

# Murtofunktion integrointi (MT10 s. 22–23)

Hannu Lehto

Lahden Lyseon lukio



# Johdanto

---

Tarkastellaan murtofunktiota (rationaalifunktiota)

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

## Sisältö

- Johdanto
- Esimerkki 1
- Esimerkki 2
- Esimerkki 2 jatkuu ...

# Johdanto

---

Tarkastellaan murtofunktiota (rationaalifunktiota)

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

- Jos osoittajan asteluku on suurempi tai yhtä suuri kuin nimittäjän asteluku, ts.  $\deg(P(x)) \geq \deg(Q(x))$ , suoritetaan jakolasku ennen integrointia.

## Sisältö

- Johdanto
- Esimerkki 1
- Esimerkki 2
- Esimerkki 2 jatkuu ...

# Johdanto

Tarkastellaan murtofunktiota (rationaalifunktiota)

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

- Jos osoittajan asteluku on suurempi tai yhtä suuri kuin nimittäjän asteluku, ts.  $\deg(P(x)) \geq \deg(Q(x))$ , suoritetaan jakolasku ennen integrointia.
- Jos on  $\deg(P(x)) < \deg(Q(x))$  ja nimittäjä jakautuu tekijöihin, suoritetaan osamurtoihin jako ennen integrointia.

## Sisältö

- Johdanto
- Esimerkki 1
- Esimerkki 2
- Esimerkki 2 jatkuu ...

# Esimerkki 1

---

## Sisältö

- Johdanto
- **Esimerkki 1**
- Esimerkki 2
- Esimerkki 2 jatkuu ...

$$\int \frac{2x}{x+1} dx$$

# Esimerkki 1

---

$$\int \frac{2x}{x+1} dx$$

Suoritetaan jakolasku jakokulmassa:

## Sisältö

- Johdanto
- **Esimerkki 1**
- Esimerkki 2
- Esimerkki 2 jatkuu ...

# Esimerkki 1

---

## Sisältö

- Johdanto
- **Esimerkki 1**
- Esimerkki 2
- Esimerkki 2 jatkuu ...

$$\int \frac{2x}{x+1} dx$$

Suoritetaan jakolasku jakokulmassa:

$$x + 1 \quad | \quad \overline{2x}$$

# Esimerkki 1

---

## Sisältö

- Johdanto
- **Esimerkki 1**
- Esimerkki 2
- Esimerkki 2 jatkuu ...

$$\int \frac{2x}{x+1} dx$$

Suoritetaan jakolasku jakokulmassa:

$$\begin{array}{r} 2 \\ x+1 \overline{) 2x} \\ \underline{+2x+2} \end{array}$$



# Esimerkki 1

---

## Sisältö

- Johdanto
- **Esimerkki 1**
- Esimerkki 2
- Esimerkki 2 jatkuu ...

$$\int \frac{2x}{x+1} dx$$

Suoritetaan jakolasku jakokulmassa:

$$\begin{array}{r} 2 \\ x+1 \overline{) 2x} \\ \underline{-2x-2} \end{array}$$

# Esimerkki 1

---

## Sisältö

- Johdanto
- **Esimerkki 1**
- Esimerkki 2
- Esimerkki 2 jatkuu ...

$$\int \frac{2x}{x+1} dx$$

Suoritetaan jakolasku jakokulmassa:

$$\begin{array}{r} 2 \\ x + 1 \overline{) 2x} \\ \underline{-2x - 2} \\ -2 \end{array}$$

# Esimerkki 1

## Sisältö

- Johdanto
- **Esimerkki 1**
- Esimerkki 2
- Esimerkki 2 jatkuu ...

$$\int \frac{2x}{x+1} dx$$

Suoritetaan jakolasku jakokulmassa:

$$\begin{array}{r} 2 \\ x + 1 \quad | \quad \overline{2x} \\ \quad \quad \underline{-2x - 2} \\ \quad \quad \quad -2 \end{array}$$

Täten osamäärä on 2 ja jakojäännös -2.

# Esimerkki 1

## Sisältö

- Johdanto
- **Esimerkki 1**
- Esimerkki 2
- Esimerkki 2 jatkuu ...

$$\int \frac{2x}{x+1} dx$$

Suoritetaan jakolasku jakokulmassa:

$$\begin{array}{r} 2 \\ x+1 \overline{) 2x} \\ \underline{-2x-2} \\ -2 \end{array}$$

Täten osamäärä on 2 ja jakojäännös -2.

$$\int \frac{2x}{x+1} dx = \int \left( 2 + \frac{-2}{x+1} \right) dx$$

# Esimerkki 1

## Sisältö

- Johdanto
- **Esimerkki 1**
- Esimerkki 2
- Esimerkki 2 jatkuu ...

$$\int \frac{2x}{x+1} dx$$

Suoritetaan jakolasku jakokulmassa:

$$\begin{array}{r} 2 \\ x+1 \overline{) 2x} \\ \underline{-2x-2} \\ -2 \end{array}$$

Täten osamäärä on 2 ja jakojäännös -2.

$$\begin{aligned} \int \frac{2x}{x+1} dx &= \int \left( 2 + \frac{-2}{x+1} \right) dx \\ &= 2x - 2 \ln |x+1| + C \end{aligned}$$

# Esimerkki 2

---

## Sisältö

- Johdanto
- Esimerkki 1
- **Esimerkki 2**
- Esimerkki 2 jatkuu ...

$$\int \frac{x^3 + 2}{x^2 - x} dx$$

# Esimerkki 2

## Sisältö

- Johdanto
- Esimerkki 1
- **Esimerkki 2**
- Esimerkki 2 jatkuu ...

$$\int \frac{x^3 + 2}{x^2 - x} dx$$

Jakokulmassa suoritetun jakolaskun tuloksena saadaan jakoyhtälö:

$$\frac{x^3 + 2}{x^2 - x} = x + 1 + \frac{x + 2}{x^2 - x} \quad (1)$$

## Esimerkki 2

### Sisältö

- Johdanto
- Esimerkki 1
- **Esimerkki 2**
- Esimerkki 2 jatkuu ...

$$\int \frac{x^3 + 2}{x^2 - x} dx$$

Jakokulmassa suoritetun jakolaskun tuloksena saadaan jakoyhtälö:

$$\frac{x^3 + 2}{x^2 - x} = x + 1 + \frac{x + 2}{x^2 - x} \quad (1)$$

Integrointia varten hajotetaan vielä murtolauseke  $\frac{x+2}{x^2-x}$  osamurtoihin:



## Esimerkki 2

### Sisältö

- Johdanto
- Esimerkki 1
- **Esimerkki 2**
- Esimerkki 2 jatkuu ...

$$\int \frac{x^3 + 2}{x^2 - x} dx$$

Jakokulmassa suoritetun jakolaskun tuloksena saadaan jakoyhtälö:

$$\frac{x^3 + 2}{x^2 - x} = x + 1 + \frac{x + 2}{x^2 - x} \quad (1)$$

Integrointia varten hajotetaan vielä murtolauseke  $\frac{x+2}{x^2-x}$  osamurtoihin:

$$\frac{x + 2}{x(x - 1)} \equiv \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 1} \quad || \cdot x(x - 1)$$

## Esimerkki 2

### Sisältö

- Johdanto
- Esimerkki 1
- **Esimerkki 2**
- Esimerkki 2 jatkuu ...

$$\int \frac{x^3 + 2}{x^2 - x} dx$$

Jakokulmassa suoritetun jakolaskun tuloksena saadaan jakoyhtälö:

$$\frac{x^3 + 2}{x^2 - x} = x + 1 + \frac{x + 2}{x^2 - x} \quad (1)$$

Integrointia varten hajotetaan vielä murtolauseke  $\frac{x+2}{x^2-x}$  osamurtoihin:

$$\frac{x + 2}{x(x - 1)} \equiv \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 1} \quad || \cdot x(x - 1)$$

$$x + 2 \equiv A(x - 1) + Bx \equiv (A + B)x - A$$

## Esimerkki 2

### Sisältö

- Johdanto
- Esimerkki 1
- **Esimerkki 2**
- Esimerkki 2 jatkuu ...

$$\int \frac{x^3 + 2}{x^2 - x} dx$$

Jakokulmassa suoritetun jakolaskun tuloksena saadaan jakoyhtälö:

$$\frac{x^3 + 2}{x^2 - x} = x + 1 + \frac{x + 2}{x^2 - x} \quad (1)$$

Integrointia varten hajotetaan vielä murtolauseke  $\frac{x+2}{x^2-x}$  osamurtoihin:

$$\frac{x + 2}{x(x - 1)} \equiv \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 1} \quad || \cdot x(x - 1)$$

$$x + 2 \equiv A(x - 1) + Bx \equiv (A + B)x - A$$

Tämä on identtisesti tosi, kun

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ -A = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 3 \\ A = -2 \end{cases}$$

## Esimerkki 2 jatkuu ...

---

Täten jakoyhtälö 1 voidaan edelleen kirjoittaa muotoon:

$$\frac{x^3 + 2}{x^2 - x} = x + 1 + \frac{x + 2}{x^2 - x} = x + 1 + \frac{-2}{x} + \frac{3}{x - 1}$$

### Sisältö

- Johdanto
- Esimerkki 1
- Esimerkki 2
- Esimerkki 2 jatkuu ...

## Esimerkki 2 jatkuu ...

Täten jakoyhtälö 1 voidaan edelleen kirjoittaa muotoon:

$$\frac{x^3 + 2}{x^2 - x} = x + 1 + \frac{x + 2}{x^2 - x} = x + 1 + \frac{-2}{x} + \frac{3}{x - 1}$$

Integraalifunktioksi saadaan

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 + 2}{x^2 - x} dx &= \int \left( x + 1 + \frac{-2}{x} + \frac{3}{x - 1} \right) dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 + x - 2 \ln |x| + 3 \ln |x - 1| + C \end{aligned}$$

### Sisältö

- Johdanto
- Esimerkki 1
- Esimerkki 2
- Esimerkki 2 jatkuu ...