

Jakoyhtälö ja lukujärjestelmät

Hannu Lehto
Lahden Lyseon lukio

Jakoyhtälö	2
Lukujärjestelmät	4
Muunto 10-järjestelmään	5
Muunto 10-järjestelmästä	6

Jakoyhtälö

Lause. Jos $a \geq 0$ ja $b > 0$ sekä $a, b \in \mathbb{Z}$, niin on olemassa sellaiset *yksikäsitteiset* kokonaisluvut q ja r , että

$$a = qb + r, \quad 0 \leq r < b$$

Tässä q on (vaillinainen) osamäärä ja b on jakojäännös.

★ **Todistus.**

1) *Olemassaolo.*

Joukossa $\{a - kb \mid k \in \mathbb{Z}\}$ on pienin ei-negatiivinen kokonaisluku. Olkoon se $r = a - qb$. Nyt on $r < b$, koska muuten $r - b = a - qb - b = a - (q + 1)b$ olisi r:ää pienempi $\frac{1}{2}$. Täten on $a = qb + r$.

2 / 7

Jakoyhtälö — todistus jatkuu

2) *Yksikäsitteisyys.*

Olkoon

$$a = qb + r = q'b + r' \quad \text{ja} \quad q' > q. \quad (1)$$

Tällöin on $r - r' = (q' - q)b \geq b$. Koska $0 \leq r, r' < b$, niin $r - r' < b$ $\frac{1}{2}$. Nyt ainoa mahdollisuus on, että $q = q'$, koska jos olisi $q' < q$, niin jouduttaisiin vastaavasti ristiriitaan tarkastelemalla yhtälöä $r' - r = (q - q')b$. Nyt myös (1):n mukaan $r = r'$.

■

Esimerkki. $31 = 4 \cdot 7 + 3$

3 / 7

Lukujärjestelmät

Nykyisin käytössä olevat lukujärjestelmät ovat **paikkajärjestelmiä**. Yleisimmät kantaluvut ovat 10, 2, 8 ja 16. Esimerkiksi 10-järjestelmässä

$$54906 = 5 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0$$

Binäärijärjestelmässä kantaluku on 2 ja numerosymboleina vain bitit 0 ja 1.

Oktaalijärjestelmässä kantalukuna on 8 ja numerosymboleina 0, 1, ..., 7.

Heksadesimaalijärjestelmässä kantalukuna on 16 ja numerosymboleina 0, 1, ..., 9, A, B, C, D, E, F.

4 / 7

Muunto 10-järjestelmään

$$\begin{aligned} 101101_2 &= 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \\ &= 1 \cdot 32 + 1 \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 1 \\ &= 45_{10} \\ 7DA9_{16} &= 7 \cdot 16^3 + 13 \cdot 16^2 + 10 \cdot 16^1 + 9 \cdot 16^0 \\ &= 7 \cdot 4096 + 13 \cdot 256 + 10 \cdot 16 + 9 \\ &= 32169_{10} \end{aligned}$$

5 / 7

Muunto 10-järjestelmästä

10-järjestelmän luku muutetaan b-järjestelmään jakamalla kantaluvulla b. Jakojäännöksistä muodostuu vastaava b-järjestelmän luku.

Esimerkki 1. Muuta 10-järjestelmän luku 29 binääriluvuksi.

$$29 = 2 \cdot 14 + 1$$

$$14 = 2 \cdot 7 + 0$$

$$7 = 2 \cdot 3 + 1$$

$$3 = 2 \cdot 1 + 1$$

$$1 = 2 \cdot 0 + 1$$



$$29_{10} = 11101_2$$

6 / 7

Muunto 10-järjestelmästä

Esimerkki 2. Muuta 10-järjestelmän luku 1475 heksadesimaaliluvuksi.

$$1475 = 16 \cdot 92 + 3$$

$$92 = 16 \cdot 5 + 12$$

$$5 = 16 \cdot 0 + 5$$



$$1475_{10} = 5C3_{16}$$

7 / 7