Jatkuvan satunnaismuuttujan jakauma

Hannu Lehto

Lahden Lyseon lukio

Osa I: Tiheys- ja kertymäfunktiot

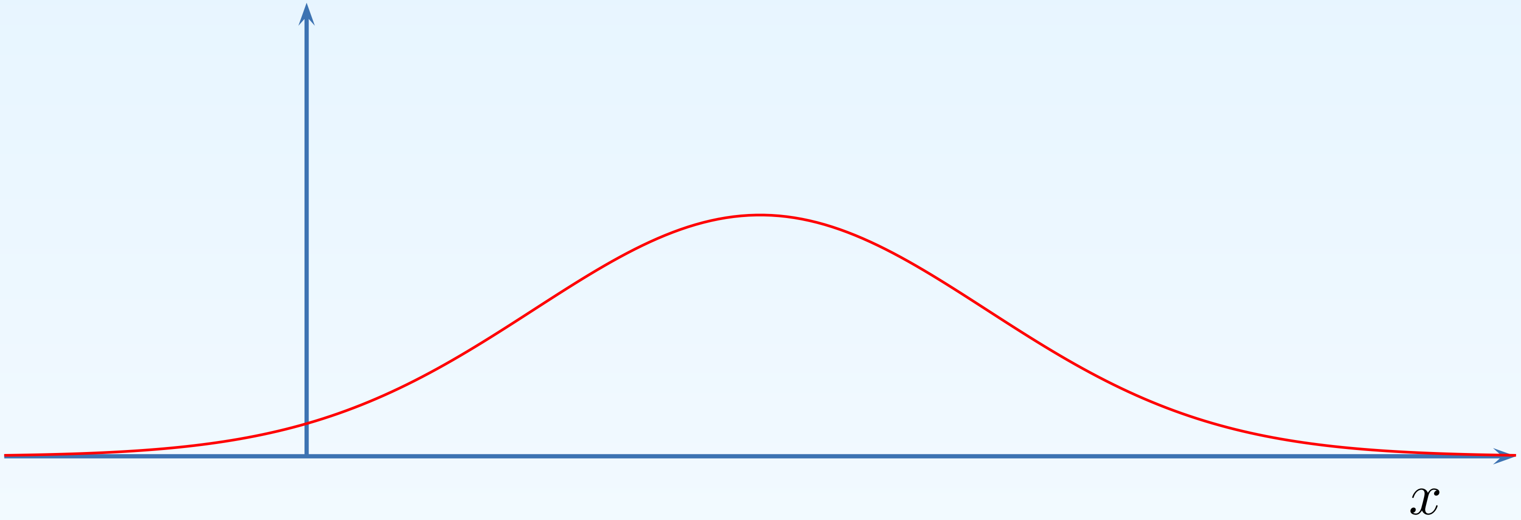
Johdatteleva esimerkki

Alla on erään jatkuvan satunnaismuuttujan $\underline{x}$ jakauma.

Mistä jakaumasta on kyse?

Johdatteleva esimerkki

Alla on erään jatkuvan satunnaismuuttujan $\underline{x}$ jakauma.

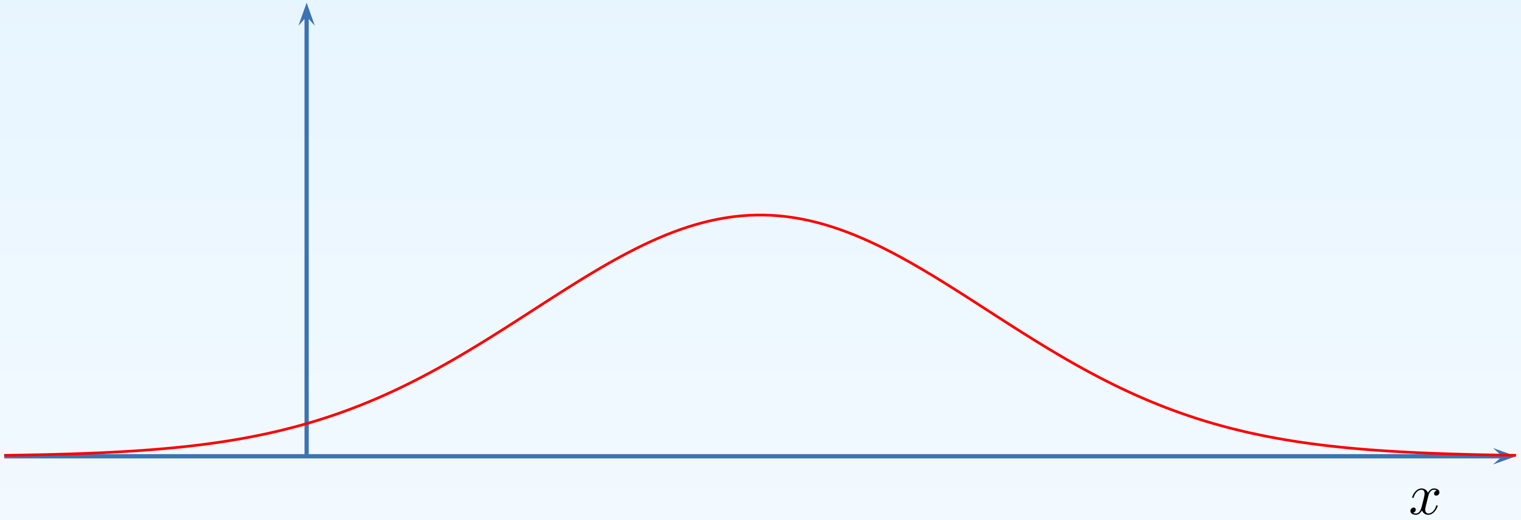


Mistä jakaumasta on kyse?

Jakauman muodon määräävä funktio on *tiheysfunktio*.

Johdatteleva esimerkki

Alla on erään jatkuvan satunnaismuuttujan $\underline{x}$ jakauma.



Mistä jakaumasta on kyse?

Jakauman muodon määräävä funktio on *tiheysfunktio*.

Mitkä ehdot tiheysfunktion on täytettävä?

Tiheysfunktio

Funktio $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ on jatkuvan satunnaismuuttujan $\underline{x}$ *tiheysfunktio*, jos

Tiheysfunktio

Funktio $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ on jatkuvan satunnaismuuttujan $\underline{x}$ *tiheysfunktio*, jos

1. $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$,

Tiheysfunktio

Funktio $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on jatkuvan satunnaismuuttujan $\underline{x}$ *tiheysfunktio*, jos

1. $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$,
2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$,

Tiheysfunktio

Funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on jatkuvan satunnaismuuttujan $\underline{x}$ *tiheysfunktio*, jos

1. $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$,
2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$,
3. funktiolla f on korkeintaan äärellinen määrä epäjatkuvuuskohtia.

Esimerkki

Millä vakion a arvolla funktio

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{x^2}, & x \geq 2 \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$$

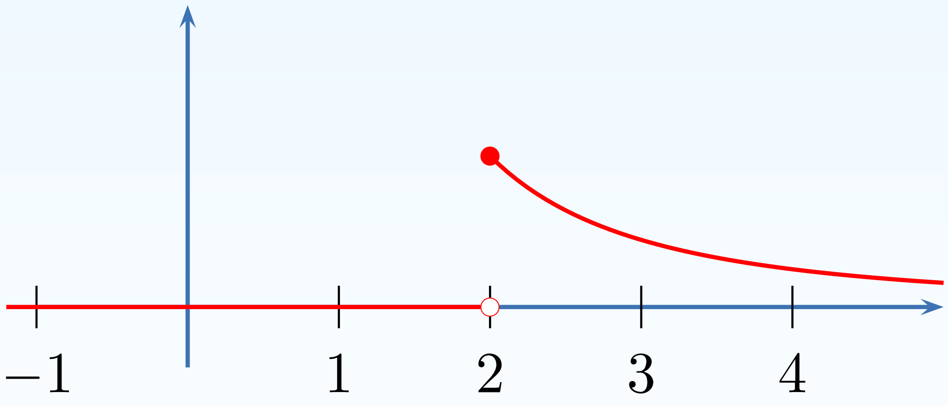
on erään satunnaismuuttujan $\underline{x}$ tiheysfunktio? Laske myös todennäköisyys $P(3 < \underline{x} < 4)$.

Esimerkki

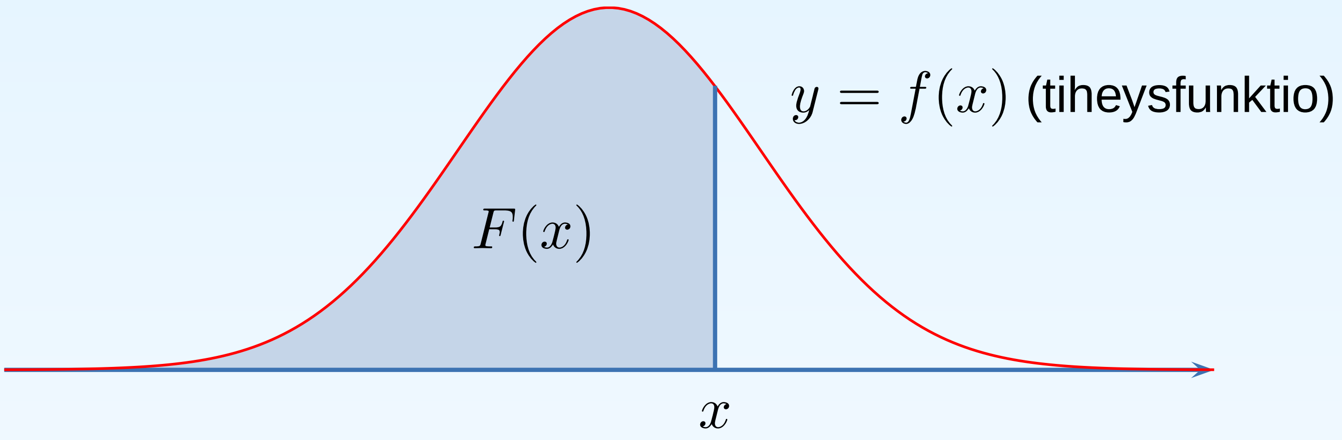
Millä vakion a arvolla funktio

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{x^2}, & x \geq 2 \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$$

on erään satunnaismuuttujan $\underline{x}$ tiheysfunktio? Laske myös todennäköisyys $P(3 < \underline{x} < 4)$.



Kertymäfunktio



Jatkuvan satunnaismuuttujan $\underline{x}$ *kertymäfunktio* on

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = P(\underline{x} \leq x)$$

Esimerkki

Funktio

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^2}, & x \geq 2 \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$$

on erään satunnaismuuttujan $\underline{x}$ tiheysfunktio. Määritä $\underline{x}$:n kertymäfunktio $F(x)$ ja laske sen avulla todennäköisyydet $P(\underline{x} > 3)$ ja $P(2{,}5 < \underline{x} < 3)$

Kertymäfunktion derivaatta

Olkoon $F(x)$ satunnaismuuttujan $\underline{x}$ kertymäfunktio. Silloin on

$$F'(x) = D_x \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = f(x)$$

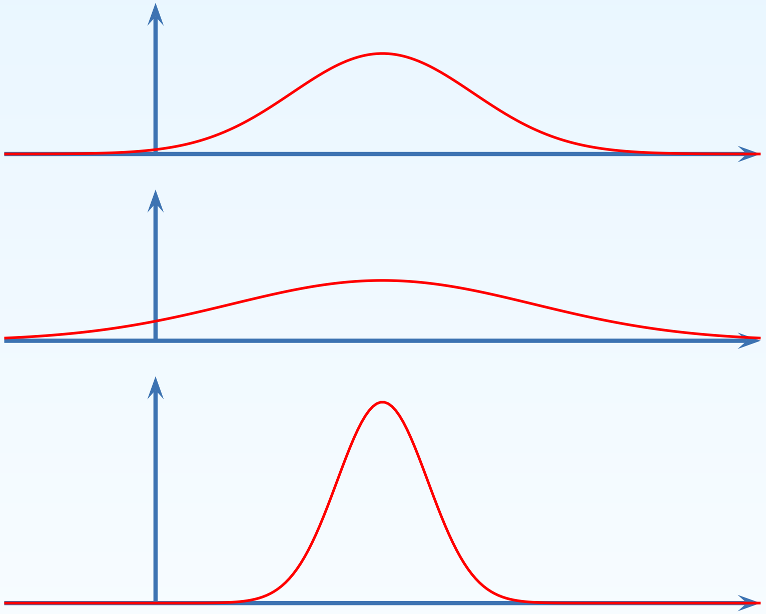
jokaisella välillä, jolla F on derivoituva.

Täten kertymäfunktion derivaatta on tiheysfunktio.
Esimerkkinä MT13, tehtävä 287.

Osa II: Odotusarvo, varianssi ja keskihajonta

Johdatteleva esimerkki

Alla on jatkuvien satunnaismuuttujien jakaumia (tiheysfunktioita). Mitä voit sanoa keskihajonnoista ja odotusarvoista toisiinsa verrattuina?



Odotusarvo, varianssi ja keskihajonta

Jatkuvan satunnaismuuttujan $\underline{x}$ *odotusarvo* on

Odotusarvo, varianssi ja keskihajonta

Jatkuvan satunnaismuuttujan $\underline{x}$ *odotusarvo* on

$$E\underline{x} = \mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

Odotusarvo, varianssi ja keskihajonta

Jatkuvan satunnaismuuttujan $\underline{x}$ *odotusarvo* on

$$E\underline{x} = \mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

Jatkuvan satunnaismuuttujan $\underline{x}$ *varianssi* on

Odotusarvo, varianssi ja keskihajonta

Jatkuvan satunnaismuuttujan $\underline{x}$ *odotusarvo* on

$$E\underline{x} = \mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

Jatkuvan satunnaismuuttujan $\underline{x}$ *varianssi* on

$$D^2\underline{x} = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(x-\mu)^2 dx$$

Odotusarvo, varianssi ja keskihajonta

Jatkuvan satunnaismuuttujan $\underline{x}$ *odotusarvo* on

$$E\underline{x} = \mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

Jatkuvan satunnaismuuttujan $\underline{x}$ *varianssi* on

$$D^2\underline{x} = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(x-\mu)^2 dx$$

ja *keskihajonta* on

Odotusarvo, varianssi ja keskihajonta

Jatkuvan satunnaismuuttujan $\underline{x}$ *odotusarvo* on

$$E\underline{x} = \mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

Jatkuvan satunnaismuuttujan $\underline{x}$ *varianssi* on

$$D^2\underline{x} = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(x-\mu)^2 dx$$

ja *keskihajonta* on

$$D\underline{x} = \sigma = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)(x-\mu)^2 dx}.$$

Esimerkki

Satunnaismuuttujan $\underline{x}$ tiheysfunktio on

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x \ln 5}, & 1 \leq x \leq 5 \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$$

Määritä satunnaismuuttujan odotusarvo ja keskihajonta.

Esimerkki

Satunnaismuuttujan $\underline{x}$ tiheysfunktio on

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x \ln 5}, & 1 \leq \underline{x} \leq 5 \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$$

Määritä satunnaismuuttujan odotusarvo ja keskihajonta.