \cdot 0 + 5 \end{aligned}$$


## Muunto 10-järjestelmästä

- Jakoyhtälö
- Lukujärjestelmät
- Muunto 10-järjestelmään
- Muunto 10-järjestelmästä

**Esimerkki 2.** Muuta 10-järjestelmän luku 1475 heksadesimaaliluvuksi.

$$\begin{aligned}1475 &= 16 \cdot 92 + 3 \\92 &= 16 \cdot 5 + 12 \\5 &= 16 \cdot 0 + 5\end{aligned}$$


$$1475_{10} = 5C3_{16}$$