

# Virhe

Hannu Lehto  
Lahden Lyseon lukio

Virhe .....	2
Väliarvolause.....	4

## Virhe

Olkoon  $t$  tarkka arvo ja  $l$  likiarvo.

Absoluuttinen virhe on  $|t - l|$ .

Suhteellinen virhe on  $\frac{|t - l|}{|t|}$ .

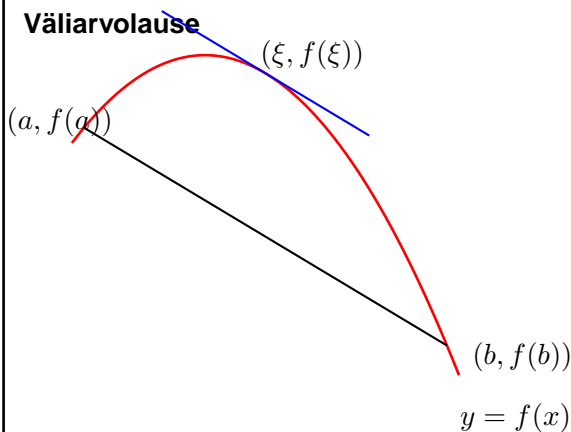
**Esimerkki.** Luvun  $\pi$  likiarvo on 3,142. Kuinka suuri suhteellinen virhe enintään tehdään luvulle  $\pi$  käyttäen tätä likiarvoa? Tarkempaa  $\pi$ :n arvoa ei tunneta.

Luvun  $\pi$  tarkka arvo on välillä  $3,1415 \leq \pi < 3,1425$  joten 3,142 poikkeaa tarkasta arvosta enintään 0,0005.

$$\frac{|\pi - 3.142|}{\pi} \leq \frac{0.0005}{\pi} \leq \frac{0.0005}{3,1415} < 1,6 \cdot 10^{-4} = 0,016\%$$

2 / 5

## Väliarvolause



Väliltä  $]a, b[$  löytyy ainakin yksi kuvaajan piste, johon piirretyn tangentin kulmakerroin on sama kuin sekantin kulmakerroin.

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$$

3 / 5

## Väliarvolause

**Differentiaalilaskennan väliarvolause.** Jos funktio  $f$  on jatkuva välillä  $[a, b]$  ja derivoituva välillä  $]a, b[$ , niin on olemassa vähintään yksi kohta  $\xi \in ]a, b[$  siten, että

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

Väliarvolauseetta voidaan käyttää arvioitaessa virhettä, joka syntyy laskettaessa funktion arvo käyttäen argumentin likiarvoa. Olkoon  $b$  argumentin tarkka arvo ja  $a$  likiarvo. Silloin virhe on

$$|f(b) - f(a)| = |f'(\xi)| |b - a|.$$

Jos tiedetään derivaatan itseisarvon yläraja välillä  $]a, b[$ , ts.  $|f'(x)| \leq M \quad (\forall x \in ]a, b[)$ , niin

$$|f(b) - f(a)| \leq M |b - a|.$$

4 / 5

### Esimerkki

Kuinka suuri virhe tehdään, kun  $e^3$  lasketaan käyttäen Neperin luvulle  $e$  likiarvoa 2,72?

$$e \in ]2,7182; 2,72[$$

Olkoon  $f(x) = x^3$ ,  $x \in ]2,7182; 2,72[$ .

$$|f'(x)| = 3x^2 \leq 3 \cdot 2,72^2 = M$$

$$\begin{aligned} |f(e) - f(2,72)| &\leq 3 \cdot 2,72^2 |e - 2,72| \\ &\leq 3 \cdot 2,72^2 |2,7182 - 2,72| < 0,04 \end{aligned}$$