Yhtälön numeerinen ratkaiseminen

Hannu Lehto

Lahden Lyseon lukio

- Haarukointi
- Newtonin menetelmä
- Kiintopiste
- Kiintopistemenetelmä
- Kiintopistemenetelmän suppeneminen

Haarukointi

Jos funktio $f(x)$

1. on jatkuva välillä $[a, b]$ ja
2. $f(a)$ ja $f(b)$ ovat erimerkkiset, niin

Haarukointi

Jos funktio $f(x)$

1. on jatkuva välillä $[a, b]$ ja

2. $f(a)$ ja $f(b)$ ovat erimerkkiset, niin

funktiolla f on välillä $]a, b[$ ainakin yksi nollakohta.

Haarukointi

Jos funktio $f(x)$

1. on jatkuva välillä $[a, b]$ ja

2. $f(a)$ ja $f(b)$ ovat erimerkkiset, niin

funktiolla f on välillä $]a, b[$ ainakin yksi nollakohta.

Jos lisäksi funktio f on aidosti monotoninen välillä $[a, b]$, niin

Haarukointi

Jos funktio $f(x)$

1. on jatkuva välillä $[a, b]$ ja

2. $f(a)$ ja $f(b)$ ovat erimerkkiset, niin

funktiolla f on välillä $]a, b[$ ainakin yksi nollakohta.

Jos lisäksi funktio f on aidosti monotoninen välillä $[a, b]$, niin nollakohtia on tasan yksi.

Haarukointiesimerkki

Osoita, että yhtälöllä $x^3 + 2x^2 + 2x = 1$ on täsmälleen yksi ratkaisu. Etsi ratkaisun likiarvo yhden desimaalin tarkkuudella.

Haarukointiesimerkki

Osoita, että yhtälöllä $x^3 + 2x^2 + 2x = 1$ on täsmälleen yksi ratkaisu. Etsi ratkaisun likiarvo yhden desimaalin tarkkuudella.

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + 2x - 1 = 0$$

Haarukointiesimerkki

Osoita, että yhtälöllä $x^3 + 2x^2 + 2x = 1$ on täsmälleen yksi ratkaisu. Etsi ratkaisun likiarvo yhden desimaalin tarkkuudella.

$f(x) = x^3 + 2x^2 + 2x - 1 = 0$

1. $f(x)$ on polynomifunktiona jatkuva ja derivoituva $\mathbb{R}$:ssä

Haarukointiesimerkki

Osoita, että yhtälöllä $x^3 + 2x^2 + 2x = 1$ on täsmälleen yksi ratkaisu. Etsi ratkaisun likiarvo yhden desimaalin tarkkuudella.

$f(x) = x^3 + 2x^2 + 2x - 1 = 0$

1. $f(x)$ on polynomifunktiona jatkuva ja derivoituva $\mathbb{R}$:ssä
2. $f(0) < 0$ ja $f(1) > 0$

Haarukointiesimerkki

Osoita, että yhtälöllä $x^3 + 2x^2 + 2x = 1$ on täsmälleen yksi ratkaisu. Etsi ratkaisun likiarvo yhden desimaalin tarkkuudella.

$f(x) = x^3 + 2x^2 + 2x - 1 = 0$

1. $f(x)$ on polynomifunktiona jatkuva ja derivoituva $\mathbb{R}$:ssä
2. $f(0) < 0$ ja $f(1) > 0$
3. $f'(x) = 3x^2 + 4x + 2 > 0$ $\mathbb{R}$:ssä (miksi?), joten f on aidosti kasvava.

Haarukointiesimerkki

Osoita, että yhtälöllä $x^3 + 2x^2 + 2x = 1$ on täsmälleen yksi ratkaisu. Etsi ratkaisun likiarvo yhden desimaalin tarkkuudella.

$f(x) = x^3 + 2x^2 + 2x - 1 = 0$

1. $f(x)$ on polynomifunktiona jatkuva ja derivoituva $\mathbb{R}$:ssä
2. $f(0) < 0$ ja $f(1) > 0$
3. $f'(x) = 3x^2 + 4x + 2 > 0$ $\mathbb{R}$:ssä (miksi?), joten f on aidosti kasvava.

Täten $f(x)$:llä on välillä $]0, 1[$ yksi nollakohta eikä muita ole, joten yhtälöllä $x^3 + 2x^2 + 2x = 1$ tasan yksi ratkaisu.

Haarukointiesimerkki

	väli	keskipiste
$f(0) = -1 < 0$ $f(1) = 4 > 0$	$]0,1[$	$0,5$

Haarukointiesimerkki

	väli	keskipiste
$f(0) = -1 < 0$		
$f(1) = 4 > 0$	$]0, 1[$	$0,5$
$f(0,5) = 0,625 > 0$	$]0; 0,5[$	$0,25$

Haarukointiesimerkki

	väli	keskipiste
$f(0) = -1 < 0$		
$f(1) = 4 > 0$	$]0, 1[$	$0, 5$
$f(0, 5) = 0, 625 > 0$	$]0; 0, 5[$	$0, 25$
$f(0, 25) = -0, 359 \ldots < 0$	$]0, 25; 0, 5[$	$0, 375$

Haarukointiesimerkki

	väli	keskipiste
$f(0) = -1 < 0$		
$f(1) = 4 > 0$	$]0, 1[$	$0, 5$
$f(0, 5) = 0, 625 > 0$	$]0; 0, 5[$	$0, 25$
$f(0, 25) = -0, 359 \ldots < 0$	$]0, 25; 0, 5[$	$0, 375$
$f(0, 375) = 0, 083 \ldots > 0$	$]0, 25; 0, 375[$	$0, 3125$

Haarukointiesimerkki

	väli	keskipiste
$f(0) = -1 < 0$		
$f(1) = 4 > 0$	$]0,1[$	$0,5$
$f(0,5) = 0,625 > 0$	$]0;0,5[$	$0,25$
$f(0,25) = -0,359\ldots < 0$	$]0,25;0,5[$	$0,375$
$f(0,375) = 0,083\ldots > 0$	$]0,25;0,375[$	$0,3125$
$f(0,3125) = -0,149\ldots < 0$	$]0,3125;0,375[$	$0,34375$

Haarukointiesimerkki

	väli	keskipiste
$f(0) = -1 < 0$		
$f(1) = 4 > 0$	$]0,1[$	$0,5$
$f(0,5) = 0,625 > 0$	$]0;0,5[$	$0,25$
$f(0,25) = -0,359\ldots < 0$	$]0,25;0,5[$	$0,375$
$f(0,375) = 0,083\ldots > 0$	$]0,25;0,375[$	$0,3125$
$f(0,3125) = -0,149\ldots < 0$	$]0,3125;0,375[$	$0,34375$
$f(0,34375) = -0,035\ldots < 0$	$]034375;0,375[$	$0,359375$

Haarukointiesimerkki

	väli	keskipiste
$f(0) = -1 < 0$		
$f(1) = 4 > 0$	$]0, 1[$	$0, 5$
$f(0, 5) = 0, 625 > 0$	$]0; 0, 5[$	$0, 25$
$f(0, 25) = -0, 359 \ldots < 0$	$]0, 25; 0, 5[$	$0, 375$
$f(0, 375) = 0, 083 \ldots > 0$	$]0, 25; 0, 375[$	$0, 3125$
$f(0, 3125) = -0, 149 \ldots < 0$	$]0, 3125; 0, 375[$	$0, 34375$
$f(0, 34375) = -0, 035 \ldots < 0$	$]034375; 0, 375[$	$0, 359375$
$f(0, 359375) = 0, 023 \ldots > 0$	$]0, 34375; 0, 359375[$	$0, 3515625$

Haarukointiesimerkki

	väli	keskipiste
$f(0) = -1 < 0$		
$f(1) = 4 > 0$	$]0, 1[$	$0, 5$
$f(0, 5) = 0, 625 > 0$	$]0; 0, 5[$	$0, 25$
$f(0, 25) = -0, 359 \ldots < 0$	$]0, 25; 0, 5[$	$0, 375$
$f(0, 375) = 0, 083 \ldots > 0$	$]0, 25; 0, 375[$	$0, 3125$
$f(0, 3125) = -0, 149 \ldots < 0$	$]0, 3125; 0, 375[$	$0, 34375$
$f(0, 34375) = -0, 035 \ldots < 0$	$]034375; 0, 375[$	$0, 359375$
$f(0, 359375) = 0, 023 \ldots > 0$	$]0, 34375; 0, 359375[$	$0, 3515625$
$f(0, 3515625) = -0, 006 \ldots < 0$	$]0, 3515625; 0, 359375[$	

Haarukointiesimerkki

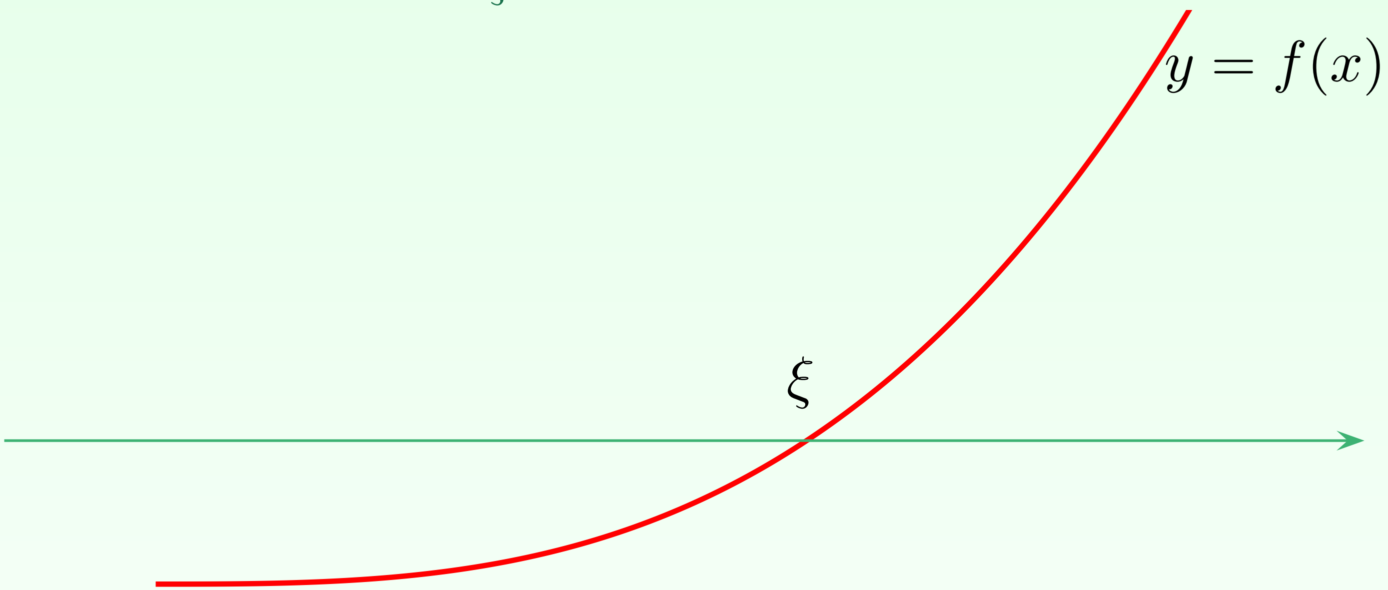
	väli	keskipiste
$f(0) = -1 < 0$		
$f(1) = 4 > 0$	$]0, 1[$	$0, 5$
$f(0, 5) = 0, 625 > 0$	$]0; 0, 5[$	$0, 25$
$f(0, 25) = -0, 359 \ldots < 0$	$]0, 25; 0, 5[$	$0, 375$
$f(0, 375) = 0, 083 \ldots > 0$	$]0, 25; 0, 375[$	$0, 3125$
$f(0, 3125) = -0, 149 \ldots < 0$	$]0, 3125; 0, 375[$	$0, 34375$
$f(0, 34375) = -0, 035 \ldots < 0$	$]034375; 0, 375[$	$0, 359375$
$f(0, 359375) = 0, 023 \ldots > 0$	$]0, 34375; 0, 359375[$	$0, 3515625$
$f(0, 3515625) = -0, 006 \ldots < 0$	$]0, 3515625; 0, 359375[$	

Koska kaikki välin $]0, 3515625; 0, 359375[$ luvut pyöristyvät $0, 4$:ksi, niin vastaus yhden desim. tarkkuudella on 0,4.

- Haarukointi
- Newtonin menetelmä
- Kiintopiste
- Kiintopistemenetelmä
- Kiintopistemenetelmän suppeneminen

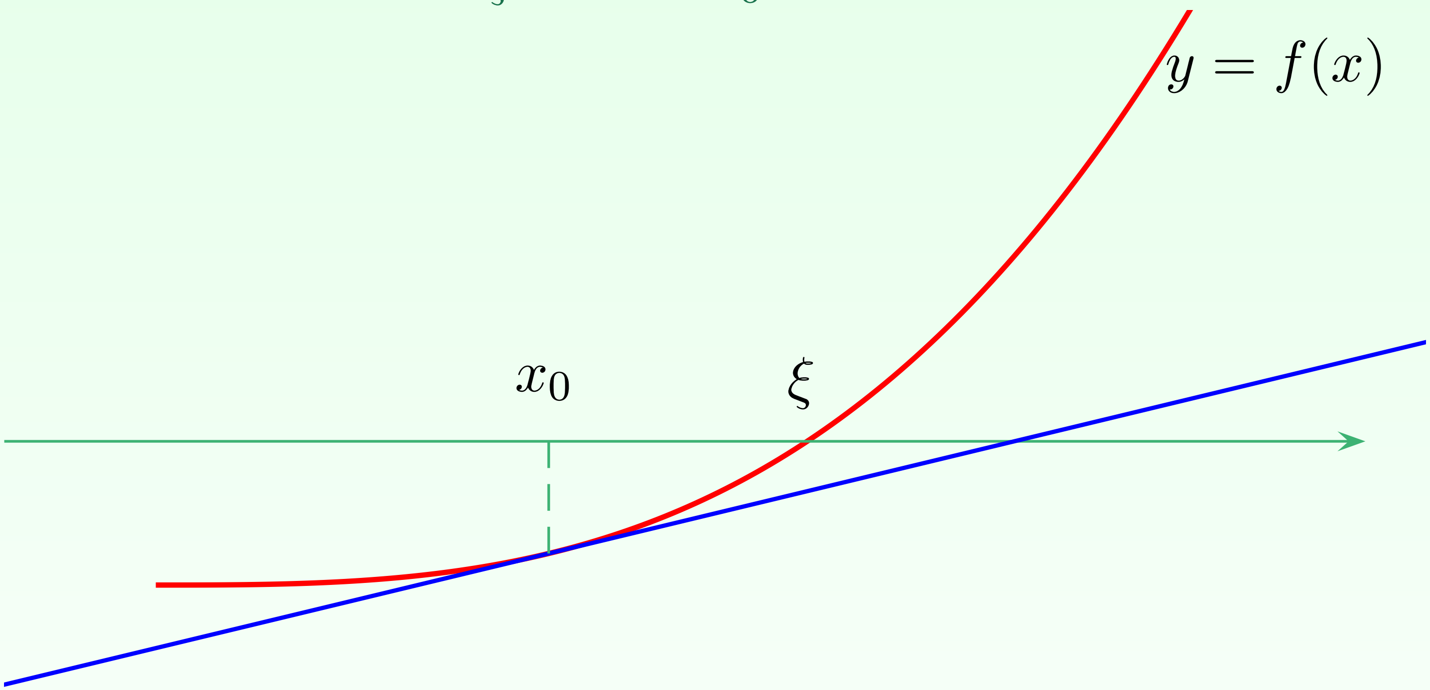
Newtonin menetelmä

Etsitään nollakohdan ξ likiarvo.



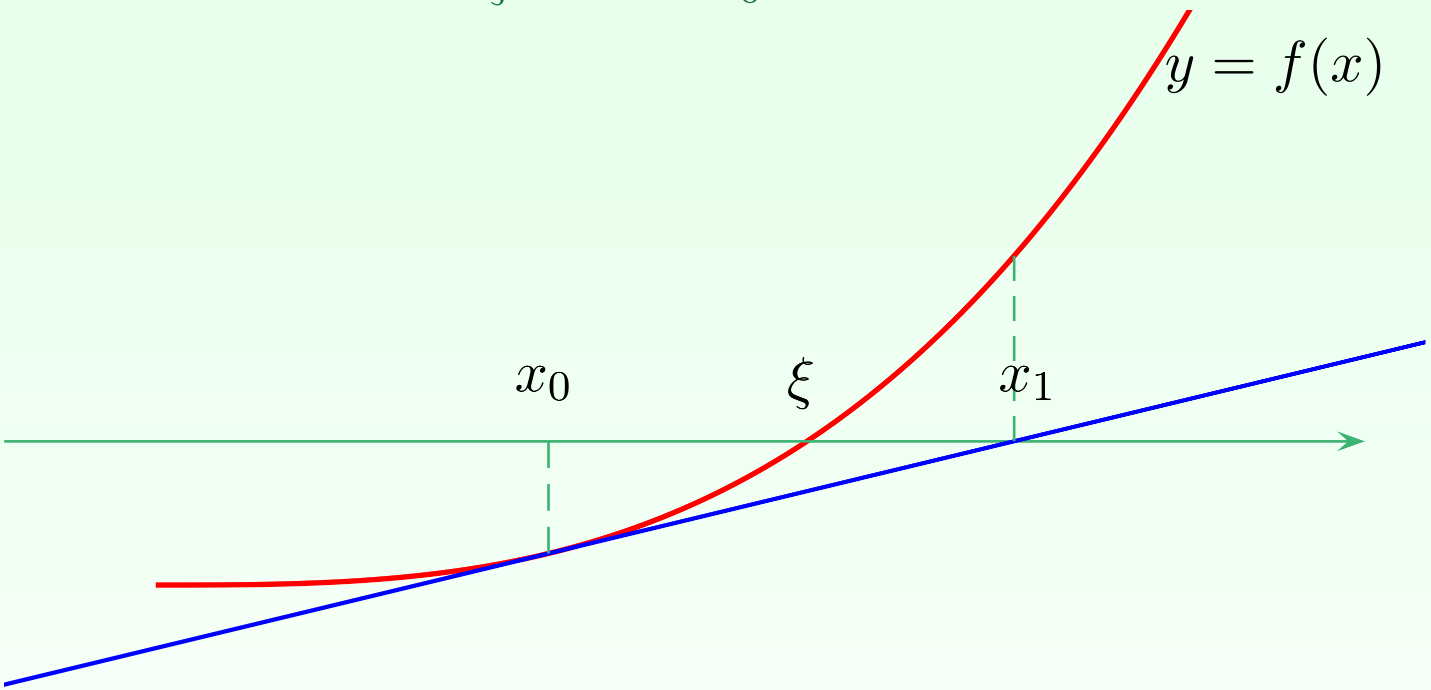
Newtonin menetelmä

Etsitään nollakohdan ξ likiarvo, x_0 on alkuarvaus.



Newtonin menetelmä

Etsitään nollakohdan ξ likiarvo, x_0 on alkuarvaus.



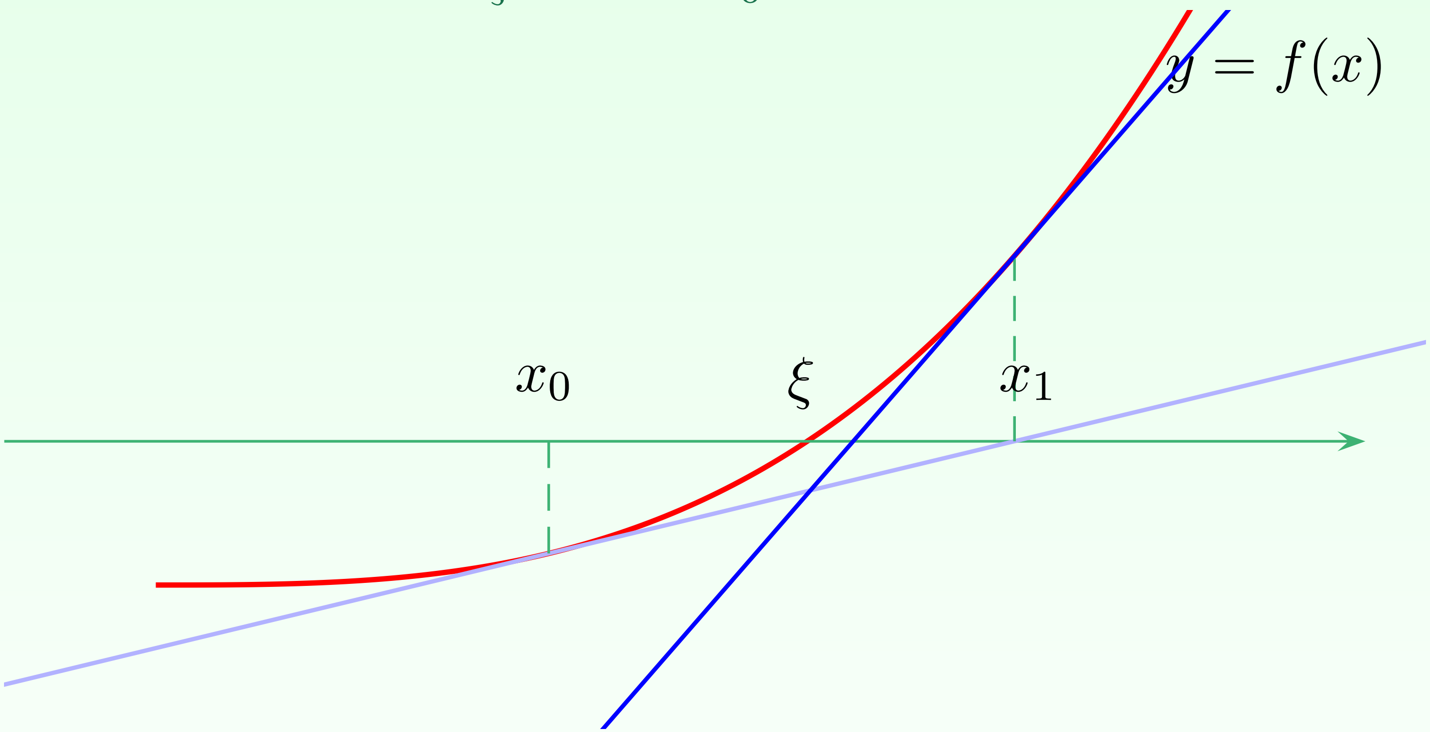
Tangentin yhtälö on $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$. Kun $y = 0$, niin yhtälöstä saadaan nollakohdan uusi likiarvo x_1:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

- Haarukointi
- Newtonin menetelmä
- Kiintopiste
- Kiintopistemenetelmä
- Kiintopistemenetelmän suppeneminen

Newtonin menetelmä

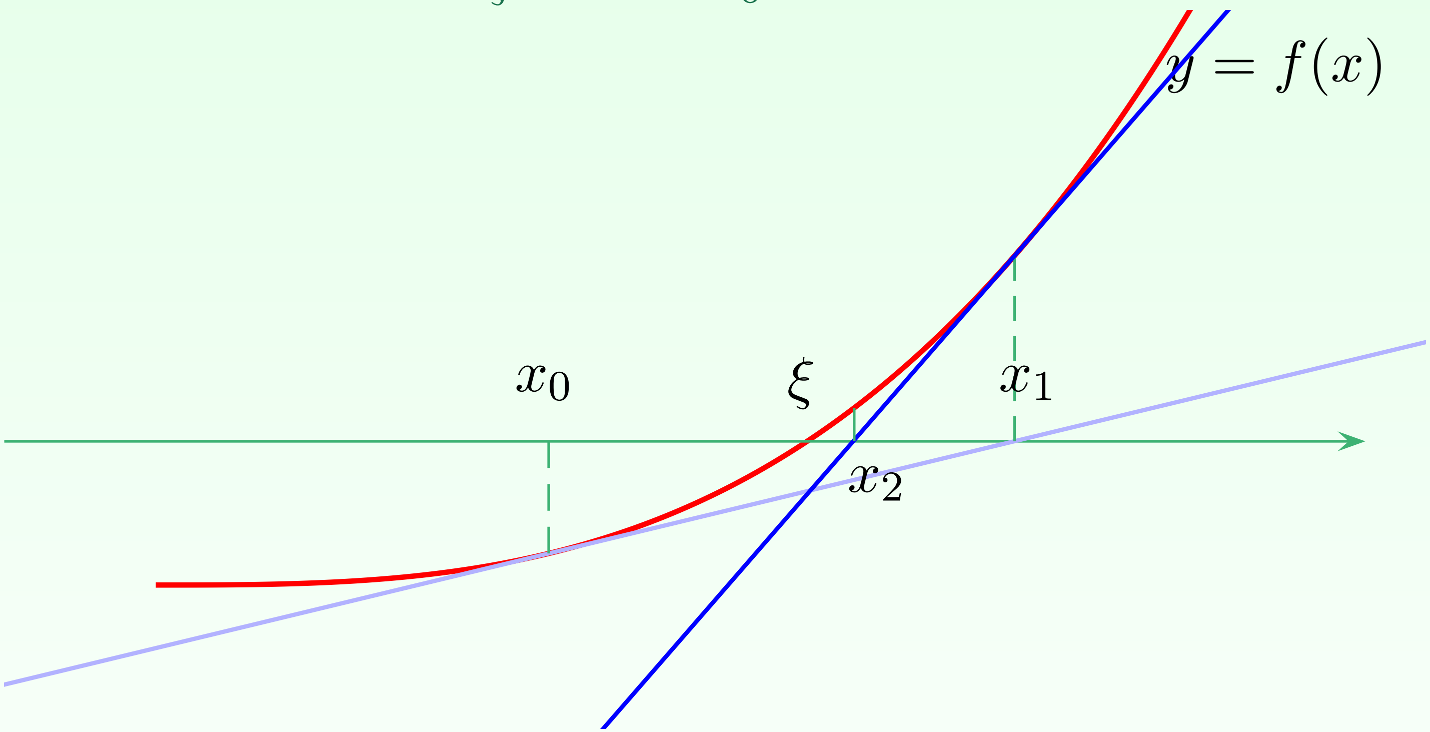
Etsitään nollakohdan ξ likiarvo, x_0 on alkuarvaus.



Newtonin menetelmä

- Haarukointi
- Newtonin menetelmä
- Kiintopiste
- Kiintopistemenetelmä
- Kiintopistemenetelmän suppeneminen

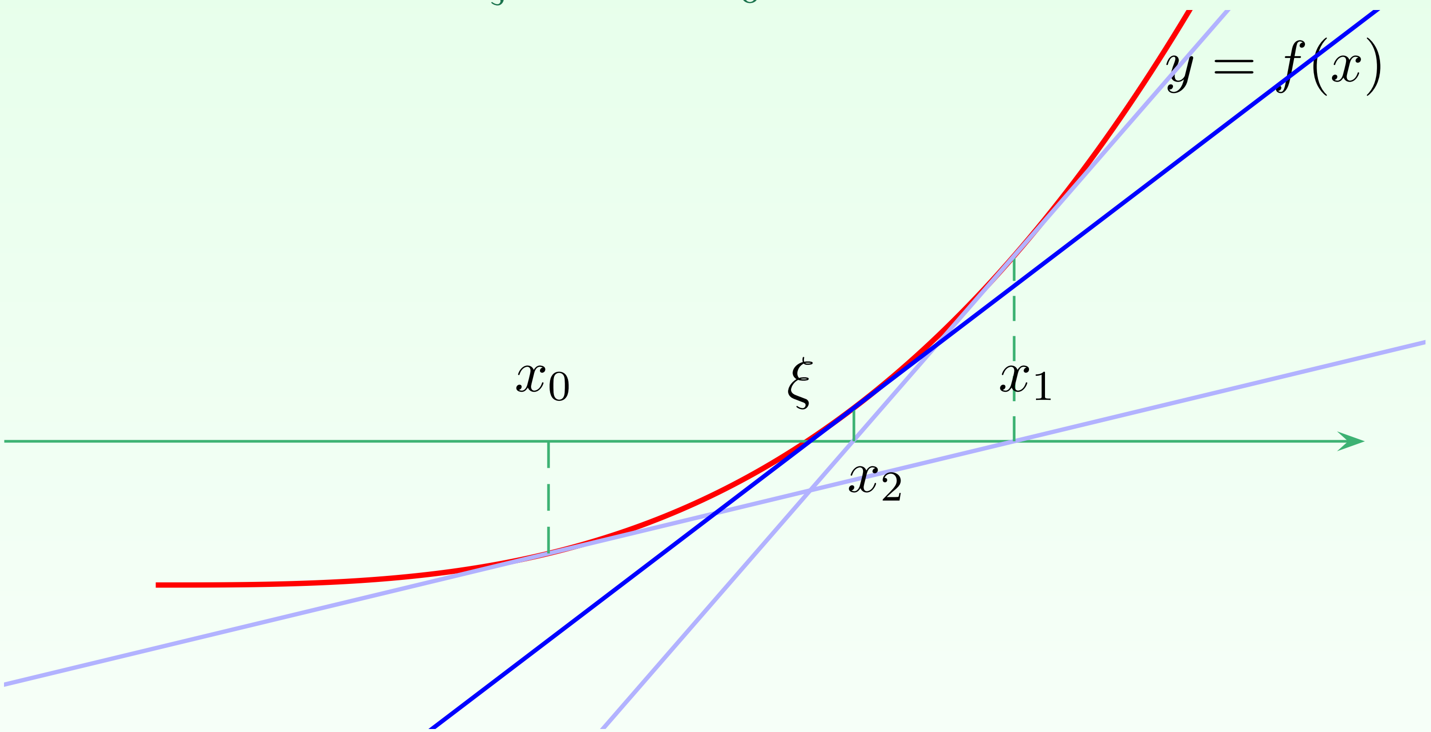
Etsitään nollakohdan ξ likiarvo, x_0 on alkuarvaus.



$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Newtonin menetelmä

Etsitään nollakohdan ξ likiarvo, x_0 on alkuarvaus.



Nollakohdan uusi likiarvo x_{n+1} saadaan edellisestä likiarvosta x_n kaavalla

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

Esimerkki

Määritä yhtälön $x^3 = 6$ ainoa ratkaisu kuuden desimaalin tarkkuudella.

Esimerkki

Määritä yhtälön $x^3 = 6$ ainoa ratkaisu kuuden desimaalin tarkkuudella.

$$f(x) = x^3 - 6 = 0,$$

Esimerkki

Määritä yhtälön $x^3 = 6$ ainoa ratkaisu kuuden desimaalin tarkkuudella.

$$f(x) = x^3 - 6 = 0, \qquad f'(x) = 3x^2,$$

Esimerkki

Määritä yhtälön $x^3 = 6$ ainoa ratkaisu kuuden desimaalin tarkkuudella.

$$f(x) = x^3 - 6 = 0, \qquad f'(x) = 3x^2, \qquad x_0 = 1,5$$

$$x_{n+1} =$$

- Haarukointi
- Newtonin menetelmä
- Kiintopiste
- Kiintopistemenetelmä
- Kiintopistemenetelmän suppeneminen

Esimerkki

Määritä yhtälön $x^3 = 6$ ainoa ratkaisu kuuden desimaalin tarkkuudella.

$$f(x) = x^3 - 6 = 0, \qquad f'(x) = 3x^2, \qquad x_0 = 1,5$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 6}{3x_n^2}$$

Esimerkki

Määritä yhtälön $x^3 = 6$ ainoa ratkaisu kuuden desimaalin tarkkuudella.

$$f(x) = x^3 - 6 = 0, \qquad f'(x) = 3x^2, \qquad x_0 = 1,5$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 6}{3x_n^2}$$

n	x_n
0	$1,5$

Esimerkki

Määritä yhtälön $x^3 = 6$ ainoa ratkaisu kuuden desimaalin tarkkuudella.

$$f(x) = x^3 - 6 = 0, \qquad f'(x) = 3x^2, \qquad x_0 = 1,5$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 6}{3x_n^2}$$

n	x_n
0	$1,5$
1	$1,5 - \frac{1,5^3 - 6}{3 \cdot 1,5^2} = 1,8888\ldots$

Esimerkki

Määritä yhtälön $x^3 = 6$ ainoa ratkaisu kuuden desimaalin tarkkuudella.

$$f(x) = x^3 - 6 = 0, \qquad f'(x) = 3x^2, \qquad x_0 = 1,5$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 6}{3x_n^2}$$

n	x_n
0	$1,5$
1	$1,5 - \frac{1,5^3-6}{3 \cdot 1,5^2} = 1,8888\ldots$
2	$1.8198\ldots$

- Haarukointi
- Newtonin menetelmä
- Kiintopiste
- Kiintopistemenetelmä
- Kiintopistemenetelmän suppeneminen

Esimerkki

Määritä yhtälön $x^3 = 6$ ainoa ratkaisu kuuden desimaalin tarkkuudella.

$$f(x) = x^3 - 6 = 0, \qquad f'(x) = 3x^2, \qquad x_0 = 1,5$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 6}{3x_n^2}$$

n	x_n
0	$1,5$
1	$1,5 - \frac{1,5^3-6}{3\cdot 1,5^2} = 1,8888\ldots$
2	$1.8198\ldots$
3	$1,8171\ldots$

- Haarukointi
- Newtonin menetelmä
- Kiintopiste
- Kiintopistemenetelmä
- Kiintopistemenetelmän suppeneminen

Esimerkki

Määritä yhtälön $x^3 = 6$ ainoa ratkaisu kuuden desimaalin tarkkuudella.

$$f(x) = x^3 - 6 = 0, \qquad f'(x) = 3x^2, \qquad x_0 = 1,5$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 6}{3x_n^2}$$

n	x_n
0	$1,5$
1	$1,5 - \frac{1,5^3-6}{3\cdot 1,5^2} = 1,8888\ldots$
2	$1.8198\ldots$
3	$1,8171\ldots$
4	$1,817120593$

Esimerkki

Määritä yhtälön $x^3 = 6$ ainoa ratkaisu kuuden desimaalin tarkkuudella.

$$f(x) = x^3 - 6 = 0, \qquad f'(x) = 3x^2, \qquad x_0 = 1,5$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 6}{3x_n^2}$$

n	x_n
0	$1,5$
1	$1,5 - \frac{1,5^3-6}{3\cdot 1,5^2} = 1,8888\ldots$
2	$1.8198\ldots$
3	$1,8171\ldots$
4	$1,817120593$
5	$1,817120593$

Esimerkki

- Haarukointi
- Newtonin menetelmä
- Kiintopiste
- Kiintopistemenetelmä
- Kiintopistemenetelmän suppeneminen

Määritä yhtälön $x^3 = 6$ ainoa ratkaisu kuuden desimaalin tarkkuudella.

$$f(x) = x^3 - 6 = 0, \qquad f'(x) = 3x^2, \qquad x_0 = 1,5$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 6}{3x_n^2}$$

n	x_n
0	$1,5$
1	$1,5 - \frac{1,5^3-6}{3 \cdot 1,5^2} = 1,8888\ldots$
2	$1.8198\ldots$
3	$1,8171\ldots$
4	$1,817120593$
5	$1,817120593$

Ratkaisu on $x \approx 1,817121$.

Esimerkki

Määritä yhtälön $x^3 = 6$ ainoa ratkaisu kuuden desimaalin tarkkuudella.

$$f(x) = x^3 - 6 = 0, \qquad f'(x) = 3x^2, \qquad x_0 = 1,5$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 6}{3x_n^2}$$

n	x_n
0	$1,5$
1	$1,5 - \frac{1,5^3-6}{3 \cdot 1,5^2} = 1,8888\ldots$
2	$1.8198\ldots$
3	$1,8171\ldots$
4	$1,817120593$
5	$1,817120593$

Ratkaisu on $x \approx 1,817121$.Koska f on jatkuva ja $f(1,8171205) < 0$ ja $f(1,8171215) > 0$, niin ratkaisu on 6 desimaalin tarkkuudella oikein.

Esimerkki laskimella (TI)

1. Talletetaan grafiikkafunktioksi Y_1 lauseke $X - \dfrac{X^3 - 6}{3X^2}$
2. Talletetaan alkuarvaus 1,5 muistipaikkaan X
3. Talletetaan grafiikkafunktion Y_1 arvo muistipaikkaan X.
4. Toistetaan painamalla Enter-näppäintä.

Siis lyhyesti:

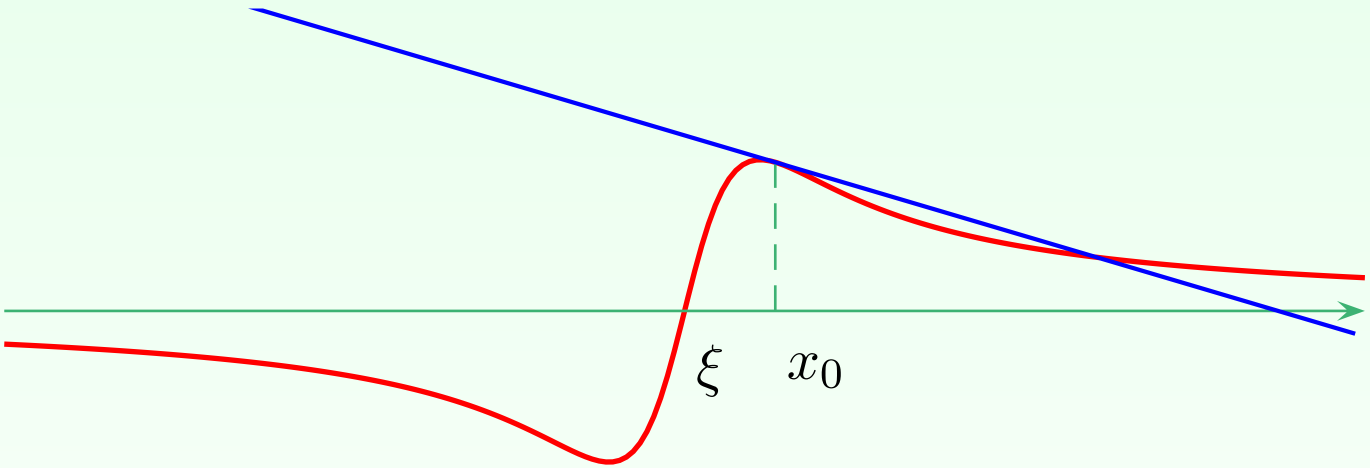
$1,5 \longrightarrow X$

$Y_1 \longrightarrow X$[1]

[1] Y_1 haetaan seuraavasti: VARS – Y-VARS – Function

Huomioita

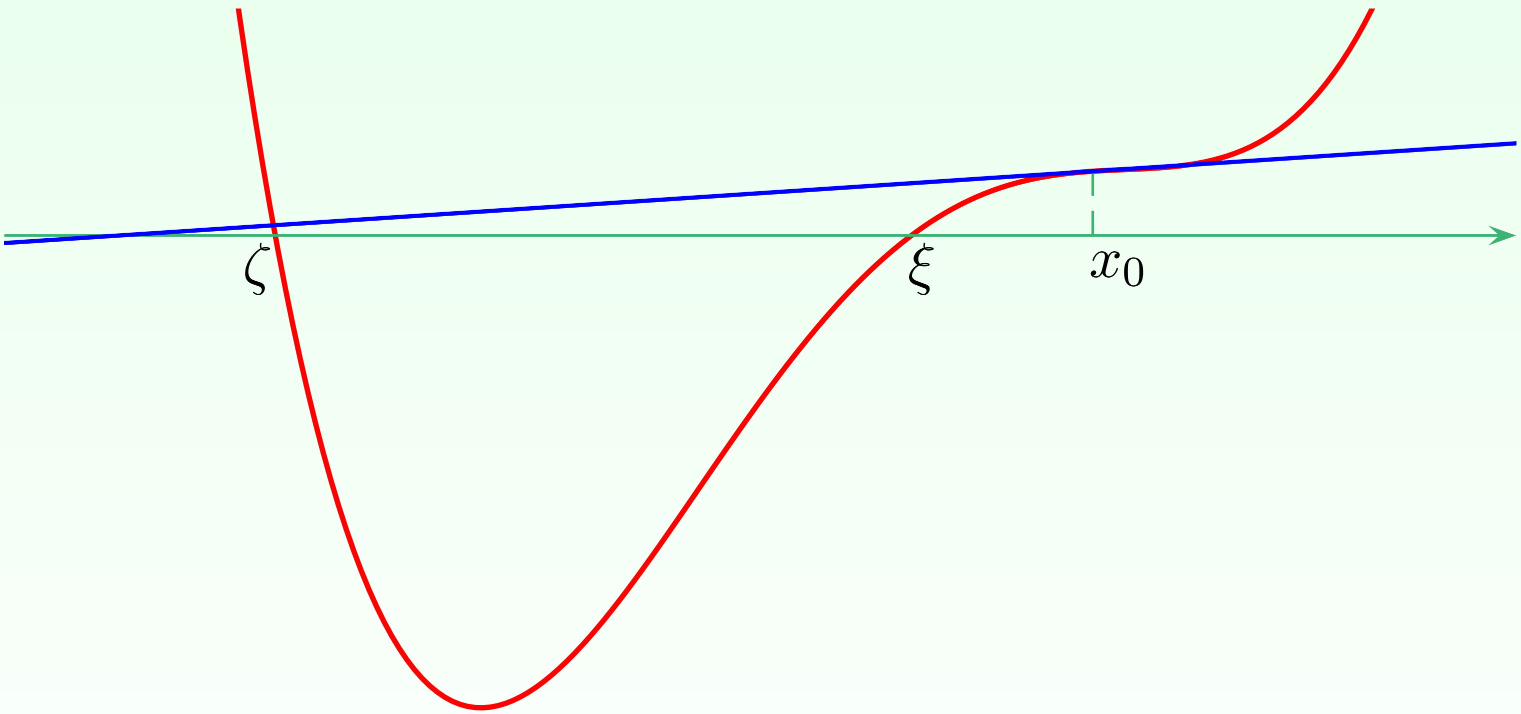
Newtonin menetelmä ei välttämättä toimi, jos alkuarvaus on huono — erityisesti derivaatan nollakohdat voivat aiheuttaa ongelmia.



Suppeneeko Newtonin menetelmä kohti nollakohtaa ξ?

Huomioita

Newtonin menetelmä ei välttämättä toimi, jos alkuarvaus on huono — erityisesti derivaatan nollakohdat voivat aiheuttaa ongelmia.



Kumpaa nollakohtaa kohti Newtonin menetelmä suppenee alkuarvolla x_0?

Esimerkki

YO-K05:15. Määritä funktion $f(x) = x \sin x$ pienin positiivinen ääriarvokohta ja vastaava ääriarvo ratkaisemalla derivaatan nollakohta Newtonin menetelmällä. Anna vastaukset viiden desimaalin tarkkuudella.

Kiintopiste

Määritelmä 1. *Funktio g on määritelty välillä I. Luku $\xi \in I$ on sen* kiintopiste*, jos $\xi = g(\xi)$.*

Kiintopiste

Määritelmä 1. *Funktio g on määritelty välillä I. Luku $\xi \in I$ on sen* kiintopiste, *jos $\xi = g(\xi)$.*

Esimerkki. Määritä funktion $g(x) = -4x^2 + 2$ kiintopisteet.

- Haarukointi
- Newtonin menetelmä
- Kiintopiste
- Kiintopistemenetelmä
- Kiintopistemenetelmän suppeneminen

Kiintopiste

Määritelmä 1. *Funktio g on määritelty välillä I. Luku $\xi \in I$ on sen* kiintopiste*, jos $\xi = g(\xi)$.*

Esimerkki. Määritä funktion $g(x) = -4x^2 + 2$ kiintopisteet.

- Algebrallisesti:

Kiintopiste

Määritelmä 1. *Funktio g on määritelty välillä I. Luku $\xi \in I$ on sen* kiintopiste*, jos $\xi = g(\xi)$.*

Esimerkki. Määritä funktion $g(x) = -4x^2 + 2$ kiintopisteet.

- Algebrallisesti: $x = -4x^2 + 2$

Kiintopiste

Määritelmä 1. *Funktio g on määritelty välillä I. Luku $\xi \in I$ on sen* kiintopiste*, jos $\xi = g(\xi)$.*

Esimerkki. Määritä funktion $g(x) = -4x^2 + 2$ kiintopisteet.

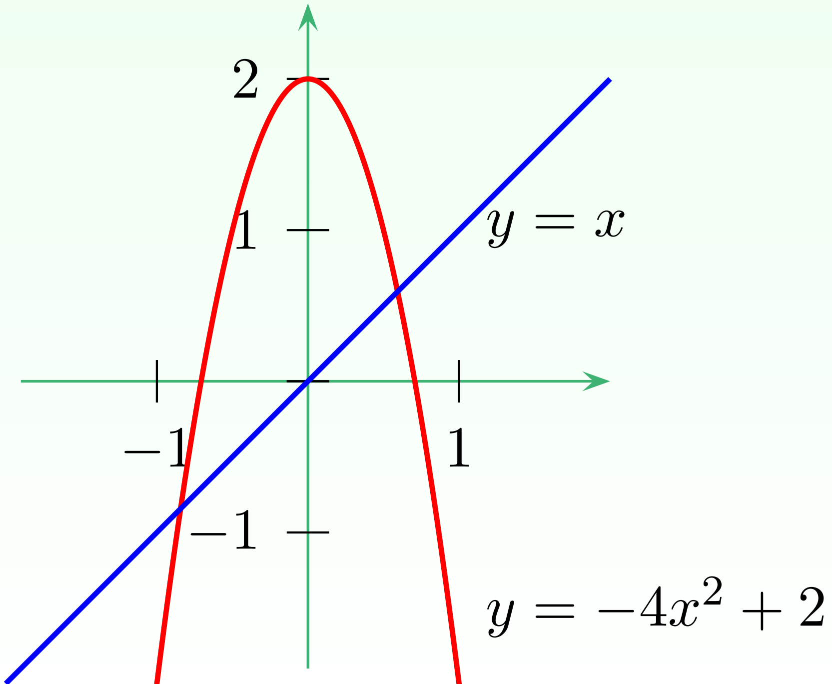
- Algebrallisesti: $x = -4x^2 + 2$
- Graafisesti:

Kiintopiste

Määritelmä 1. *Funktio g on määritelty välillä I. Luku $\xi \in I$ on sen* kiintopiste, *jos $\xi = g(\xi)$.*

Esimerkki. Määritä funktion $g(x) = -4x^2 + 2$ kiintopisteet.

- Algebrallisesti: $x = -4x^2 + 2$
- Graafisesti:



- Haarukointi
- Newtonin menetelmä
- Kiintopiste
- Kiintopistemenetelmä
- Kiintopistemenetelmän suppeneminen

Kiintopistemenetelmä

Olkoon g jatkuva funktio. Tarkastellaan iterointia

$$\boxed{x_{n+1} = g(x_n), \quad x \in \mathbb{N}}$$

Kiintopistemenetelmä

Olkoon g jatkuva funktio. Tarkastellaan iterointia

$$\boxed{x_{n+1} = g(x_n), \quad x \in \mathbb{N}}$$

Lause 1. *Jos iteroimalla saatu jono (x_n) suppenee kohti ξ:tä, ts. $lim_{n\to\infty} x_n = \xi$, niin ξ on yhtälön $x = g(x)$ ratkaisu.*

Kiintopistemenetelmä

Olkoon g jatkuva funktio. Tarkastellaan iterointia

$$\boxed{x_{n+1} = g(x_n), \quad x \in \mathbb{N}}$$

Lause 1. *Jos iteroimalla saatu jono (x_n) suppenee kohti ξ:tä, ts. $lim_{n \to \infty} x_n = \xi$, niin ξ on yhtälön $x = g(x)$ ratkaisu.*

Todistus. Jatkuvuudesta seuraa, että $lim_{n \to \infty} g(x_n) = g(\xi)$.

- Haarukointi
- Newtonin menetelmä
- Kiintopiste
- Kiintopistemenetelmä
- Kiintopistemenetelmän suppeneminen

Kiintopistemenetelmä

Olkoon g jatkuva funktio. Tarkastellaan iterointia

$$\boxed{x_{n+1} = g(x_n), \quad x \in \mathbb{N}}$$

Lause 1. *Jos iteroimalla saatu jono (x_n) suppenee kohti ξ:tä, ts. $lim_{n\to\infty} x_n = \xi$, niin ξ on yhtälön $x = g(x)$ ratkaisu.*

Todistus. Jatkuvuudesta seuraa, että $lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(\xi)$.
Toisaalta, koska $x_{n+1} = g(x_n)$, niin
$\xi = lim_{n\to\infty} x_{n+1} = lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(\xi)$.

- Haarukointi
- Newtonin menetelmä
- Kiintopiste
- Kiintopistemenetelmä
- Kiintopistemenetelmän suppeneminen

Kiintopistemenetelmä

Olkoon g jatkuva funktio. Tarkastellaan iterointia

$$\boxed{x_{n+1} = g(x_n), \quad x \in \mathbb{N}}$$

Lause 1. *Jos iteroimalla saatu jono (x_n) suppenee kohti ξ:tä, ts. $lim_{n\to\infty} x_n = \xi$, niin ξ on yhtälön $x = g(x)$ ratkaisu.*

Todistus. Jatkuvuudesta seuraa, että $lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(\xi)$. Toisaalta, koska $x_{n+1} = g(x_n)$, niin $\xi = lim_{n\to\infty} x_{n+1} = lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(\xi)$. Näin siis on $\xi = g(\xi)$

Kiintopistemenetelmä

Olkoon g jatkuva funktio. Tarkastellaan iterointia

$$\boxed{x_{n+1} = g(x_n), \quad x \in \mathbb{N}}$$

Lause 1. *Jos iteroimalla saatu jono (x_n) suppenee kohti ξ:tä, ts. $lim_{n\to\infty} x_n = \xi$, niin ξ on yhtälön $x = g(x)$ ratkaisu.*

Todistus. Jatkuvuudesta seuraa, että $lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(\xi)$. Toisaalta, koska $x_{n+1} = g(x_n)$, niin $\xi = lim_{n\to\infty} x_{n+1} = lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(\xi)$. Näin siis on $\xi = g(\xi)$ ja ξ on yhtälön $x = g(x)$ ratkaisu. $\square$

Esimerkki kiintopistemenetelmästä

Etsi yhtälön $e^{-x} - x = 0$ kaikkien ratkaisujen likiarvot kahden desimaalin tarkkuudella.

Esimerkki kiintopistemenetelmästä

Etsi yhtälön $e^{-x} - x = 0$ kaikkien ratkaisujen likiarvot kahden desimaalin tarkkuudella.

1. $f(x) = e^{-x} - x$ on jatkuva ja derivoituva $\mathbb{R}$:ssä.

Esimerkki kiintopistemenetelmästä

Etsi yhtälön $e^{-x} - x = 0$ kaikkien ratkaisujen likiarvot kahden desimaalin tarkkuudella.

1. $f(x) = e^{-x} - x$ on jatkuva ja derivoituva $\mathbb{R}$:ssä.
2. $f(0) = 1 > 0$ ja $f(1) = \frac{1}{e} - 1 < 0$

Esimerkki kiintopistemenetelmästä

Etsi yhtälön $e^{-x} - x = 0$ kaikkien ratkaisujen likiarvot kahden desimaalin tarkkuudella.

1. $f(x) = e^{-x} - x$ on jatkuva ja derivoituva $\mathbb{R}$:ssä.
2. $f(0) = 1 > 0$ ja $f(1) = \frac{1}{e} - 1 < 0$
3. $f'(x) = -e^{-x} - 1 < 0$, kun $x \in \mathbb{R}$, joten f aidosti vähenevä.

Esimerkki kiintopistemenetelmästä

Etsi yhtälön $e^{-x} - x = 0$ kaikkien ratkaisujen likiarvot kahden desimaalin tarkkuudella.

1. $f(x) = e^{-x} - x$ on jatkuva ja derivoituva $\mathbb{R}$:ssä.
2. $f(0) = 1 > 0$ ja $f(1) = \frac{1}{e} - 1 < 0$
3. $f'(x) = -e^{-x} - 1 < 0$, kun $x \in \mathbb{R}$, joten f aidosti vähenevä.

Täten funktiolla f on tasan yksi nollakohta ja se on välillä]0,1[.

Esimerkki kiintopistemenetelmästä

$$f(x) = e^{-x} - x = 0 \Leftrightarrow x = e^{-x},$$

Esimerkki kiintopistemenetelmästä

$f(x) = e^{-x} - x = 0 \Leftrightarrow x = e^{-x}$, joten iterointikaava on
$\boxed{x_{n+1} = e^{-x_n}}$. 2

Esimerkki kiintopistemenetelmästä

$f(x) = e^{-x} - x = 0 \Leftrightarrow x = e^{-x}$, joten iterointikaava on $\boxed{x_{n+1} = e^{-x_n}}$. [2] Valitaan alkuarvaukseksi $x_0 = 0.5$.

n	x_n
0	0.5

- Haarukointi
- Newtonin menetelmä
- Kiintopiste
- Kiintopistemenetelmä
- Kiintopistemenetelmän suppeneminen

Esimerkki kiintopistemenetelmästä

$f(x) = e^{-x} - x = 0 \Leftrightarrow x = e^{-x}$, joten iterointikaava on $\boxed{x_{n+1} = e^{-x_n}}$.[2] Valitaan alkuarvaukseksi $x_0 = 0.5$.

n	x_n
0	0.5
1	$e^{-0,5} = 0.606\dots$

- Haarukointi
- Newtonin menetelmä
- Kiintopiste
- Kiintopistemenetelmä
- Kiintopistemenetelmän suppeneminen

Esimerkki kiintopistemenetelmästä

$f(x) = e^{-x} - x = 0 \Leftrightarrow x = e^{-x}$, joten iterointikaava on $\boxed{x_{n+1} = e^{-x_n}}$. [2] Valitaan alkuarvaukseksi $x_0 = 0.5$.

n	x_n
0	0.5
1	$e^{-0,5} = 0.606\ldots$
2	0.545 . . .

Esimerkki kiintopistemenetelmästä

$f(x) = e^{-x} - x = 0 \Leftrightarrow x = e^{-x}$, joten iterointikaava on $\boxed{x_{n+1} = e^{-x_n}}$. [2] Valitaan alkuarvaukseksi $x_0 = 0.5$.

n	x_n
0	0.5
1	$e^{-0,5} = 0.606\ldots$
2	0.545 . . .
3	0.579 . . .

Esimerkki kiintopistemenetelmästä

$f(x) = e^{-x} - x = 0 \Leftrightarrow x = e^{-x}$, joten iterointikaava on $\boxed{x_{n+1} = e^{-x_n}}$. 2 Valitaan alkuarvaukseksi $x_0 = 0.5$.

n	x_n
0	0.5
1	$e^{-0,5} = 0.606\ldots$
2	0.545 . . .
3	0.579 . . .
4	0.560 . . .

Esimerkki kiintopistemenetelmästä

$f(x) = e^{-x} - x = 0 \Leftrightarrow x = e^{-x}$, joten iterointikaava on $\boxed{x_{n+1} = e^{-x_n}}$. [2] Valitaan alkuarvaukseksi $x_0 = 0.5$.

n	x_n
0	0.5
1	$e^{-0,5} = 0.606\ldots$
2	0.545 . . .
3	0.579 . . .
4	0.560 . . .
5	0.571 . . .

- Haarukointi
- Newtonin menetelmä
- Kiintopiste
- Kiintopistemenetelmä
- Kiintopistemenetelmän suppeneminen

Esimerkki kiintopistemenetelmästä

$f(x) = e^{-x} - x = 0 \Leftrightarrow x = e^{-x}$, joten iterointikaava on $\boxed{x_{n+1} = e^{-x_n}}$. [2] Valitaan alkuarvaukseksi $x_0 = 0.5$.

n	x_n
0	0.5
1	$e^{-0,5} = 0.606\ldots$
2	0.545 . . .
3	0.579 . . .
4	0.560 . . .
5	0.571 . . .
6	0.564 . . .

Esimerkki kiintopistemenetelmästä

$f(x) = e^{-x} - x = 0 \Leftrightarrow x = e^{-x}$, joten iterointikaava on $\boxed{x_{n+1} = e^{-x_n}}$. [2] Valitaan alkuarvaukseksi $x_0 = 0.5$.

n	x_n
0	0.5
1	$e^{-0,5} = 0.606\ldots$
2	0.545 . . .
3	0.579 . . .
4	0.560 . . .
5	0.571 . . .
6	0.564 . . .
7	0.568 . . .

Esimerkki kiintopistemenetelmästä

$f(x) = e^{-x} - x = 0 \Leftrightarrow x = e^{-x}$, joten iterointikaava on $\boxed{x_{n+1} = e^{-x_n}}$. [2] Valitaan alkuarvaukseksi $x_0 = 0.5$.

n	x_n
0	0.5
1	$e^{-0,5} = 0.606\ldots$
2	0.545 . . .
3	0.579 . . .
4	0.560 . . .
5	0.571 . . .
6	0.564 . . .
7	0.568 . . .
8	0.566 . . .

Esimerkki kiintopistemenetelmästä

$f(x) = e^{-x} - x = 0 \Leftrightarrow x = e^{-x}$, joten iterointikaava on $\boxed{x_{n+1} = e^{-x_n}}$. [2] Valitaan alkuarvaukseksi $x_0 = 0.5$.

n	x_n
0	0.5
1	$e^{-0,5} = 0.606\ldots$
2	0.545 . . .
3	0.579 . . .
4	0.560 . . .
5	0.571 . . .
6	0.564 . . .
7	0.568 . . .
8	0.566 . . .

Koska $f(0,565) > 0$ ja $f(0,575) < 0$,

Esimerkki kiintopistemenetelmästä

$f(x) = e^{-x} - x = 0 \Leftrightarrow x = e^{-x}$, joten iterointikaava on $\boxed{x_{n+1} = e^{-x_n}}$. [2] Valitaan alkuarvaukseksi $x_0 = 0.5$.

n	x_n
0	0.5
1	$e^{-0,5} = 0.606\ldots$
2	0.545 . . .
3	0.579 . . .
4	0.560 . . .
5	0.571 . . .
6	0.564 . . .
7	0.568 . . .
8	0.566 . . .

Koska $f(0,565) > 0$ ja $f(0,575) < 0$,niin nollakohta on välillä]0,565; 0,575[

Esimerkki kiintopistemenetelmästä

$f(x) = e^{-x} - x = 0 \Leftrightarrow x = e^{-x}$, joten iterointikaava on $\boxed{x_{n+1} = e^{-x_n}}$. [2] Valitaan alkuarvaukseksi $x_0 = 0.5$.

n	x_n
0	0.5
1	$e^{-0,5} = 0.606\ldots$
2	0.545 . . .
3	0.579 . . .
4	0.560 . . .
5	0.571 . . .
6	0.564 . . .
7	0.568 . . .
8	0.566 . . .

Koska $f(0,565) > 0$ ja $f(0,575) < 0$,niin nollakohta on välillä]0,565; 0,575[ja siten $x \approx 0,57$.

[2] Tai $-x = \ln x \Leftrightarrow x = -\ln x$

Kiintopistemenetelmän suppeneminen

Esimerkki. Etsi yhtälön $x^3 - x + 1 = 0$ ainoan ratkaisun likiarvo 4 desimaalin tarkkuudella.

Valitaan alkuarvaukseksi -1. Miten iteroitava funktio g kannattaa valita?

Kiintopistemenetelmän suppeneminen

Esimerkki. Etsi yhtälön $x^3 - x + 1 = 0$ ainoan ratkaisun likiarvo 4 desimaalin tarkkuudella.

Valitaan alkuarvaukseksi -1. Miten iteroitava funktio g kannattaa valita?

1. Olkoon $x = x^3 + 1$. Suppeneeko iterointi?

Kiintopistemenetelmän suppeneminen

Esimerkki. Etsi yhtälön $x^3 - x + 1 = 0$ ainoan ratkaisun likiarvo 4 desimaalin tarkkuudella.

Valitaan alkuarvaukseksi -1. Miten iteroitava funktio g kannattaa valita?

1. Olkoon $x = x^3 + 1$. Suppeneeko iterointi? Ei!

Kiintopistemenetelmän suppeneminen

Esimerkki. Etsi yhtälön $x^3 - x + 1 = 0$ ainoan ratkaisun likiarvo 4 desimaalin tarkkuudella.

Valitaan alkuarvaukseksi -1. Miten iteroitava funktio g kannattaa valita?

1. Olkoon $x = x^3 + 1$. Suppeneeko iterointi? Ei!
2. $x = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}$. Suppeneeko iterointi?

Kiintopistemenetelmän suppeneminen

Esimerkki. Etsi yhtälön $x^3 - x + 1 = 0$ ainoan ratkaisun likiarvo 4 desimaalin tarkkuudella.

Valitaan alkuarvaukseksi -1. Miten iteroitava funktio g kannattaa valita?

1. Olkoon $x = x^3 + 1$. Suppeneeko iterointi? Ei!
2. $x = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$. Suppeneeko iterointi? Ei!

- Haarukointi
- Newtonin menetelmä
- Kiintopiste
- Kiintopistemenetelmä
- Kiintopistemenetelmän suppeneminen

Kiintopistemenetelmän suppeneminen

Esimerkki. Etsi yhtälön $x^3 - x + 1 = 0$ ainoan ratkaisun likiarvo 4 desimaalin tarkkuudella.

Valitaan alkuarvaukseksi -1. Miten iteroitava funktio g kannattaa valita?

1. Olkoon $x = x^3 + 1$. Suppeneeko iterointi? Ei!
2. $x = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}$. Suppeneeko iterointi? Ei!
3. $x = \sqrt[3]{x - 1}$ Suppeneeko iterointi?

Kiintopistemenetelmän suppeneminen

Esimerkki. Etsi yhtälön $x^3 - x + 1 = 0$ ainoan ratkaisun likiarvo 4 desimaalin tarkkuudella.

Valitaan alkuarvaukseksi -1. Miten iteroitava funktio g kannattaa valita?

1. Olkoon $x = x^3 + 1$. Suppeneeko iterointi? Ei!
2. $x = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}$. Suppeneeko iterointi? Ei!
3. $x = \sqrt[3]{x-1}$ Suppeneeko iterointi? Kyllä! Ratkaisu on $x \approx -1{,}3247$.

Voidaanko suppenemiselle antaa jokin ehto?

⋆Kiintopistemenetelmän suppeneminen

Määritelmä 2. *Välillä I määritelty funktio g on* kutistava*, jos on olemassa vakio $k \in]0,1[$ siten, että*

$$|g(x) - g(y)| \leq k\,|x - y| \tag{1}$$

kaikilla arvoilla $x, y \in I$.

⋆Kiintopistemenetelmän suppeneminen

Määritelmä 2. *Välillä I määritelty funktio g on* kutistava*, jos on olemassa vakio $k \in]0,1[$ siten, että*

$$|g(x) - g(y)| \leq k\,|x - y| \tag{1}$$

kaikilla arvoilla $x, y \in I$.

Lause 2. *Jos g on välillä $[a,b]$ määritelty kutistava funktio, niin g:llä on tasan yksi kiintopiste ja iteraatio*

$$\begin{aligned} x_0 &\in [a,b] \\ x_{n+1} &= g(x_n) \end{aligned}$$

suppenee kohti tätä kiintopistettä.

⋆Kiintopistemenetelmän suppeneminen

Määritelmä 2. *Välillä I määritelty funktio g on kutistava, jos on olemassa vakio $k \in]0,1[$ siten, että*

$$|g(x) - g(y)| \leq k\,|x - y| \tag{1}$$

kaikilla arvoilla $x, y \in I$.

Lause 2. *Jos g on välillä $[a, b]$ määritelty kutistava funktio, niin g:llä on tasan yksi kiintopiste ja iteraatio*

$$x_0 \in [a, b]$$
$$x_{n+1} = g(x_n)$$

suppenee kohti tätä kiintopistettä.

Määritelmän ehto 1 takaa siis kiintopistemenetelmän suppenemisen.

- Haarukointi
- Newtonin menetelmä
- Kiintopiste
- Kiintopistemenetelmä
- Kiintopistemenetelmän suppeneminen

⋆Kiintopistemenetelmän suppeneminen

Väliarvolauseen nojalla

⋆Kiintopistemenetelmän suppeneminen

Väliarvolauseen nojalla

$$|g(x) - g(y)| = \left|g'(\xi)\right| |x - y| , \quad \xi \in]x, y[$$

⋆Kiintopistemenetelmän suppeneminen

Väliarvolauseen nojalla

$$|g(x) - g(y)| = \left|g'(\xi)\right| |x - y|, \quad \xi \in]x, y[$$

Jos siis voidaan osoittaa, että jollakin välillä $[a, b]$ on $|g'(\xi)| < 1 \quad (\forall \xi \in]a, b[)$,

⋆Kiintopistemenetelmän suppeneminen

Väliarvolauseen nojalla

$$|g(x) - g(y)| = \left|g'(\xi)\right| |x - y| \,, \quad \xi \in]x, y[$$

Jos siis voidaan osoittaa, että jollakin välillä $[a, b]$ on $|g'(\xi)| < 1 \quad (\forall \xi \in]a, b[)$, niin yhtälöllä $x = g(x)$ on tällä välillä tasan yksi ratkaisu ja kiintopistemenetelmä suppenee kaikilla alkuarvauksilla $x_0 \in [a, b]$ tätä kohti.

⋆Kiintopistemenetelmän suppeneminen

Väliarvolauseen nojalla

$$|g(x) - g(y)| = \left|g'(\xi)\right| |x - y| , \quad \xi \in]x, y[$$

Jos siis voidaan osoittaa, että jollakin välillä $[a, b]$ on $|g'(\xi)| < 1 \quad (\forall \xi \in]a, b[)$, niin yhtälöllä $x = g(x)$ on tällä välillä tasan yksi ratkaisu ja kiintopistemenetelmä suppenee kaikilla alkuarvauksilla $x_0 \in [a, b]$ tätä kohti.

Esimerkki. Osoita, että yhtälön $x^3 - x + 1 = 0$ välillä $[-2, -1]$ oleva ratkaisu löydetään kiintopistemenetelmällä, kun yhtälö kirjoitetaan muotoon $x = \sqrt[3]{x - 1}$.

⋆Kiintopistemenetelmän suppeneminen

Väliarvolauseen nojalla

$$|g(x) - g(y)| = \left|g'(\xi)\right| |x - y| , \quad \xi \in]x, y[$$

Jos siis voidaan osoittaa, että jollakin välillä $[a, b]$ on $|g'(\xi)| < 1 \quad (\forall \xi \in]a, b[)$, niin yhtälöllä $x = g(x)$ on tällä välillä tasan yksi ratkaisu ja kiintopistemenetelmä suppenee kaikilla alkuarvauksilla $x_0 \in [a, b]$ tätä kohti.

Esimerkki. Osoita, että yhtälön $x^3 - x + 1 = 0$ välillä $[-2, -1]$ oleva ratkaisu löydetään kiintopistemenetelmällä, kun yhtälö kirjoitetaan muotoon $x = \sqrt[3]{x - 1}$.

Olkoon $g(x) = \sqrt[3]{x - 1}$.

⋆Kiintopistemenetelmän suppeneminen

Väliarvolauseen nojalla

$$|g(x)-g(y)| = \left|g'(\xi)\right| |x-y|, \quad \xi \in]x,y[$$

Jos siis voidaan osoittaa, että jollakin välillä $[a,b]$ on $|g'(\xi)| < 1 \quad (\forall \xi \in]a,b[)$, niin yhtälöllä $x = g(x)$ on tällä välillä tasan yksi ratkaisu ja kiintopistemenetelmä suppenee kaikilla alkuarvauksilla $x_0 \in [a,b]$ tätä kohti.

Esimerkki. Osoita, että yhtälön $x^3 - x + 1 = 0$ välillä $[-2,-1]$ oleva ratkaisu löydetään kiintopistemenetelmällä, kun yhtälö kirjoitetaan muotoon $x = \sqrt[3]{x-1}$.

Olkoon $g(x) = \sqrt[3]{x-1}$.

$$\left|g'(x)\right| =$$

- Haarukointi
- Newtonin menetelmä
- Kiintopiste
- Kiintopistemenetelmä
- Kiintopistemenetelmän suppeneminen

⋆Kiintopistemenetelmän suppeneminen

Väliarvolauseen nojalla

$$|g(x) - g(y)| = \left|g'(\xi)\right| |x - y|, \quad \xi \in]x, y[$$

Jos siis voidaan osoittaa, että jollakin välillä $[a, b]$ on $|g'(\xi)| < 1 \quad (\forall \xi \in]a, b[)$, niin yhtälöllä $x = g(x)$ on tällä välillä tasan yksi ratkaisu ja kiintopistemenetelmä suppenee kaikilla alkuarvauksilla $x_0 \in [a, b]$ tätä kohti.

Esimerkki. Osoita, että yhtälön $x^3 - x + 1 = 0$ välillä $[-2, -1]$ oleva ratkaisu löydetään kiintopistemenetelmällä, kun yhtälö kirjoitetaan muotoon $x = \sqrt[3]{x - 1}$.

Olkoon $g(x) = \sqrt[3]{x - 1}$.

$$\left|g'(x)\right| = \left|\frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}\right|$$

⋆Kiintopistemenetelmän suppeneminen

Väliarvolauseen nojalla

$$|g(x) - g(y)| = \left|g'(\xi)\right| |x - y| , \quad \xi \in]x, y[$$

Jos siis voidaan osoittaa, että jollakin välillä $[a, b]$ on $|g'(\xi)| < 1 \quad (\forall \xi \in]a, b[)$, niin yhtälöllä $x = g(x)$ on tällä välillä tasan yksi ratkaisu ja kiintopistemenetelmä suppenee kaikilla alkuarvauksilla $x_0 \in [a, b]$ tätä kohti.

Esimerkki. Osoita, että yhtälön $x^3 - x + 1 = 0$ välillä $[-2, -1]$ oleva ratkaisu löydetään kiintopistemenetelmällä, kun yhtälö kirjoitetaan muotoon $x = \sqrt[3]{x - 1}$.

Olkoon $g(x) = \sqrt[3]{x - 1}$.

$$\left|g'(x)\right| = \left|\frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}\right| \leq \frac{1}{3\sqrt[3]{(-1-1)^2}} < 1, \forall x \in [-2, -1].$$

⋆Kiintopistemenetelmän suppeneminen

Väliarvolauseen nojalla

$$|g(x) - g(y)| = \left|g'(\xi)\right| |x - y|, \quad \xi \in]x, y[$$

Jos siis voidaan osoittaa, että jollakin välillä $[a, b]$ on $|g'(\xi)| < 1 \quad (\forall \xi \in]a, b[)$, niin yhtälöllä $x = g(x)$ on tällä välillä tasan yksi ratkaisu ja kiintopistemenetelmä suppenee kaikilla alkuarvauksilla $x_0 \in [a, b]$ tätä kohti.

Esimerkki. Osoita, että yhtälön $x^3 - x + 1 = 0$ välillä $[-2, -1]$ oleva ratkaisu löydetään kiintopistemenetelmällä, kun yhtälö kirjoitetaan muotoon $x = \sqrt[3]{x - 1}$.

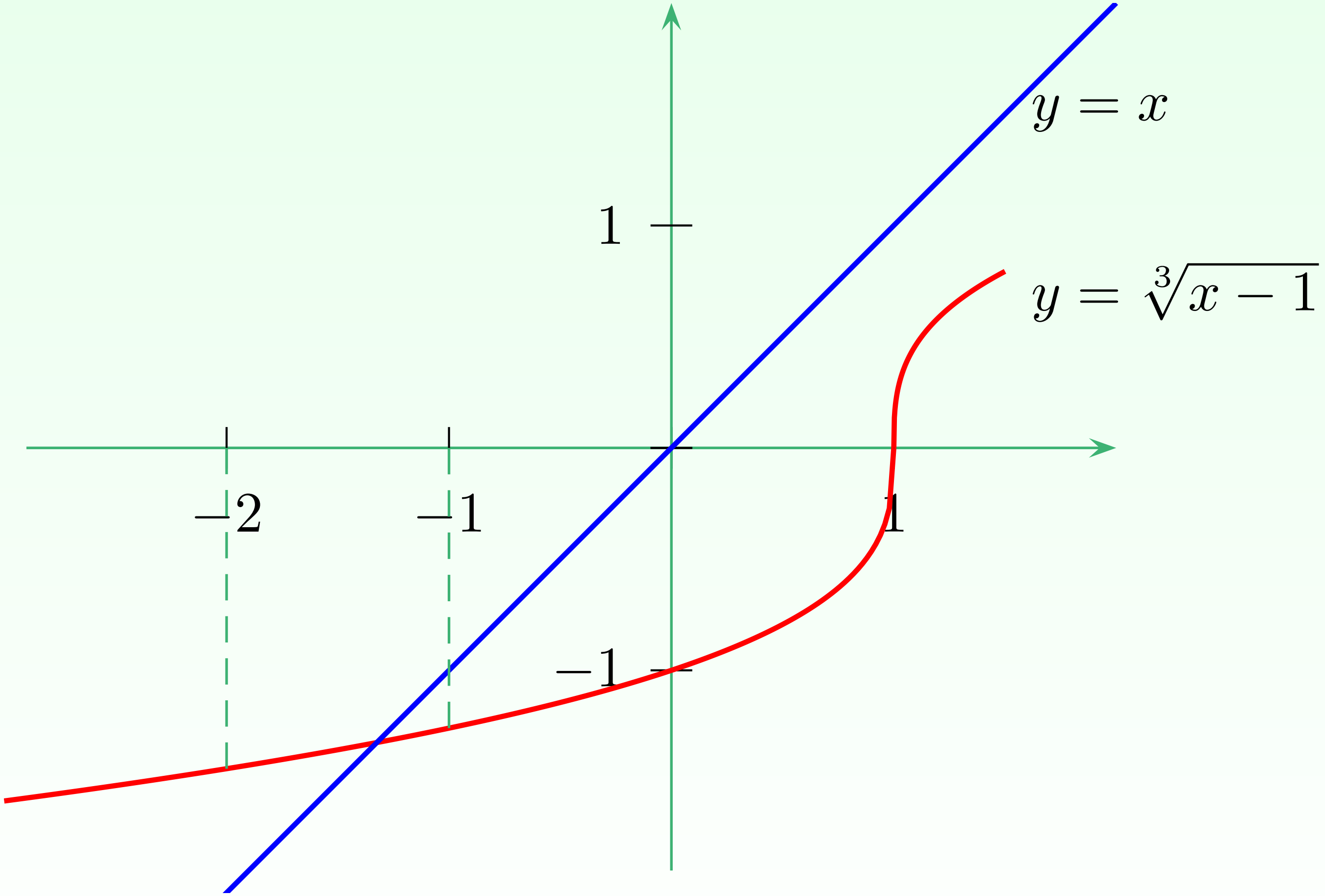
Olkoon $g(x) = \sqrt[3]{x - 1}$.

$$\left|g'(x)\right| = \left|\frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}\right| \leq \frac{1}{3\sqrt[3]{(-1-1)^2}} < 1, \forall x \in [-2, -1].$$

Täten kiintopistemenetelmä suppenee kaikilla alkuarvauksilla $x_0 \in [-2, -1]$.

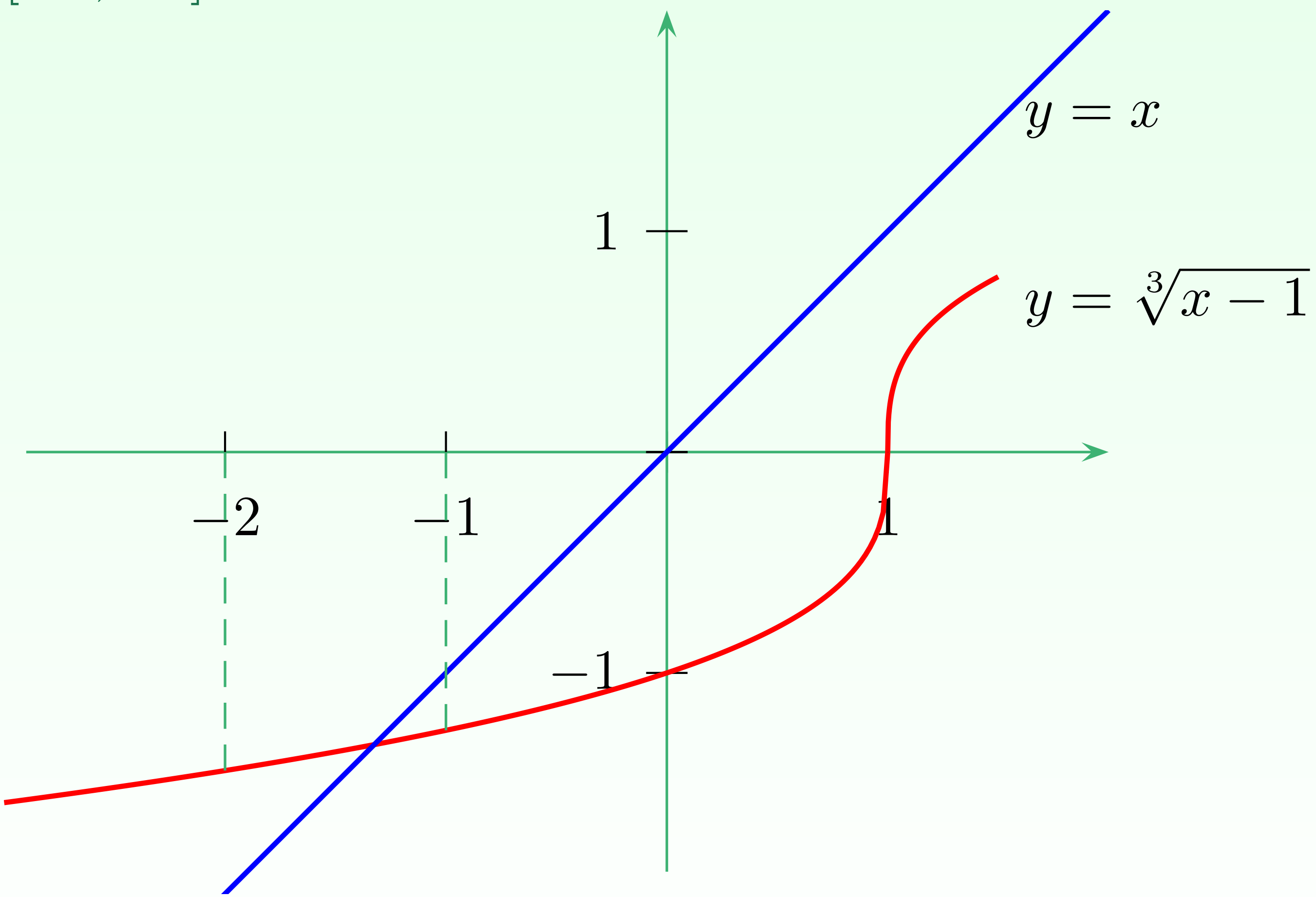
Kiintopistemenetelmän suppeneminen

Miten kuviosta nähdään, että iterointi $x = \sqrt[3]{x-1}$ suppenee välillä $[-2, -1]$?



Kiintopistemenetelmän suppeneminen

Miten kuviosta nähdään, että iterointi $x = \sqrt[3]{x-1}$ suppenee välillä $[-2, -1]$?



Käyrän $g(x) = \sqrt[3]{x-1}$ tangentin kulmakertoimen itseisarvo välillä $[-2, -1]$ on <1.