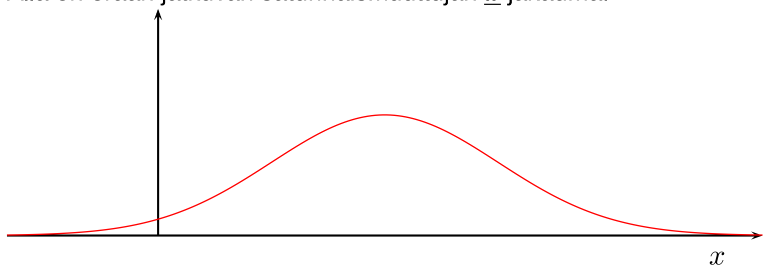
Jatkuvan satunnaismuuttujan jakauma

Hannu Lehto
Lahden Lyseon lukio

Johdatteleva esimerkki

Alla on erään jatkuvan satunnaismuuttujan $\underline{x}$ jakauma.



Mistä jakaumasta on kyse?
Jakauman muodon määräävä funktio on *tiheysfunktio*.
Mitkä ehdot tiheysfunktion on täytettävä?

Tiheysfunktio

Funktio $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ on jatkuvan satunnaismuuttujan $\underline{x}$ *tiheysfunktio*, jos

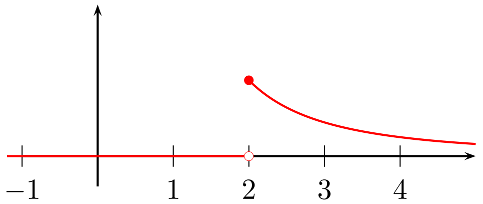
1. $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$,
2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$,
3. funktiolla f on korkeintaan äärellinen määrä epäjatkuvuuskohtia.

Esimerkki

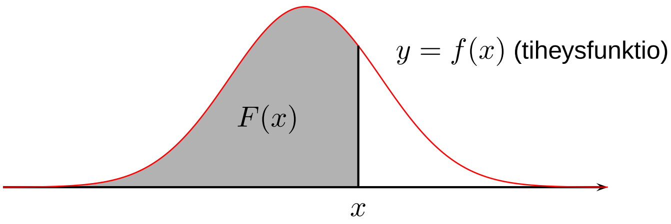
Millä vakion a arvolla funktio

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{x^2}, & x \geq 2 \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$$

on erään satunnaismuuttujan $\underline{x}$ tiheysfunktio? Laske myös todennäköisyys $P(3 < \underline{x} < 4)$.



Kertymäfunktio



Jatkuvan satunnaismuuttujan $\underline{x}$ *kertymäfunktio* on

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = P(\underline{x} \leq x)$$

Esimerkki

Funktio

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^2}, & x \geq 2 \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$$

on erään satunnaismuuttujan $\underline{x}$ tiheysfunktio. Määritä $\underline{x}$:n kertymäfunktio $F(x)$ ja laske sen avulla todennäköisyydet $P(\underline{x} > 3)$ ja $P(2,5 < \underline{x} < 3)$

Kertymäfunktion derivaatta

Olkoon $F(x)$ satunnaismuuttujan $\underline{x}$ kertymäfunktio. Silloin on

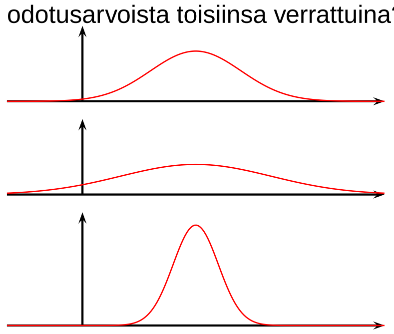
$$F'(x) = D_x \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = f(x)$$

jokaisella välillä, jolla F on derivoituva.

Täten kertymäfunktion derivaatta on tiheysfunktio.
Esimerkkinä MT13, tehtävä 287.

Johdatteleva esimerkki

Alla on jatkuvien satunnaismuuttujien jakaumia (tiheysfunktioita). Mitä voit sanoa keskihajonnoista ja odotusarvoista toisiinsa verrattuina?



Odotusarvo, varianssi ja keskihajonta

Jatkuvan satunnaismuuttujan $\underline{x}$ *odotusarvo* on

$$E\underline{x} = \mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

Jatkuvan satunnaismuuttujan $\underline{x}$ *varianssi* on

$$D^2\underline{x} = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(x-\mu)^2 dx$$

ja *keskihajonta* on

$$D\underline{x} = \sigma = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)(x-\mu)^2 dx}.$$

Esimerkki

Satunnaismuuttujan $\underline{x}$ tiheysfunktio on

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x \ln 5}, & 1 \leq x \leq 5 \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$$

Määritä satunnaismuuttujan odotusarvo ja keskihajonta.