

Maa13

Kertaustehtäviä



1. Derivaatta

1. Tarkastellaan funktiota $f(x) = \sqrt{x}$.
 - a) Määritä käyttäen derivaatan määritelmää $f'(2)$.
 - b) Tutki, onko funktiolla $f(x)$ oikeanpuoleista derivaattaa kohdassa $x = 0$.

2. Tutki funktion $f(x) = \begin{cases} 6x - 5, & x \leq 1 \\ 3x^2 - 2x, & x > 1 \end{cases}$ derivoituvuutta.

3. Määritä vakiot a ja b siten, että funktio

$$f(x) = \begin{cases} ax^2, & x \leq 1 \\ x^2 + bx, & x > 1 \end{cases}$$

on derivoituva kohdassa $x = 1$.

2. Funktion raja-arvo äärettömydessä ja raja-arvo ∞

1. Määritä seuraavien funktioiden raja-arvo, kun $x \rightarrow \infty$:

a) $\frac{2x^2 - x}{x^3 + 5x}$

b) $x - \sqrt{x + 1}$

c) $\frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

2. Millä vakion a arvoilla raja-arvo

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - a^2}$$

on olemassa. Laske myös kyseiset raja-arvot.

3. Murtofunktion kulku, erityisesti asymptootit

1. Määritä funktion

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x + 1}{x^2 + 3x}$$

asymptootit.

2. Määritä funktion

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$$

asymptootit ja ääriarvot.

4. Lukujonon raja-arvo

1. Määritä lukujonon

$$a_n = \frac{n^2 + 1}{3n^2 - 1}, \quad n \in \mathbb{Z}_+$$

raja-arvo. Mistä indeksin n arvosta lähtien lukujonon jäsenet poikkeavat tästä raja-arvosta vähemmän kuin 10^{-3} ?

2. Osoita, että lukujono

$$a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}, \quad n \in \mathbb{Z}_+$$

on aidosti vähenevä, ts. $a_n > a_{n+1}$ kaikilla n :n arvoilla.

5. Geometrinen jono ja geometrinen summa

1. N. tallettaa joka vuoden alussa tilille 500 €. Tilin korkoon 5%. Kuinka paljon tilillä on rahaa kymmenennen talletusvuoden lopussa?
2. Millä muuttujan x arvoilla seuraavat lukujonot suppenevat?

a) $a_n = (4x + 3)^n, \quad n \in \mathbb{Z}_+$ **b)** $a_n = (x^2 - 4)^n, \quad n \in \mathbb{Z}_+$

6. Sarja ja sarjan suppeneminen

1. Tutki seuraavien sarjojen suppenemistä. Määritä mahdollinen summa.

a)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k}$$

b)

$$\sum_{k=1}^{\infty} 5 \cdot 3^{-k}$$

c)

$$\sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1} \right)$$

6. Geometrinen sarja

1. Millä muuttujan $x \in \mathbb{R}$ arvoilla sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^k$$

suppenee. Laske myös summa.

2. Ratkaise yhtälö

$$\frac{1}{x} + x + x^2 + x^3 + \dots < -2$$

3. Millä x :n arvoilla seuraava sarja suppenee?

$$\sum_{k=1}^{\infty} \cos^k x$$

7. Epäolennainen integraali ja jatkuva jakauma

1. Osoita, että funktio

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

on erään satunnaismuuttujan \underline{x} tiheysfunktio.

2. Funktio

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & x \leq -1 \\ 0 & x > -1 \end{cases}$$

on erään satunnaismuuttujan \underline{x} tiheysfunktio. Määritä tämän satunnaismuuttujan kertymäfunktio ja laske todennäköisyys $P(-2 < \underline{x} < -1,5)$.