# Yhtälön numeerinen ratkaiseminen

Hannu Lehto
Lahden Lyseon lukio

### Haarukointi

Jos funktio $f(x)$
1. on jatkuva välillä $[a, b]$ ja
2. $f(a)$ ja $f(b)$ ovat erimerkkiset, niin

funktiolla $f$ on välillä $]a, b[$ ainakin yksi nollakohta.

Jos lisäksi funktio $f$ on aidosti monotoninen välillä $[a, b]$, niin nollakohtia on tasan yksi.

2 / 18

### Haarukointiesimerkki

Osoita, että yhtälöllä $x^3 + 2x^2 + 2x = 1$ on täsmälleen yksi ratkaisu. Etsi ratkaisun likiarvo yhden desimaalin tarkkuudella.

$f(x) = x^3 + 2x^2 + 2x - 1 = 0$
1. $f(x)$ on polynomifunktiona jatkuva ja derivoituva $\mathbb{R}$:ssä
2. $f(0) < 0$ ja $f(1) > 0$
3. $f'(x) = 3x^2 + 4x + 2 > 0$ $\mathbb{R}$:ssä (miksi?), joten $f$ on aidosti kasvava.

Täten $f(x)$:llä on välillä $]0, 1[$ yksi nollakohta eikä muita ole, joten yhtälöllä $x^3 + 2x^2 + 2x = 1$ tasan yksi ratkaisu.

3 / 18

### Haarukointiesimerkki

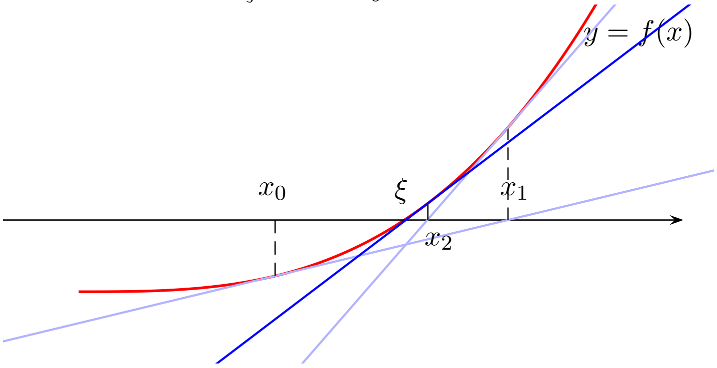
| | väli | keskipiste |
|---|---|---|
| $f(0) = -1 < 0$ | | |
| $f(1) = 4 > 0$ | $]0, 1[$ | $0, 5$ |
| $f(0, 5) = 0, 625 > 0$ | $]0; 0, 5[$ | $0, 25$ |
| $f(0, 25) = -0, 359 \ldots < 0$ | $]0, 25; 0, 5[$ | $0, 375$ |
| $f(0, 375) = 0, 083 \ldots > 0$ | $]0, 25; 0, 375[$ | $0, 3125$ |
| $f(0, 3125) = -0, 149 \ldots < 0$ | $]0, 3125; 0, 375[$ | $0, 34375$ |
| $f(0, 34375) = -0, 035 \ldots < 0$ | $]034375; 0, 375[$ | $0, 359375$ |
| $f(0, 359375) = 0, 023 \ldots > 0$ | $]0, 34375; 0, 359375[$ | $0, 3515625$ |
| $f(0, 3515625) = -0, 006 \ldots < 0$ | $]0, 3515625; 0, 359375[$ | |

Koska kaikki välin $]0, 3515625; 0, 359375[$ luvut pyöristyvät $0, 4$:ksi, niin vastaus yhden desim. tarkkuudella on 0,4.

4 / 18

## Newtonin menetelmä

Etsitään nollakohdan $\xi$ likiarvo, $x_0$ on alkuarvaus.




Nollakohdan uusi likiarvo $x_{n+1}$ saadaan edellisestä likiarvosta $x_n$ kaavalla

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$



## Esimerkki

Määritä yhtälön $x^3 = 6$ ainoa ratkaisu kuuden desimaalin tarkkuudella.

$f(x) = x^3 - 6 = 0, \qquad f'(x) = 3x^2, \qquad x_0 = 1,5$

$x_{n+1} = x_n - \dfrac{x_n^3 - 6}{3x_n^2}$

| n | $x_n$ |
|---|---|
| 0 | $1,5$ |
| 1 | $1,5 - \frac{1,5^3-6}{3\cdot 1,5^2} = 1,8888\ldots$ |
| 2 | $1.8198\ldots$ |
| 3 | $1,8171\ldots$ |
| 4 | $1,817120593$ |
| 5 | $1,817120593$ |

Ratkaisu on $x \approx 1,817121$.Koska f on jatkuva ja $f(1,8171205) < 0$ ja $f(1,8171215) > 0$, niin ratkaisu on 6 desimaalin tarkkuudella oikein.



## Esimerkki laskimella (TI)

1. Talletetaan grafiikkafunktioksi $Y_1$ lauseke $X - \dfrac{X^3 - 6}{3X^2}$
2. Talletetaan alkuarvaus 1,5 muistipaikkaan X
3. Talletetaan grafiikkafunktion $Y_1$ arvo muistipaikkaan X.
4. Toistetaan painamalla Enter-näppäintä.

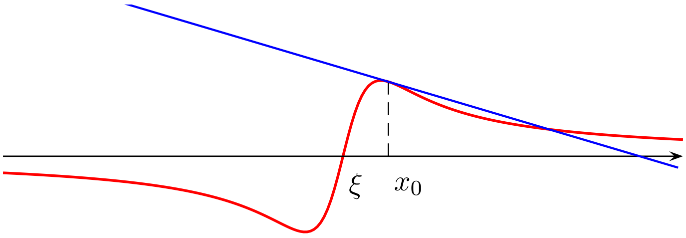
Siis lyhyesti:
$1,5 \rightarrow X$
$Y_1 \rightarrow X$[a]



[a] $Y_1$ haetaan seuraavasti: VARS – Y-VARS – Function

## Huomioita

Newtonin menetelmä ei välttämättä toimi, jos alkuarvaus on huono — erityisesti derivaatan nollakohdat voivat aiheuttaa ongelmia.

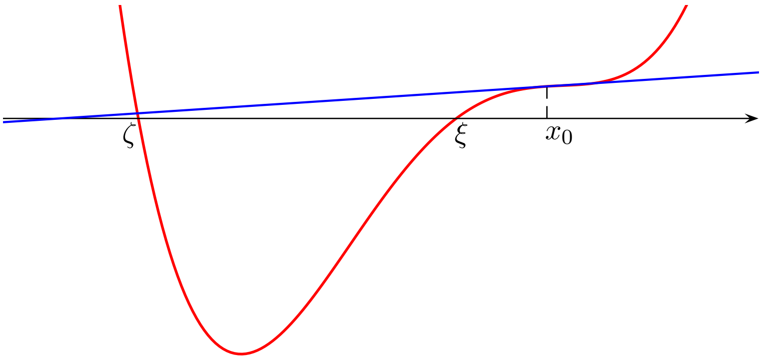



Suppeneeko Newtonin menetelmä kohti nollakohtaa $\xi$?



## Huomioita

Newtonin menetelmä ei välttämättä toimi, jos alkuarvaus on huono — erityisesti derivaatan nollakohdat voivat aiheuttaa ongelmia.




Kumpaa nollakohtaa kohti Newtonin menetelmä suppenee alkuarvolla $x_0$?



## Esimerkki

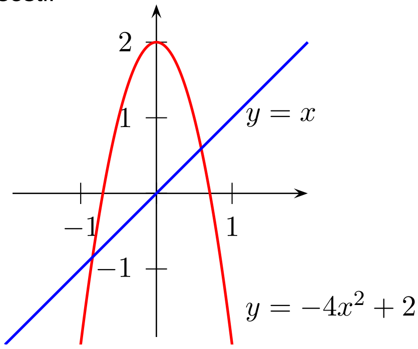
**YO-K05:15.** Määritä funktion $f(x) = x \sin x$ pienin positiivinen ääriarvokohta ja vastaava ääriarvo ratkaisemalla derivaatan nollakohta Newtonin menetelmällä. Anna vastaukset viiden desimaalin tarkkuudella.

## Kiintopiste

**Määritelmä 1.** *Funktio $g$ on määritelty välillä $I$. Luku $\xi \in I$ on sen* kiintopiste*, jos $\xi = g(\xi)$.*

**Esimerkki.** Määritä funktion $g(x) = -4x^2 + 2$ kiintopisteet.

- Algebrallisesti: $x = -4x^2 + 2$
- Graafisesti:




11 / 18

## Kiintopistemenetelmä

Olkoon $g$ jatkuva funktio. Tarkastellaan iterointia

$$\boxed{x_{n+1} = g(x_n), \quad x \in \mathbb{N}}$$

**Lause 1.** *Jos iteroimalla saatu jono $(x_n)$ suppenee kohti $\xi$:tä, ts. $lim_{n\to\infty} x_n = \xi$, niin $\xi$ on yhtälön $x = g(x)$ ratkaisu.*

*Todistus.* Jatkuvuudesta seuraa, että $lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(\xi)$.
Toisaalta, koska $x_{n+1} = g(x_n)$, niin $\xi = lim_{n\to\infty} x_{n+1} = lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(\xi)$. Näin siis on $\xi = g(\xi)$ ja $\xi$ on yhtälön $x = g(x)$ ratkaisu. $\square$

12 / 18

## Esimerkki kiintopistemenetelmästä

Etsi yhtälön $e^{-x} - x = 0$ kaikkien ratkaisujen likiarvot kahden desimaalin tarkkuudella.

1. $f(x) = e^{-x} - x$ on jatkuva ja derivoituva $\mathbb{R}$:ssä.
2. $f(0) = 1 > 0$ ja $f(1) = \frac{1}{e} - 1 < 0$
3. $f'(x) = -e^{-x} - 1 < 0$, kun $x \in \mathbb{R}$, joten $f$ aidosti vähenevä.

Täten funktiolla $f$ on tasan yksi nollakohta ja se on välillä ]0,1[.

13 / 18

## Esimerkki kiintopistemenetelmästä

$f(x) = e^{-x} - x = 0 \Leftrightarrow x = e^{-x}$, joten iterointikaava on $\boxed{x_{n+1} = e^{-x_n}}$. [a] Valitaan alkuarvaukseksi $x_0 = 0.5$.

| n | $x_n$ |
|---|---|
| 0 | 0.5 |
| 1 | $e^{-0,5} = 0.606\ldots$ |
| 2 | 0.545 . . . |
| 3 | 0.579 . . . |
| 4 | 0.560 . . . |
| 5 | 0.571 . . . |
| 6 | 0.564 . . . |
| 7 | 0.568 . . . |
| 8 | 0.566 . . . |

Koska $f(0,565) > 0$ ja $f(0,575) < 0$,niin nollakohta on välillä ]0,565; 0,575[ ja siten $x \approx 0,57$.



[a] Tai $-x = \ln x \Leftrightarrow x = -\ln x$

## Kiintopistemenetelmän suppeneminen

**Esimerkki.** Etsi yhtälön $x^3 - x + 1 = 0$ ainoan ratkaisun likiarvo 4 desimaalin tarkkuudella.

Valitaan alkuarvaukseksi -1. Miten iteroitava funktio $g$ kannattaa valita?

**1.** Olkoon $x = x^3 + 1$. Suppeneeko iterointi? Ei!

**2.** $x = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}$. Suppeneeko iterointi? Ei!

**3.** $x = \sqrt[3]{x-1}$ Suppeneeko iterointi? Kyllä! Ratkaisu on $x \approx -1,3247$.

Voidaanko suppenemiselle antaa jokin ehto?



## ⋆Kiintopistemenetelmän suppeneminen

**Määritelmä 2.** *Välillä $I$ määritelty funktio $g$ on kutistava, jos on olemassa vakio $k \in ]0,1[$ siten, että*

$$|g(x) - g(y)| \leq k\,|x - y| \tag{1}$$

*kaikilla arvoilla $x, y \in I$.*

**Lause 2.** *Jos $g$ on välillä $[a,b]$ määritelty kutistava funktio, niin $g$:llä on tasan yksi kiintopiste ja iteraatio*

$$\begin{aligned} x_0 &\in [a,b] \\ x_{n+1} &= g(x_n) \end{aligned}$$

*suppenee kohti tätä kiintopistettä.*

Määritelmän ehto 1 takaa siis kiintopistemenetelmän suppenemisen.

## ⋆Kiintopistemenetelmän suppeneminen

Väliarvolauseen nojalla
$$|g(x) - g(y)| = \left|g'(\xi)\right| |x - y|\,, \quad \xi \in ]x, y[$$

Jos siis voidaan osoittaa, että jollakin välillä $[a, b]$ on $|g'(\xi)| < 1 \quad (\forall \xi \in ]a, b[)$, niin yhtälöllä $x = g(x)$ on tällä välillä tasan yksi ratkaisu ja kiintopistemenetelmä suppenee kaikilla alkuarvauksilla $x_0 \in [a, b]$ tätä kohti.

**Esimerkki.** Osoita, että yhtälön $x^3 - x + 1 = 0$ välillä $[-2, -1]$ oleva ratkaisu löydetään kiintopistemenetelmällä, kun yhtälö kirjoitetaan muotoon $x = \sqrt[3]{x-1}$.

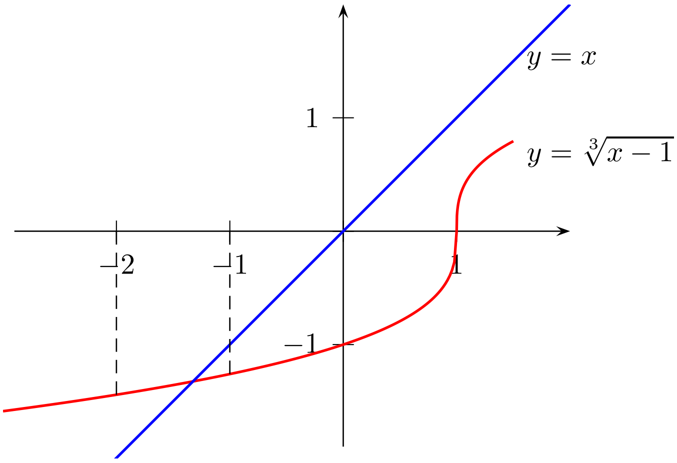
Olkoon $g(x) = \sqrt[3]{x-1}$.

$\left|g'(x)\right| = \left|\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}\right| \leq \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(-1-1)^2}} < 1,\ \forall x \in [-2, -1]$. Täten kiintopistemenetelmä suppenee kaikilla alkuarvauksilla $x_0 \in [-2, -1]$.



## Kiintopistemenetelmän suppeneminen

Miten kuviosta nähdään, että iterointi $x = \sqrt[3]{x-1}$ suppenee välillä $[-2, -1]$?




Käyrän $g(x) = \sqrt[3]{x-1}$ tangentin kulmakertoimen itseisarvo välillä $[-2, -1]$ on <1.