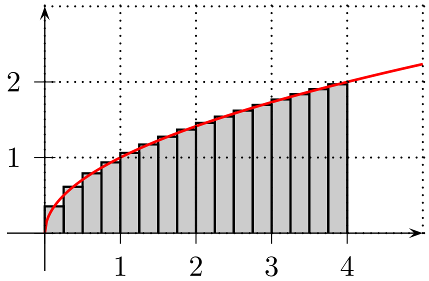
Numeerinen integrointi

Hannu Lehto
Lahden Lyseon lukio

Keskipistesääntö

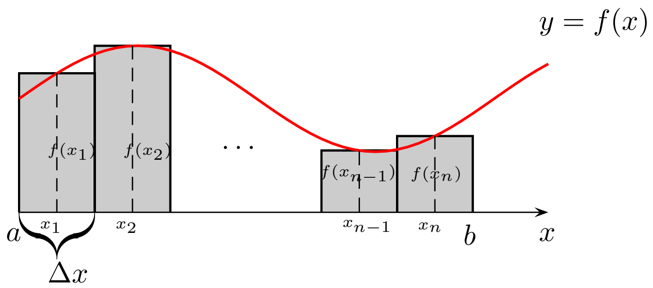
Esimerkki. Määritä likiarvo integraalille $\int_0^4 \sqrt{x}dx.$



Porrassummat (jakovälien lukumäärä on n)

n	S_n
4	5,384
8	5,352
16	5,340

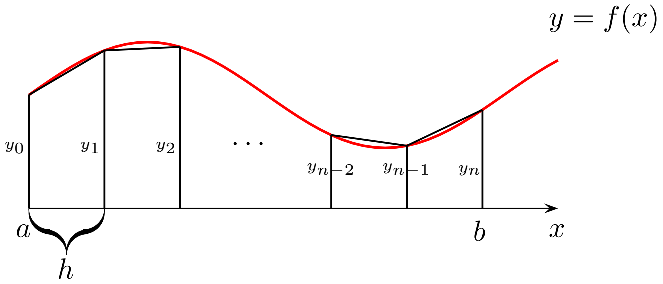
Keskipistesääntö



- Funktio f on määritelty välillä $[a, b]$.
- Väli jaetaan n:ään yhtä pitkään osaan, jolloin $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$.
- $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n$ ovat vastaavien jakovälien keskipisteitä.
- *Porrassumma* on

$$\begin{aligned} S_n &= f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \ldots + f(x_{n-1})\Delta x + f(x_n)\Delta x \\ &= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x \approx \int_a^b f(x)dx \end{aligned}$$

Puolisuunnikassääntö



$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &\approx \frac{y_0+y_1}{2}\cdot h + \frac{y_1+y_2}{2}\cdot h \cdots + \frac{y_{n-1}+y_n}{2}\cdot h \\ &= \frac{h}{2}\left(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n\right)\end{aligned}$$

⋆Puolisuunnikassäännön virhe

Olkoon L puolisuunnikassäännön antama likiarvo. Jos f on kahdesti derivoituva, niin puolisuunnikassäännön virhe on

$$\int_a^b f(x)dx - L = E_n = -\frac{(b-a)^3 f''(t)}{12n^2}$$

Kaavassa

- a ja b ovat ala- ja ylärajat,
- n on jakovälien lukumäärä,
- t on jokin välin $[a, b]$ tuntematon luku.

Käytännössä pystytään arvioimaan vain virheen itseisarvoa

$$\left|\int_a^b f(x)dx - L\right| = \left|-\frac{(b-a)^3 f''(t)}{12n^2}\right| = \frac{(b-a)^2}{12n^2}\,|b-a|\,\left|f''(t)\right|$$

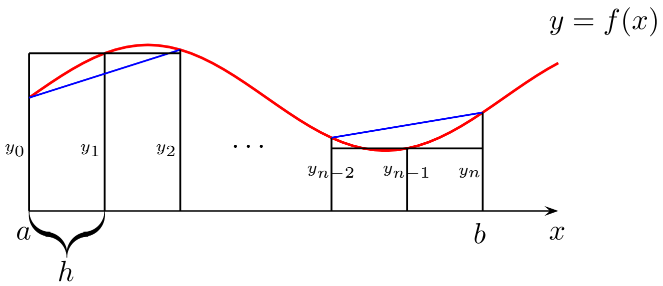
laskemalla $|f''(t)|$:n suurin arvo suljetulla välillä $[a, b]$

Puolisuunnikassäännön virhe

Käytännön ohje: Halutun tarkkuuden saamiseksi laske integraalin likiarvo kahdella eri jakovälien määrällä. Yhteiset desimaalit ovat oikeita.

Simpsonin sääntö

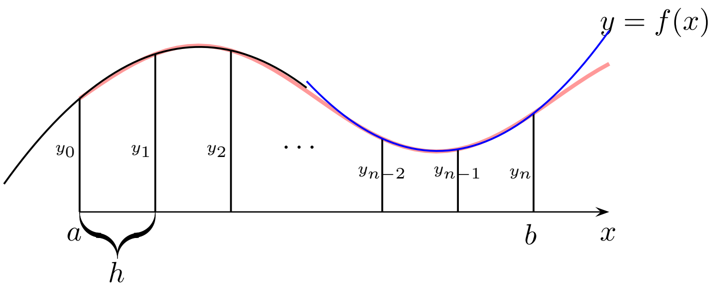
Osavälien lukumäärä n on *parillinen*. Simpsonin sääntö on keskipiste- ja puolisuunnikassääntöjen painotettu keskiarvo painoarvoina $2/3$ ja $1/3$.



$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &\approx \tfrac{2}{3}\left[2hy_1 + 2hy_3 + \cdots + 2hy_{n-1}\right] \\
&\quad + \tfrac{1}{3}\tfrac{2h}{2}\left[y_0 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-2} + y_n\right] \\
&= \tfrac{h}{3}\left[y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \cdots + 4y_{n-1} + y_n\right]
\end{aligned}
$$

⋆Simpsonin sääntö – toinen lähestymistapa

Simpsonin sääntö voidaan johtaa myös korvaamalla funktion kuvaaja kullakin $2h$-mittaisella välillä paraabelilla, joka kulkee päätepisteiden ja keskipisteen kautta (2. asteen interpolointipolynomi). [a]



[a] Tarkempi perustelu MT12, sivut 56–57

$\star$ Simpsonin säännön virhe

Olkoon L Simpsonin säännön antama likiarvo. Jos f on neljästi derivoituva, niin Simpsonin säännön virhe on

$$\int_a^b f(x)dx - L = E_n = -\frac{(b-a)^5 f^{(4)}(t)}{180n^4}$$

Kaavassa

- a ja b ovat ala- ja ylärajat,
- n on jakovälien lukumäärä,
- t on jokin välin $[a, b]$ tuntematon luku.

Käytännössä pystytään arvioimaan vain virheen itseisarvoa

$$\left|\int_a^b f(x)dx - L\right| = \left|-\frac{(b-a)^5 f^{(4)}(t)}{180n^4}\right| = \frac{(b-a)^4}{180n^4}\,|b-a|\left|f^{(4)}(t)\right|$$

laskemalla $\left|f^{(4)}(t)\right|$:n suurin arvo suljetulla välillä $[a, b]$

9 / 9