

Polynomien jaollisuus

Hannu Lehto
Lahden Lyseon lukio



Esimerkkejä

- **Esimerkkejä**

- Polynomien jaollisuus

- Kokonaislukujen jakoyhtälö

- Polynomien jakoyhtälö

- Jakolaskualgoritmi

- Rationaalijuurlause

1. Jaa tekijöihin seuraavat polynomit:

a) $p(x) = 2x^3 - 8x,$

Esimerkkejä

- **Esimerkkejä**

- Polynomien jaollisuus

- Kokonaislukujen jakoyhtälö

- Polynomien jakoyhtälö

- Jakolaskualgoritmi

- Rationaalijuurlause

1. Jaa tekijöihin seuraavat polynomit:

a) $p(x) = 2x^3 - 8x,$

b) $p(x) = 2x^2 + x - 1$

Esimerkkejä

- **Esimerkkejä**

- Polynomien jaollisuus

- Kokonaislukujen jakoyhtälö

- Polynomien jakoyhtälö

- Jakolaskualgoritmi

- Rationaalijuurlause

1. Jaa tekijöihin seuraavat polynomit:

a) $p(x) = 2x^3 - 8x,$

b) $p(x) = 2x^2 + x - 1$

c) $x^3 - 3x^2 - 2x + 6$

Esimerkkejä

- **Esimerkkejä**

- Polynomien jaollisuus

- Kokonaislukujen jakoyhtälö

- Polynomien jakoyhtälö

- Jakolaskualgoritmi

- Rationaalijuurilause

1. Jaa tekijöihin seuraavat polynomit:

a) $p(x) = 2x^3 - 8x,$

b) $p(x) = 2x^2 + x - 1$

c) $x^3 - 3x^2 - 2x + 6$

2. Supista $\frac{9x^2 - 1}{3x + 1}$

Polynomien jaollisuus

- Esimerkkejä
- Polynomien jaollisuus
- Kokonaislukujen jakoyhtälö
- Polynomien jakoyhtälö
- Jakolaskualgoritmi
- Rationaalijuurlause

$$s(x) \mid p(x)$$

Polynomien jaollisuus

- Esimerkkejä
- **Polynomien jaollisuus**
- Kokonaislukujen jakoyhtälö
- Polynomien jakoyhtälö
- Jakolaskualgoritmi
- Rationaalijuurlause

$$s(x) \mid p(x) \Leftrightarrow \frac{p(x)}{s(x)} = q(x)$$

Polynomien jaollisuus

- Esimerkkejä
- **Polynomien jaollisuus**
- Kokonaislukujen jakoyhtälö
- Polynomien jakoyhtälö
- Jakolaskualgoritmi
- Rationaalijuurlause

$$s(x) \mid p(x) \Leftrightarrow \frac{p(x)}{s(x)} = q(x) \Leftrightarrow p(x) = s(x)q(x)$$

Polynomien jaollisuus

- Esimerkkejä
- **Polynomien jaollisuus**
- Kokonaislukujen jakoyhtälö
- Polynomien jakoyhtälö
- Jakolaskualgoritmi
- Rationaalijuurlause

$$s(x) \mid p(x) \Leftrightarrow \frac{p(x)}{s(x)} = q(x) \Leftrightarrow p(x) = s(x)q(x)$$

$s(x)$ jakaa $p(x)$:n eli

Polynomien jaollisuus

- Esimerkkejä
- **Polynomien jaollisuus**
- Kokonaislukujen jakoyhtälö
- Polynomien jakoyhtälö
- Jakolaskualgoritmi
- Rationaalijuurlause

$$s(x) \mid p(x) \Leftrightarrow \frac{p(x)}{s(x)} = q(x) \Leftrightarrow p(x) = s(x)q(x)$$

$s(x)$ jakaa $p(x)$:n eli $s(x)$ on $p(x)$:n tekijä.

Polynomien jaollisuus

- Esimerkkejä
- **Polynomien jaollisuus**
- Kokonaislukujen jakoyhtälö
- Polynomien jakoyhtälö
- Jakolaskualgoritmi
- Rationaalijuurlause

$$s(x) \mid p(x) \Leftrightarrow \frac{p(x)}{s(x)} = q(x) \Leftrightarrow p(x) = s(x)q(x)$$

$s(x)$ jakaa $p(x)$:n eli $s(x)$ on $p(x)$:n tekijä. $q(x)$ on osamäärä.

Tulon aste on

Polynomien jaollisuus

- Esimerkkejä
- **Polynomien jaollisuus**
- Kokonaislukujen jakoyhtälö
- Polynomien jakoyhtälö
- Jakolaskualgoritmi
- Rationaalijuurlause

$$s(x) \mid p(x) \Leftrightarrow \frac{p(x)}{s(x)} = q(x) \Leftrightarrow p(x) = s(x)q(x)$$

$s(x)$ jakaa $p(x)$:n eli $s(x)$ on $p(x)$:n tekijä. $q(x)$ on osamäärä.

Tulon aste on tekijöiden asteiden summa, eli

Polynomien jaollisuus

- Esimerkkejä
- **Polynomien jaollisuus**
- Kokonaislukujen jakoyhtälö
- Polynomien jakoyhtälö
- Jakolaskualgoritmi
- Rationaalijuurilause

$$s(x) \mid p(x) \Leftrightarrow \frac{p(x)}{s(x)} = q(x) \Leftrightarrow p(x) = s(x)q(x)$$

$s(x)$ jakaa $p(x)$:n eli $s(x)$ on $p(x)$:n tekijä. $q(x)$ on osamäärä.

Tulon aste on tekijöiden asteiden summa, eli
 $deg(p(x)) = deg(s(x)) + deg(q(x))$.

Polynomien jaollisuus

- Esimerkkejä
- **Polynomien jaollisuus**
- Kokonaislukujen jakoyhtälö
- Polynomien jakoyhtälö
- Jakolaskualgoritmi
- Rationaalijuurilause

$$s(x) \mid p(x) \Leftrightarrow \frac{p(x)}{s(x)} = q(x) \Leftrightarrow p(x) = s(x)q(x)$$

$s(x)$ jakaa $p(x)$:n eli $s(x)$ on $p(x)$:n tekijä. $q(x)$ on osamäärä.

Tulon aste on tekijöiden asteiden summa, eli

$$\deg(p(x)) = \deg(s(x)) + \deg(q(x)).$$

Osamäärän aste on

Polynomien jaollisuus

- Esimerkkejä
- **Polynomien jaollisuus**
- Kokonaislukujen jakoyhtälö
- Polynomien jakoyhtälö
- Jakolaskualgoritmi
- Rationaalijuurilause

$$s(x) \mid p(x) \Leftrightarrow \frac{p(x)}{s(x)} = q(x) \Leftrightarrow p(x) = s(x)q(x)$$

$s(x)$ jakaa $p(x)$:n eli $s(x)$ on $p(x)$:n tekijä. $q(x)$ on osamäärä.

Tulon aste on tekijöiden asteiden summa, eli

$$\deg(p(x)) = \deg(s(x)) + \deg(q(x)).$$

Osamäärän aste on jaettavan ja jakajan asteiden erotus eli

Polynomien jaollisuus

- Esimerkkejä
- Polynomien jaollisuus
- Kokonaislukujen jakoyhtälö
- Polynomien jakoyhtälö
- Jakolaskualgoritmi
- Rationaalijuurlause

$$s(x) \mid p(x) \Leftrightarrow \frac{p(x)}{s(x)} = q(x) \Leftrightarrow p(x) = s(x)q(x)$$

$s(x)$ jakaa $p(x)$:n eli $s(x)$ on $p(x)$:n tekijä. $q(x)$ on osamäärä.

Tulon aste on tekijöiden asteiden summa, eli

$$\deg(p(x)) = \deg(s(x)) + \deg(q(x)).$$

Osamäärän aste on jaettavan ja jakajan asteiden erotus eli

$$\deg(q(x)) = \deg(p(x)) - \deg(s(x)).$$

Esimerkki 1. Osoita, että polynomi $x^2 - 2x + 1$ on polynomin $x^3 + x^2 - 5x + 3$ tekijä eli $(x^2 - 2x + 1) \mid (x^3 + x^2 - 5x + 3)$.

Polynomien jaollisuus

- Esimerkkejä
- **Polynomien jaollisuus**
- Kokonaislukujen jakoyhtälö
- Polynomien jakoyhtälö
- Jakolaskualgoritmi
- Rationaalijuurilause

$$s(x) \mid p(x) \Leftrightarrow \frac{p(x)}{s(x)} = q(x) \Leftrightarrow p(x) = s(x)q(x)$$

$s(x)$ jakaa $p(x)$:n eli $s(x)$ on $p(x)$:n tekijä. $q(x)$ on osamäärä.

Tulon aste on tekijöiden asteiden summa, eli

$$\deg(p(x)) = \deg(s(x)) + \deg(q(x)).$$

Osamäärän aste on jaettavan ja jakajan asteiden erotus eli

$$\deg(q(x)) = \deg(p(x)) - \deg(s(x)).$$

Esimerkki 1. Osoita, että polynomi $x^2 - 2x + 1$ on polynomien $x^3 + x^2 - 5x + 3$ tekijä eli $(x^2 - 2x + 1) \mid (x^3 + x^2 - 5x + 3)$.

Esimerkki 2. Osoita, että $(x - 1) \nmid (x^2 - x + 4)$.

Kokonaislukujen jakoyhtälö

- Esimerkkejä
- Polynomien jaollisuus
- Kokonaislukujen jakoyhtälö
- Polynomien jakoyhtälö
- Jakolaskualgoritmi
- Rationaalijuurilause

Esimerkki. Tarkastellaan kokonaislukujakoa $267:15$.

Kokonaislukujen jakoyhtälö

- Esimerkkejä
- Polynomien jaollisuus
- Kokonaislukujen jakoyhtälö
- Polynomien jakoyhtälö
- Jakolaskualgoritmi
- Rationaalijuurilause

Esimerkki. Tarkastellaan kokonaislukujakoa $267:15$. Osamäärä on 17 ja jakojäännös 12. Jakolaskun tulos voidaan kirjoittaa muotoon

Kokonaislukujen jakoyhtälö

- Esimerkkejä
- Polynomien jaollisuus
- Kokonaislukujen jakoyhtälö
- Polynomien jakoyhtälö
- Jakolaskualgoritmi
- Rationaalijuurilause

Esimerkki. Tarkastellaan kokonaislukujakoa $267:15$. Osamäärä on 17 ja jakojäännös 12. Jakolaskun tulos voidaan kirjoittaa muotoon

$$\frac{267}{15} = 17 + \frac{12}{15}$$

Kokonaislukujen jakoyhtälö

- Esimerkkejä
- Polynomien jaollisuus
- Kokonaislukujen jakoyhtälö
- Polynomien jakoyhtälö
- Jakolaskualgoritmi
- Rationaalijuurilause

Esimerkki. Tarkastellaan kokonaislukujakoa $267:15$. Osamäärä on 17 ja jakojäännös 12. Jakolaskun tulos voidaan kirjoittaa muotoon

$$\frac{267}{15} = 17 + \frac{12}{15} \Leftrightarrow 267 = 15 \cdot 17 + 12$$

Kokonaislukujen jakoyhtälö

- Esimerkkejä
- Polynomien jaollisuus
- Kokonaislukujen jakoyhtälö
- Polynomien jakoyhtälö
- Jakolaskualgoritmi
- Rationaalijuurilause

Esimerkki. Tarkastellaan kokonaislukujakoa $267:15$. Osamäärä on 17 ja jakojäännös 12. Jakolaskun tulos voidaan kirjoittaa muotoon

$$\frac{267}{15} = 17 + \frac{12}{15} \Leftrightarrow 267 = 15 \cdot 17 + 12$$

Yleisesti. Tarkastellaan kokonaislukuja $p \geq 0$ ja $s > 0$. Silloin on olemassa yksikäsitteiset kokonaisluvut q ja r siten, että

$$p = sq + r, \quad (0 \leq r < s)$$

Kokonaislukujen jakoyhtälö

- Esimerkkejä
- Polynomien jaollisuus
- Kokonaislukujen jakoyhtälö
- Polynomien jakoyhtälö
- Jakolaskualgoritmi
- Rationaalijuurilause

Esimerkki. Tarkastellaan kokonaislukujakoa $267:15$. Osamäärä on 17 ja jakojäännös 12. Jakolaskun tulos voidaan kirjoittaa muotoon

$$\frac{267}{15} = 17 + \frac{12}{15} \Leftrightarrow 267 = 15 \cdot 17 + 12$$

Yleisesti. Tarkastellaan kokonaislukuja $p \geq 0$ ja $s > 0$. Silloin on olemassa yksikäsitteiset kokonaisluvut q ja r siten, että

$$p = sq + r, \quad (0 \leq r < s)$$

Jaettava on jakaja kertaa osamäärä plus jakojäännös.

Polynomien jakoyhtälö

- Esimerkkejä
- Polynomien jaollisuus
- Kokonaislukujen jakoyhtälö
- Polynomien jakoyhtälö
- Jakolaskualgoritmi
- Rationaalijuurlause

Tarkastellaan polynomeja $p(x)$ ja $s(x)$. Silloin $p(x)$ voidaan yksikäsitteisesti esittää muodossa

$$p(x) = s(x)q(x) + r(x)$$

Polynomien jakoyhtälö

- Esimerkkejä
- Polynomien jaollisuus
- Kokonaislukujen jakoyhtälö
- Polynomien jakoyhtälö
- Jakolaskualgoritmi
- Rationaalijuurlause

Tarkastellaan polynomeja $p(x)$ ja $s(x)$. Silloin $p(x)$ voidaan yksikäsitteisesti esittää muodossa

$$p(x) = s(x)q(x) + r(x) \Leftrightarrow \frac{p(x)}{s(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{s(x)}, \quad (1)$$

missä $\deg(r(x)) < \deg(s(x))$.

Polynomien jakoyhtälö

- Esimerkkejä
- Polynomien jaollisuus
- Kokonaislukujen jakoyhtälö
- Polynomien jakoyhtälö
- Jakolaskualgoritmi
- Rationaalijuurlause

Tarkastellaan polynomeja $p(x)$ ja $s(x)$. Silloin $p(x)$ voidaan yksikäsitteisesti esittää muodossa

$$p(x) = s(x)q(x) + r(x) \Leftrightarrow \frac{p(x)}{s(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{s(x)}, \quad (1)$$

missä $\deg(r(x)) < \deg(s(x))$. Polynomi $q(x)$ on (vaillinainen) osamäärä ja $r(x)$ jakojäännös.

Polynomien jakoyhtälö

- Esimerkkejä
- Polynomien jaollisuus
- Kokonaislukujen jakoyhtälö
- Polynomien jakoyhtälö
- Jakolaskualgoritmi
- Rationaalijuurlause

Tarkastellaan polynomeja $p(x)$ ja $s(x)$. Silloin $p(x)$ voidaan yksikäsitteisesti esittää muodossa

$$p(x) = s(x)q(x) + r(x) \Leftrightarrow \frac{p(x)}{s(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{s(x)}, \quad (1)$$

missä $\deg(r(x)) < \deg(s(x))$. Polynomi $q(x)$ on (vaillinainen) osamäärä ja $r(x)$ jakojäännös.

Erikoistapaus. Jos jakaja $s(x) = x - a$, niin

$$p(x) = (x - a)q(x) + r, \quad (2)$$

missä r on vakio.

Polynomien jakoyhtälö

- Esimerkkejä
- Polynomien jaollisuus
- Kokonaislukujen jakoyhtälö
- Polynomien jakoyhtälö
- Jakolaskualgoritmi
- Rationaalijuurlause

Jakoyhtälöstä $p(x) = (x - a)q(x) + r$ saadaan tärkeitä seurauksia:

1. Jakolaskun $\frac{p(x)}{x - a}$ jakojäännös on

Polynomien jakoyhtälö

- Esimerkkejä
- Polynomien jaollisuus
- Kokonaislukujen jakoyhtälö
- Polynomien jakoyhtälö
- Jakolaskualgoritmi
- Rationaalijuurlause

Jakoyhtälöstä $p(x) = (x - a)q(x) + r$ saadaan tärkeitä seurauksia:

1. Jakolaskun $\frac{p(x)}{x - a}$ jakojäännös on $p(a)$.

Polynomien jakoyhtälö

- Esimerkkejä
- Polynomien jaollisuus
- Kokonaislukujen jakoyhtälö
- Polynomien jakoyhtälö
- Jakolaskualgoritmi
- Rationaalijuurlause

Jakoyhtälöstä $p(x) = (x - a)q(x) + r$ saadaan tärkeitä seurauksia:

1. Jakolaskun $\frac{p(x)}{x - a}$ jakojäännös on $p(a)$.
2. Tekijälause. Jakolasku $\frac{p(x)}{x - a}$ menee tasan eli $(x - a)$ on $p(x)$:n tekijä joss.

Polynomien jakoyhtälö

- Esimerkkejä
- Polynomien jaollisuus
- Kokonaislukujen jakoyhtälö
- Polynomien jakoyhtälö
- Jakolaskualgoritmi
- Rationaalijuurlause

Jakoyhtälöstä $p(x) = (x - a)q(x) + r$ saadaan tärkeitä seurauksia:

1. Jakolaskun $\frac{p(x)}{x - a}$ jakojäännös on $p(a)$.
2. Tekijälause. Jakolasku $\frac{p(x)}{x - a}$ menee tasan eli $(x - a)$ on $p(x)$:n tekijä joss. $p(a) = 0$ eli

Polynomien jakoyhtälö

- Esimerkkejä
- Polynomien jaollisuus
- Kokonaislukujen jakoyhtälö
- Polynomien jakoyhtälö
- Jakolaskualgoritmi
- Rationaalijuurlause

Jakoyhtälöstä $p(x) = (x - a)q(x) + r$ saadaan tärkeitä seurauksia:

1. Jakolaskun $\frac{p(x)}{x - a}$ jakojäännös on $p(a)$.
2. Tekijälause. Jakolasku $\frac{p(x)}{x - a}$ menee tasan eli $(x - a)$ on $p(x)$:n tekijä joss. $p(a) = 0$ eli $x = a$ on polynomien $p(x)$ nollakohta.

Polynomien jakoyhtälö

- Esimerkkejä
- Polynomien jaollisuus
- Kokonaislukujen jakoyhtälö
- Polynomien jakoyhtälö
- Jakolaskualgoritmi
- Rationaalijuurlause

Jakoyhtälöstä $p(x) = (x - a)q(x) + r$ saadaan tärkeitä seurauksia:

1. Jakolaskun $\frac{p(x)}{x - a}$ jakojäännös on $p(a)$.
2. Tekijälause. Jakolasku $\frac{p(x)}{x - a}$ menee tasan eli $(x - a)$ on $p(x)$:n tekijä joss. $p(a) = 0$ eli $x = a$ on polynomin $p(x)$ nollakohta.
3. n . asteen polynomilla on korkeintaan n nollakohtaa.

Polynomien jakoyhtälö

- Esimerkkejä
- Polynomien jaollisuus
- Kokonaislukujen jakoyhtälö
- Polynomien jakoyhtälö
- Jakolaskualgoritmi
- Rationaalijuurlause

Jakoyhtälöstä $p(x) = (x - a)q(x) + r$ saadaan tärkeitä seurauksia:

1. Jakolaskun $\frac{p(x)}{x - a}$ jakojäännös on $p(a)$.
2. Tekijälause. Jakolasku $\frac{p(x)}{x - a}$ menee tasan eli $(x - a)$ on $p(x)$:n tekijä joss. $p(a) = 0$ eli $x = a$ on polynomin $p(x)$ nollakohta.
3. n . asteen polynomilla on korkeintaan n nollakohtaa.
4. Tekijöihinjakolause. Jos polynomin $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0$ ($a_n \neq 0$) nollakohdat ovat x_1, x_2, \dots, x_n , niin $p(x) = a_n (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{n-1})(x - x_n)$.

Esimerkkejä

- Esimerkkejä
- Polynomien jaollisuus
- Kokonaislukujen jakoyhtälö
- Polynomien jakoyhtälö
- Jakolaskualgoritmi
- Rationaalijuurilause

1. Onko polynomi $x + 2$ polynomin $x^3 - 2x + 4$ tekijä?
2. Määritä vakio a siten, että polynomi $x^7 + 4x^4 + ax - 1$ on jaollinen polynomilla $x - 1$.
3. Tarkastellaan polynomien jakolaskua $\frac{x^2 + 2x + 3}{2x + 1}$. Määritä jakojäännös

Jakolaskualgoritmi

- Esimerkkejä
- Polynomien jaollisuus
- Kokonaislukujen jakoyhtälö
- Polynomien jakoyhtälö
- **Jakolaskualgoritmi**
- Rationaalijuurlause

Esimerkki. Laske $(3x^3 - 9x + 4) : (x - 2)$.

Jakolaskualgoritmi

- Esimerkkejä
- Polynomien jaollisuus
- Kokonaislukujen jakoyhtälö
- Polynomien jakoyhtälö
- **Jakolaskualgoritmi**
- Rationaalijuurilause

Esimerkki. Laske $(3x^3 - 9x + 4) : (x - 2)$.

Vastaus:

$$\frac{3x^3 - 9x + 4}{x - 2} = 3x^2 + 6x + 3 + \frac{10}{x - 2}$$

eli

Jakolaskualgoritmi

- Esimerkkejä
- Polynomien jaollisuus
- Kokonaislukujen jakoyhtälö
- Polynomien jakoyhtälö
- **Jakolaskualgoritmi**
- Rationaalijuurilause

Esimerkki. Laske $(3x^3 - 9x + 4) : (x - 2)$.

Vastaus:

$$\frac{3x^3 - 9x + 4}{x - 2} = 3x^2 + 6x + 3 + \frac{10}{x - 2}$$

eli

$$3x^3 - 9x + 4 = (x - 2)(3x^2 + 6x + 3) + 10$$

Sovelluksia: raja-arvo

- Esimerkkejä
- Polynomien jaollisuus
- Kokonaislukujen jakoyhtälö
- Polynomien jakoyhtälö
- **Jakolaskualgoritmi**
- Rationaalijuurlause

$$1. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 4x^2 + 3x - 2}{3x + 6}$$

Sovelluksia: raja-arvo

- Esimerkkejä
- Polynomien jaollisuus
- Kokonaislukujen jakoyhtälö
- Polynomien jakoyhtälö
- **Jakolaskualgoritmi**
- Rationaalijuurilause

1. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 4x^2 + 3x - 2}{3x + 6}$

2. Määritä vakio a siten, että funktiolla $f(x) = \frac{2x^3 + 7x^2 + a}{x + 1}$ on raja-arvo kohdassa $x = -1$. Laske tämä raja-arvo.

Sovelluksia: rationaalifunktion integraali

- Esimerkkejä
- Polynomien jaollisuus
- Kokonaislukujen jakoyhtälö
- Polynomien jakoyhtälö
- **Jakolaskualgoritmi**
- Rationaalijuurlause

$$\int \frac{2x}{x+1} dx$$

Sovelluksia: rationaalifunktion integraali

- Esimerkkejä
- Polynomien jaollisuus
- Kokonaislukujen jakoyhtälö
- Polynomien jakoyhtälö
- **Jakolaskualgoritmi**
- Rationaalijuurlause

$$\int \frac{2x}{x+1} dx$$

Suoritetaan jakolasku jakokulmassa:

Sovelluksia: rationaalifunktion integraali

- Esimerkkejä
- Polynomien jaollisuus
- Kokonaislukujen jakoyhtälö
- Polynomien jakoyhtälö
- **Jakolaskualgoritmi**
- Rationaalijuurlause

$$\int \frac{2x}{x+1} dx$$

Suoritetaan jakolasku jakokulmassa:

$$x + 1 \quad | \overline{2x}$$

Sovelluksia: rationaalifunktion integraali

- Esimerkkejä
- Polynomien jaollisuus
- Kokonaislukujen jakoyhtälö
- Polynomien jakoyhtälö
- **Jakolaskualgoritmi**
- Rationaalijuurlause

$$\int \frac{2x}{x+1} dx$$

Suoritetaan jakolasku jakokulmassa:

$$x + 1 \quad \left| \begin{array}{r} 2 \\ \hline 2x \\ +2x + 2 \end{array} \right.$$

Sovelluksia: rationaalifunktion integraali

- Esimerkkejä
- Polynomien jaollisuus
- Kokonaislukujen jakoyhtälö
- Polynomien jakoyhtälö
- **Jakolaskualgoritmi**
- Rationaalijuurlause

$$\int \frac{2x}{x+1} dx$$

Suoritetaan jakolasku jakokulmassa:

$$x + 1 \quad \left| \begin{array}{r} 2 \\ \hline 2x \\ \hline \underline{\underline{-2x \quad -2}} \end{array} \right.$$

Sovelluksia: rationaalifunktion integraali

- Esimerkkejä
- Polynomien jaollisuus
- Kokonaislukujen jakoyhtälö
- Polynomien jakoyhtälö
- **Jakolaskualgoritmi**
- Rationaalijuurlause

$$\int \frac{2x}{x+1} dx$$

Suoritetaan jakolasku jakokulmassa:

$$\begin{array}{r} x + 1 \quad | \quad \begin{array}{r} 2 \\ \hline 2x \\ \hline \cancel{2x} \quad \cancel{2} \\ \hline -2 \end{array} \end{array}$$

Sovelluksia: rationaalifunktion integraali

- Esimerkkejä
- Polynomien jaollisuus
- Kokonaislukujen jakoyhtälö
- Polynomien jakoyhtälö
- **Jakolaskualgoritmi**
- Rationaalijuurlause

$$\int \frac{2x}{x+1} dx$$

Suoritetaan jakolasku jakokulmassa:

$$\begin{array}{r} x + 1 \quad | \quad \begin{array}{l} 2 \\ \hline 2x \\ \hline \mp 2x \mp 2 \\ \hline -2 \end{array} \end{array}$$

Täten osamäärä on 2 ja jakojäännös -2.

Sovelluksia: rationaalifunktion integraali

- Esimerkkejä
- Polynomien jaollisuus
- Kokonaislukujen jakoyhtälö
- Polynomien jakoyhtälö
- **Jakolaskualgoritmi**
- Rationaalijuurlause

$$\int \frac{2x}{x+1} dx$$

Suoritetaan jakolasku jakokulmassa:

$$\begin{array}{r} x+1 \overline{) 2x} \\ \underline{\mp 2x \mp 2} \\ -2 \end{array}$$

Täten osamäärä on 2 ja jakojäännös -2.

$$\int \frac{2x}{x+1} dx = \int \left(2 + \frac{-2}{x+1} \right) dx$$

Sovelluksia: rationaalifunktion integraali

- Esimerkkejä
- Polynomien jaollisuus
- Kokonaislukujen jakoyhtälö
- Polynomien jakoyhtälö
- **Jakolaskualgoritmi**
- Rationaalijuurlause

$$\int \frac{2x}{x+1} dx$$

Suoritetaan jakolasku jakokulmassa:

$$\begin{array}{r} x+1 \quad | \quad \begin{array}{l} 2x \\ \hline \mp 2x \mp 2 \\ \hline -2 \end{array} \end{array}$$

Täten osamäärä on 2 ja jakojäännös -2.

$$\begin{aligned} \int \frac{2x}{x+1} dx &= \int \left(2 + \frac{-2}{x+1} \right) dx \\ &= 2x - 2 \ln |x+1| + c \end{aligned}$$

Rationaalijuurlause

- Esimerkkejä
- Polynomien jaollisuus
- Kokonaislukujen jakoyhtälö
- Polynomien jakoyhtälö
- Jakolaskualgoritmi
- Rationaalijuurlause

Lause. Jos kokonaislukukertoimisella yhtälöllä

$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0 = 0 \quad (a_n \neq 0)$ on rationaalilukuratkaisu $x = \frac{r}{s}$ (supistetussa muodossa), niin r on a_0 :n tekijä ja s on a_n :n tekijä.

Lausetta voidaan käyttää hyödyksi jaettaessa polynomeja tekijöihin ja ratkaistaessa korkeamman asteen yhtälöitä.

Rationaalijuurilause

Todistus. Olkoon $\frac{r}{s}$ supistetussa muodossa oleva rationaaliratkaisu.

$$a_n \left(\frac{r}{s}\right)^n + a_{n-1} \left(\frac{r}{s}\right)^{n-1} + \cdots + a_1 \frac{r}{s} + a_0 = 0 \quad | \cdot s^n$$

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} s + \cdots + a_1 r s^{n-1} + a_0 s^n = 0 \quad (3)$$

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} s + \cdots + a_1 r s^{n-1} = -a_0 s^n$$

Koska r on vasemman puolen tekijä ja r :llä ja s :llä ei ole yhteisiä tekijöitä, niin $r \mid a_0$.

Yhtälö 3 voidaan kirjoittaa muotoon

$$a_{n-1} r^{n-1} s + \cdots + a_1 r s^{n-1} + a_0 s^n = -a_n r^n$$

Koska s on vasemman puolen tekijä ja r :llä ja s :llä ei ole yhteisiä tekijöitä, niin $s \mid a_n$.

□

Esimerkkejä

- Esimerkkejä
- Polynomien jaollisuus
- Kokonaislukujen jakoyhtälö
- Polynomien jakoyhtälö
- Jakolaskualgoritmi
- Rationaalijuurilause

1. Jaa polynomi $p(x) = x^3 + 3x^2 - 4$ tekijöihin. Määritä myös polynomin nollakohdat.

2. Ratkaise yhtälö $2x^3 + 3x^2 - 10x + 4 = 0$