Polynomien jaollisuus

Hannu Lehto
Lahden Lyseon lukio

Esimerkkejä

1. Jaa tekijöihin seuraavat polynomit:

a) $p(x) = 2x^3 - 8x,$

b) $p(x) = 2x^2 + x - 1$

c) $x^3 - 3x^2 - 2x + 6$

2. Supista $\dfrac{9x^2 - 1}{3x + 1}$

2 / 12

Polynomien jaollisuus

$$\boxed{s(x) \mid p(x) \Leftrightarrow \frac{p(x)}{s(x)} = q(x) \Leftrightarrow p(x) = s(x)q(x)}$$

$s(x)$ jakaa $p(x)$:n eli $s(x)$ on $p(x)$:n tekijä. $q(x)$ on osamäärä.

Tulon aste on tekijöiden asteiden summa, eli $deg(p(x)) = deg(s(x)) + deg(q(x))$.
Osamäärän aste on jaettavan ja jakajan asteiden erotus eli $deg(q(x)) = deg(p(x)) - deg(s(x))$.

Esimerkki 1. Osoita, että polynomi $x^2 - 2x + 1$ on polynomin $x^3 + x^2 - 5x + 3$ tekijä eli $(x^2 - 2x + 1) \mid (x^3 + x^2 - 5x + 3)$.
Esimerkki 2. Osoita, että $(x - 1) \nmid (x^2 - x + 4)$.

3 / 12

Kokonaislukujen jakoyhtälö

Esimerkki. Tarkastellaan kokonaislukujakoa 267:15.Osamäärä on 17 ja jakojäännös 12. Jakolaskun tulos voidaan kirjoittaa muotoon

$$\frac{267}{15} = 17 + \frac{12}{15} \Leftrightarrow 267 = 15 \cdot 17 + 12$$

Yleisesti. Tarkastellaan kokonaislukuja $p \geq 0$ ja $s > 0$. Silloin on olemassa yksikäsitteiset kokonaisluvut q ja r siten, että

$$\boxed{p = sq + r, \qquad (0 \leq r < s)}$$

Jaettava on jakaja kertaa osamäärä plus jakojäännös.

4 / 12

Polynomien jakoyhtälö

Tarkastellaan polynomeja $p(x)$ja $s(x)$. Silloin $p(x)$ voidaan yksikäsitteisesti esittää muodossa

$$\boxed{p(x) = s(x)q(x) + r(x) \Leftrightarrow \frac{p(x)}{s(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{s(x)}}, \tag{1}$$

missä $deg(r(x)) < deg(s(x))$. Polynomi $q(x)$ on (vaillinainen) osamäärä ja $r(x)$ jakojäännös.

Erikoistapaus. Jos jakaja $s(x) = x - a$, niin

$$\boxed{p(x) = (x - a)q(x) + r}, \tag{2}$$

missä r on vakio.

Polynomien jakoyhtälö

Jakoyhtälöstä $\boxed{p(x) = (x - a)q(x) + r}$ saadaan tärkeitä seurauksia:

1. Jakolaskun $\dfrac{p(x)}{x-a}$ jakojäännös on $p(a)$.
2. Tekijälause. Jakolasku $\dfrac{p(x)}{x-a}$ menee tasan eli $(x - a)$ on $p(x)$:n tekijä joss. $p(a) = 0$ eli $x = a$ on polynomin $p(x)$ nollakohta.
3. n. asteen polynomilla on korkeintaan n nollakohtaa.
4. Tekijöihinjakolause. Jos polynomin $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x^1 + a_0$ $(a_n \neq 0)$ nollakohdat ovat $x_1, x_2, \cdots, x_n$, niin $p(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_{n-1})(x - x_n)$.

Esimerkkejä

1. Onko polynomi $x + 2$ polynomin $x^3 - 2x + 4$ tekijä?
2. Määritä vakio a siten, että polynomi $x^7 + 4x^4 + ax - 1$ on jaollinen polynomilla $x - 1$.
3. Tarkastellaan polynomien jakolaskua $\dfrac{x^2 + 2x + 3}{2x + 1}$. Määritä jakojäännös

Jakolaskualgoritmi

Esimerkki. Laske $(3x^3 - 9x + 4) : (x - 2)$.

Vastaus:

$$\frac{3x^3 - 9x + 4}{x - 2} = 3x^2 + 6x + 3 + \frac{10}{x - 2}$$

eli

$$3x^3 - 9x + 4 = (x - 2)(3x^2 + 6x + 3) + 10$$

Sovelluksia: raja-arvo

1. $lim_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 4x^2 + 3x - 2}{3x + 6}$
2. Määritä vakio a siten, että funktiolla $f(x) = \dfrac{2x^3 + 7x^2 + a}{x + 1}$ on raja-arvo kohdassa $x = -1$. Laske tämä raja-arvo.

Sovelluksia: rationaalifunktion integraali

$$\int \frac{2x}{x+1} dx$$

Suoritetaan jakolasku jakokulmassa:

$$\begin{array}{r|l} x+1 & \overline{\;2x\;\;\;\;\;\;\;} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} & \;2 \\ x+1 & \overline{\;2x\;\;\;\;\;\;\;} \\ & \;+2x+2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} & \;2 \\ x+1 & \overline{\;2x\;\;\;\;\;\;\;} \\ & \;\underline{\mp 2x \mp 2} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} & \;2 \\ x+1 & \overline{\;2x\;\;\;\;\;\;\;} \\ & \;\underline{\mp 2x \mp 2} \\ & \;\;\;\;\;\;\;\;-2 \end{array}$$

Täten osamäärä on 2 ja jakojäännös -2.

$$\int \frac{2x}{x+1} dx = \int \left(2 + \frac{-2}{x+1}\right) dx$$

$$= 2x - 2\ln|x+1| + c$$

Rationaalijuurilause

Lause. Jos kokonaislukukertoimisella yhtälöllä $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x^1 + a_0 = 0 \quad (a_n \neq 0)$ on rationaalilukuratkaisu $x = \dfrac{r}{s}$ (supistetussa muodossa), niin r on a_0:n tekijä ja s on a_n:n tekijä.

Lausetta voidaan käyttää hyödyksi jaettaessa polynomeja tekijöihin ja ratkaistaessa korkeamman asteen yhtälöitä.

Rationaalijuurilause

Todistus. Olkoon $\frac{r}{s}$ supistetussa muodossa oleva rationaaliratkaisu.

$$a_n \left(\frac{r}{s}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{r}{s}\right)^{n-1} + \cdots + a_1 \frac{r}{s} + a_0 = 0 \quad | \cdot s^n$$

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} s + \cdots + a_1 r s^{n-1} + a_0 s^n = 0 \tag{3}$$

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} s + \cdots + a_1 r s^{n-1} = -a_0 s^n$$

Koska r on vasemman puolen tekijä ja r:llä ja s:llä ei ole yhteisiä tekijöitä, niin $r \mid a_0$.
Yhtälö 3 voidaan kirjoittaa muotoon

$$a_{n-1} r^{n-1} s + \cdots + a_1 r s^{n-1} + a_0 s^n = -a_n r^n$$

Koska s on vasemman puolen tekijä ja r:llä ja s:llä ei ole yhteisiä tekijöitä, niin $s \mid a_n$.

$\square$

Esimerkkejä

1. Jaa polynomi $p(x) = x^3 + 3x^2 - 4$ tekijöihin.Määritä myös polynomin nollakohdat.

2. Ratkaise yhtälö $2x^3 + 3x^2 - 10x + 4 = 0$