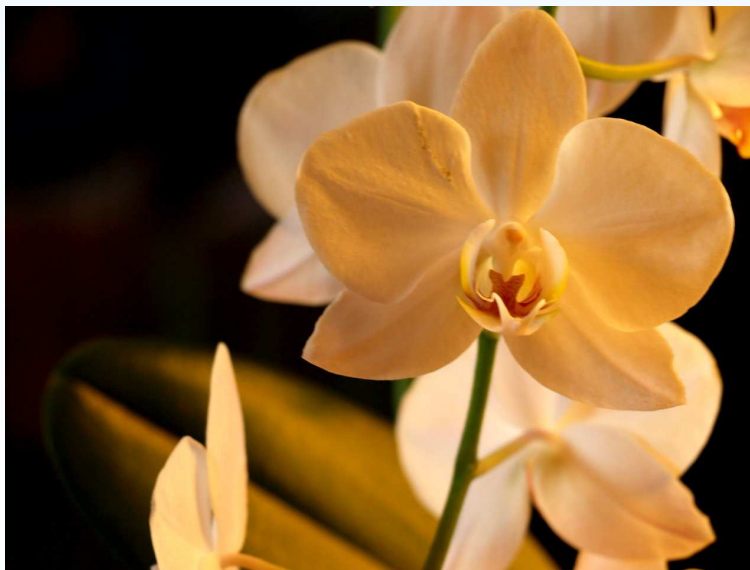


Osamurtohajotelma

Hannu Lehto

Lahden Lyseon lukio

hannu.lehto@phnet.fi



Sisältö

Osa I: Teoriaa

- Osamurtohajotelma
- Osamurtohajotelma jatkuu

Osa II: Esimerkkejä

Osa III: Sovelluksia

Osa I: Teoriaa

Osamurtohajotelma

Sisältö

Osa I: Teoriaa

- Osamurtohajotelma
- Osamurtohajotelma jatkuu

Osa II: Esimerkkejä

Osa III: Sovelluksia

Murtofunktio $\frac{P(x)}{Q(x)}$, missä $\deg(P(x)) < \deg(Q(x))$, voidaan hajoittaa seuraavia tyyppisiä olevien **osamurtojen** äärelliseksi summaksi:

Osamurtohajotelma

Sisältö

Osa I: Teoriaa

● Osamurtohajotelma

● Osamurtohajotelma jatkuu

Osa II: Esimerkkejä

Osa III: Sovelluksia

Murtofunktio $\frac{P(x)}{Q(x)}$, missä $\deg(P(x)) < \deg(Q(x))$, voidaan hajoittaa seuraavia tyyppisiä olevien **osamurtojen** äärelliseksi summaksi:

$$\frac{A}{x - a} \quad (1)$$

$$\frac{A}{(x - a)^k} \quad (k = 2, 3, \dots) \quad (2)$$

$$\frac{Bx + C}{x^2 + px + q} \quad (p^2 - 4q < 0) \quad (3)$$

$$\frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^k} \quad (p^2 - 4q < 0, k = 2, 3, \dots) \quad (4)$$

Osamurtohajotelma jatkuu

Jokainen nimittäjän $Q(x)$ k -kertainen tekijä $(x - a)^k$, $k \geq 1$ aiheuttaa summaan termit

$$\frac{A_1}{x - a} + \frac{A_2}{(x - a)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x - a)^k}.$$

Sisältö

Osa I: Teoriaa

- Osamurtohajotelma
- Osamurtohajotelma jatkuu

Osa II: Esimerkkejä

Osa III: Sovelluksia

Osamurtohajotelma jatkuu

Sisältö

Osa I: Teoriaa

- Osamurtohajotelma
- Osamurtohajotelma jatkuu

Osa II: Esimerkkejä

Osa III: Sovelluksia

Jokainen nimittäjän $Q(x)$ k -kertainen tekijä $(x - a)^k$, $k \geq 1$ aiheuttaa summaan termit

$$\frac{A_1}{x - a} + \frac{A_2}{(x - a)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x - a)^k}.$$

Jokainen nimittäjän $Q(x)$ k -kertainen tekijä $(x^2 + px + q)^k$, $k \geq 1$ ja $p^2 - 4q < 0$ aiheuttaa summaan termit

$$\frac{B_1x + C_1}{x^2 + px + q} + \frac{B_2x + C_2}{(x^2 + px + q)^2} + \dots + \frac{B_kx + C_k}{(x^2 + px + q)^k}.$$

Sisältö

Osa I: Teoriaa

Osa II: Esimerkkejä

- Esimerkki 1
- Esimerkki 2
- Esimerkki 2 jatkuu...
- Esimerkki 3

Osa III: Sovelluksia



Osa II: Esimerkkejä

Esimerkki 1

Hajota osamurtoihin murtofunktio $f(x) = \frac{1}{x^2(x+1)}$.

Sisältö

Osa I: Teoriaa

Osa II: Esimerkkejä

- **Esimerkki 1**
- Esimerkki 2
- Esimerkki 2 jatkuu...
- Esimerkki 3

Osa III: Sovelluksia

Esimerkki 1

Hajota osamurtoihin murtofunktio $f(x) = \frac{1}{x^2(x+1)}$.

$$\frac{1}{x^2(x+1)} \equiv \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1} \quad || \cdot x^2(x+1)$$

Sisältö

Osa I: Teoriaa

Osa II: Esimerkkejä

- **Esimerkki 1**
- Esimerkki 2
- Esimerkki 2 jatkuu...
- Esimerkki 3

Osa III: Sovelluksia

Esimerkki 1

Hajota osamurtoihin murtofunktio $f(x) = \frac{1}{x^2(x+1)}$.

$$\frac{1}{x^2(x+1)} \equiv \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1} \quad || \cdot x^2(x+1)$$

$$1 \equiv Ax(x+1) + B(x+1) + Cx^2$$

Sisältö

Osa I: Teoriaa

Osa II: Esimerkkejä

- **Esimerkki 1**
- Esimerkki 2
- Esimerkki 2 jatkuu...
- Esimerkki 3

Osa III: Sovelluksia

Esimerkki 1

Hajota osamurtoihin murtofunktio $f(x) = \frac{1}{x^2(x+1)}$.

$$\frac{1}{x^2(x+1)} \equiv \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1} \quad || \cdot x^2(x+1)$$

$$1 \equiv Ax(x+1) + B(x+1) + Cx^2$$

$$1 \equiv (A+C)x^2 + (A+B)x + B$$

Yhtälö on identtisesti (x:n arvosta riippumatta) tosi, kun

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ A + B = 0 \\ B = 1 \end{cases}$$

Sisältö

Osa I: Teoriaa

Osa II: Esimerkkejä

- **Esimerkki 1**
- Esimerkki 2
- Esimerkki 2 jatkuu...
- Esimerkki 3

Osa III: Sovelluksia

Esimerkki 1

Hajota osamurtoihin murtofunktio $f(x) = \frac{1}{x^2(x+1)}$.

$$\frac{1}{x^2(x+1)} \equiv \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1} \quad || \cdot x^2(x+1)$$

$$1 \equiv Ax(x+1) + B(x+1) + Cx^2$$

$$1 \equiv (A+C)x^2 + (A+B)x + B$$

Yhtälö on identtisesti (x:n arvosta riippumatta) tosi, kun

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ A + B = 0 \\ B = 1 \end{cases}$$

Yhtälöryhmän ratkaisu on $A = -1$, $B = 1$, $C = 1$. Täten on

Sisältö

Osa I: Teoriaa

Osa II: Esimerkkejä

- **Esimerkki 1**
- Esimerkki 2
- Esimerkki 2 jatkuu...
- Esimerkki 3

Osa III: Sovelluksia

Esimerkki 1

Sisältö

Osa I: Teoriaa

Osa II: Esimerkkejä

- **Esimerkki 1**
- Esimerkki 2
- Esimerkki 2 jatkuu...
- Esimerkki 3

Osa III: Sovelluksia

Hajota osamurtoihin murtofunktio $f(x) = \frac{1}{x^2(x+1)}$.

$$\frac{1}{x^2(x+1)} \equiv \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1} \quad || \cdot x^2(x+1)$$

$$1 \equiv Ax(x+1) + B(x+1) + Cx^2$$

$$1 \equiv (A+C)x^2 + (A+B)x + B$$

Yhtälö on identtisesti (x:n arvosta riippumatta) tosi, kun

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ A + B = 0 \\ B = 1 \end{cases}$$

Yhtälöryhmän ratkaisu on $A = -1$, $B = 1$, $C = 1$. Täten on

$$f(x) = \frac{1}{x^2(x+1)} = \frac{-1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x+1}$$

Esimerkki 2

Hajota osamurtoihin murtofunktio $f(x) = \frac{2x+1}{x^3+x^2+x}$.

Sisältö

Osa I: Teoriaa

Osa II: Esimerkkejä

- Esimerkki 1
- **Esimerkki 2**
- Esimerkki 2 jatkuu...
- Esimerkki 3

Osa III: Sovelluksia

Esimerkki 2

Hajota osamurtoihin murtofunktio $f(x) = \frac{2x+1}{x^3+x^2+x}$. Jaetaan ensin nimittäjä tekijöihin:

$$\frac{2x + 1}{x^3 + x^2 + x} = \frac{2x + 1}{x(x^2 + x + 1)}.$$

Sisältö

Osa I: Teoriaa

Osa II: Esimerkkejä

- Esimerkki 1
- **Esimerkki 2**
- Esimerkki 2 jatkuu...
- Esimerkki 3

Osa III: Sovelluksia

Esimerkki 2

Hajota osamurtoihin murtofunktio $f(x) = \frac{2x+1}{x^3+x^2+x}$. Jaetaan ensin nimittäjä tekijöihin:

$$\frac{2x + 1}{x^3 + x^2 + x} = \frac{2x + 1}{x(x^2 + x + 1)}.$$

Tekijällä $x^2 + x + 1$ ei ole reaalisia nollakohtia, koska $D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 < 0$, joten sitä ei voi jakaa ensimmäisen asteen tekijöihin.

Sisältö

Osa I: Teoriaa

Osa II: Esimerkkejä

- Esimerkki 1
- **Esimerkki 2**
- Esimerkki 2 jatkuu...
- Esimerkki 3

Osa III: Sovelluksia

Esimerkki 2

Hajota osamurtoihin murtofunktio $f(x) = \frac{2x+1}{x^3+x^2+x}$. Jaetaan ensin nimittäjä tekijöihin:

$$\frac{2x+1}{x^3+x^2+x} = \frac{2x+1}{x(x^2+x+1)}.$$

Tekijällä x^2+x+1 ei ole reaalisia nollakohtia, koska $D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 < 0$, joten sitä ei voi jakaa ensimmäisen asteen tekijöihin.

$$\frac{2x+1}{x(x^2+x+1)} \equiv \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} \quad || \cdot x(x^2+x+1)$$

Sisältö

Osa I: Teoriaa

Osa II: Esimerkkejä

- Esimerkki 1
- **Esimerkki 2**
- Esimerkki 2 jatkuu...
- Esimerkki 3

Osa III: Sovelluksia

Esimerkki 2

Hajota osamurtoihin murtofunktio $f(x) = \frac{2x+1}{x^3+x^2+x}$. Jaetaan ensin nimittäjä tekijöihin:

$$\frac{2x+1}{x^3+x^2+x} = \frac{2x+1}{x(x^2+x+1)}.$$

Tekijällä x^2+x+1 ei ole reaalisia nollakohtia, koska $D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 < 0$, joten sitä ei voi jakaa ensimmäisen asteen tekijöihin.

$$\frac{2x+1}{x(x^2+x+1)} \equiv \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} \quad || \cdot x(x^2+x+1)$$

$$2x+1 \equiv Ax^2 + Ax + A + Bx^2 + Cx \equiv (A+B)x^2 + (A+C)x + A$$

Sisältö

Osa I: Teoriaa

Osa II: Esimerkkejä

- Esimerkki 1
- **Esimerkki 2**
- Esimerkki 2 jatkuu...
- Esimerkki 3

Osa III: Sovelluksia

Esimerkki 2

Hajota osamurtoihin murtofunktio $f(x) = \frac{2x+1}{x^3+x^2+x}$. Jaetaan ensin nimittäjä tekijöihin:

$$\frac{2x+1}{x^3+x^2+x} = \frac{2x+1}{x(x^2+x+1)}.$$

Tekijällä x^2+x+1 ei ole reaalisia nollakohtia, koska $D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 < 0$, joten sitä ei voi jakaa ensimmäisen asteen tekijöihin.

$$\frac{2x+1}{x(x^2+x+1)} \equiv \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} \quad || \cdot x(x^2+x+1)$$

$$2x+1 \equiv Ax^2 + Ax + A + Bx^2 + Cx \equiv (A+B)x^2 + (A+C)x + A$$

Tämä on identtisesti tosi, kun

$$\begin{cases} A+B = 0 \\ A+C = 2 \\ A = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \\ C = 1 \end{cases}$$

Sisältö

Osa I: Teoriaa

Osa II: Esimerkkejä

- Esimerkki 1
- **Esimerkki 2**
- Esimerkki 2 jatkuu...
- Esimerkki 3

Osa III: Sovelluksia

Esimerkki 2 jatkuu...

Täten saadaan osamurtohajotelma

$$\frac{2x + 1}{x(x^2 + x + 1)} = \frac{1}{x} + \frac{-x + 1}{x^2 + x + 1}.$$

Sisältö

Osa I: Teoriaa

Osa II: Esimerkkejä

- Esimerkki 1
- Esimerkki 2
- **Esimerkki 2 jatkuu...**
- Esimerkki 3

Osa III: Sovelluksia

Esimerkki 3

Hajota osamurtoihin murtofunktio $f(x) = \frac{x}{2x^2+3x-2}$.

Sisältö

Osa I: Teoriaa

Osa II: Esimerkkejä

- Esimerkki 1
- Esimerkki 2
- Esimerkki 2 jatkuu...
- **Esimerkki 3**

Osa III: Sovelluksia

Esimerkki 3

Hajota osamurtoihin murtofunktio $f(x) = \frac{x}{2x^2+3x-2}$.
Jaetaan ensin nimittäjä tekijöihin.

Sisältö

Osa I: Teoriaa

Osa II: Esimerkkejä

- Esimerkki 1
- Esimerkki 2
- Esimerkki 2 jatkuu...
- **Esimerkki 3**

Osa III: Sovelluksia

Esimerkki 3

Sisältö

Osa I: Teoriaa

Osa II: Esimerkkejä

- Esimerkki 1
- Esimerkki 2
- Esimerkki 2 jatkuu...
- **Esimerkki 3**

Osa III: Sovelluksia

Hajota osamurtoihin murtofunktio $f(x) = \frac{x}{2x^2+3x-2}$.
Jaetaan ensin nimittäjä tekijöihin. Nimittäjän nollakohdat
ovat $x = \frac{1}{2}$ ja $x = -2$.

$$f(x) = \frac{x}{2x^2 + 3x - 2} = \frac{x}{2 \left(x - \frac{1}{2}\right) (x + 2)} = \frac{x}{(2x - 1) (x + 2)}$$

Esimerkki 3

Hajota osamurtoihin murtofunktio $f(x) = \frac{x}{2x^2+3x-2}$.
Jaetaan ensin nimittäjä tekijöihin. Nimittäjän nollakohdat
ovat $x = \frac{1}{2}$ ja $x = -2$.

$$f(x) = \frac{x}{2x^2 + 3x - 2} = \frac{x}{2 \left(x - \frac{1}{2}\right) (x + 2)} = \frac{x}{(2x - 1)(x + 2)}$$

$$\frac{x}{(2x - 1)(x + 2)} \equiv \frac{A}{2x - 1} + \frac{B}{x + 2} \quad || \cdot (2x - 1)(x + 2)$$

Sisältö

Osa I: Teoriaa

Osa II: Esimerkkejä

- Esimerkki 1
- Esimerkki 2
- Esimerkki 2 jatkuu...
- **Esimerkki 3**

Osa III: Sovelluksia

Esimerkki 3

Sisältö

Osa I: Teoriaa

Osa II: Esimerkkejä

- Esimerkki 1
- Esimerkki 2
- Esimerkki 2 jatkuu...
- **Esimerkki 3**

Osa III: Sovelluksia

Hajota osamurtoihin murtofunktio $f(x) = \frac{x}{2x^2+3x-2}$.
Jaetaan ensin nimittäjä tekijöihin. Nimittäjän nollakohdat ovat $x = \frac{1}{2}$ ja $x = -2$.

$$f(x) = \frac{x}{2x^2 + 3x - 2} = \frac{x}{2 \left(x - \frac{1}{2}\right) (x + 2)} = \frac{x}{(2x - 1)(x + 2)}$$

$$\frac{x}{(2x - 1)(x + 2)} \equiv \frac{A}{2x - 1} + \frac{B}{x + 2} \parallel \cdot (2x - 1)(x + 2)$$

$$x \equiv A(x + 2) + B(2x - 1) \equiv (A + 2B)x + 2A - B$$

Esimerkki 3

Sisältö

Osa I: Teoriaa

Osa II: Esimerkkejä

- Esimerkki 1
- Esimerkki 2
- Esimerkki 2 jatkuu...
- **Esimerkki 3**

Osa III: Sovelluksia

Hajota osamurtoihin murtofunktio $f(x) = \frac{x}{2x^2+3x-2}$.
Jaetaan ensin nimittäjä tekijöihin. Nimittäjän nollakohdat ovat $x = \frac{1}{2}$ ja $x = -2$.

$$f(x) = \frac{x}{2x^2 + 3x - 2} = \frac{x}{2(x - \frac{1}{2})(x + 2)} = \frac{x}{(2x - 1)(x + 2)}$$

$$\frac{x}{(2x - 1)(x + 2)} \equiv \frac{A}{2x - 1} + \frac{B}{x + 2} \quad || \cdot (2x - 1)(x + 2)$$

$$x \equiv A(x + 2) + B(2x - 1) \equiv (A + 2B)x + 2A - B$$

$$\begin{cases} A + 2B = 1 \\ 2A - B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{5} \\ B = \frac{2}{5} \end{cases}$$

Esimerkki 3

Sisältö

Osa I: Teoriaa

Osa II: Esimerkkejä

- Esimerkki 1
- Esimerkki 2
- Esimerkki 2 jatkuu...
- **Esimerkki 3**

Osa III: Sovelluksia

Hajota osamurtoihin murtofunktio $f(x) = \frac{x}{2x^2+3x-2}$.
Jaetaan ensin nimittäjä tekijöihin. Nimittäjän nollakohdat ovat $x = \frac{1}{2}$ ja $x = -2$.

$$f(x) = \frac{x}{2x^2 + 3x - 2} = \frac{x}{2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 2)} = \frac{x}{(2x - 1)(x + 2)}$$

$$\frac{x}{(2x - 1)(x + 2)} \equiv \frac{A}{2x - 1} + \frac{B}{x + 2} \parallel \cdot (2x - 1)(x + 2)$$

$$x \equiv A(x + 2) + B(2x - 1) \equiv (A + 2B)x + 2A - B$$

$$\begin{cases} A + 2B = 1 \\ 2A - B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{5} \\ B = \frac{2}{5} \end{cases}$$

Täten on saatu osamurtohajotelma

$$\frac{x}{2x^2 + 3x - 2} = \frac{\frac{1}{5}}{2x - 1} + \frac{\frac{2}{5}}{x + 2} = \frac{1}{10x - 5} + \frac{2}{5x + 10}$$

Sisältö

Osa I: Teoriaa

Osa II: Esimerkkejä

Osa III: Sovelluksia

- Sovellus 1
- Sovellus 2



Osa III: Sovelluksia

Sovellus 1

Sisältö

Osa I: Teoriaa

Osa II: Esimerkkejä

Osa III: Sovelluksia

- **Sovellus 1**
- Sovellus 2

Laske

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2(x+1)} dx.$$

Sovellus 1

Sisältö

Osa I: Teoriaa

Osa II: Esimerkkejä

Osa III: Sovelluksia

● **Sovellus 1**

● Sovellus 2

Laske

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2(x+1)} dx.$$

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2(x+1)} dx = \int_1^2 \left(\frac{-1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x+1} \right) dx$$

Sovellus 1

Sisältö

Osa I: Teoriaa

Osa II: Esimerkkejä

Osa III: Sovelluksia

● **Sovellus 1**

● Sovellus 2

Laske

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2(x+1)} dx.$$

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2(x+1)} dx = \int_1^2 \left(\frac{-1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x+1} \right) dx$$

$$= - \int_1^2 \ln |x| - \int_1^2 x^{-1} + \int_1^2 \ln |x+1| =$$

Sovellus 1

Sisältö

Osa I: Teoriaa

Osa II: Esimerkkejä

Osa III: Sovelluksia

- **Sovellus 1**
- Sovellus 2

Laske

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2(x+1)} dx.$$

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2(x+1)} dx = \int_1^2 \left(\frac{-1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x+1} \right) dx$$

$$= - \int_1^2 \ln |x| - \int_1^2 x^{-1} + \int_1^2 \ln |x+1| = \ln 3 - 2\ln 2 + \frac{1}{2}$$

Sovellus 2

Sisältö

Osa I: Teoriaa

Osa II: Esimerkkejä

Osa III: Sovelluksia

- Sovellus 1
- **Sovellus 2**

Laske

$$\int_1^3 \frac{x}{2x^2 + 3x - 2} dx$$

Sovellus 2

Sisältö

Osa I: Teoriaa

Osa II: Esimerkkejä

Osa III: Sovelluksia

● Sovellus 1

● **Sovellus 2**

Laske

$$\int_1^3 \frac{x}{2x^2 + 3x - 2} dx$$

$$\int_1^3 \frac{x}{2x^2 + 3x - 2} dx = \int_1^3 \left(\frac{1}{10x - 5} + \frac{2}{5x + 10} \right) dx$$

Sovellus 2

Sisältö

Osa I: Teoriaa

Osa II: Esimerkkejä

Osa III: Sovelluksia

● Sovellus 1

● **Sovellus 2**

Laske

$$\int_1^3 \frac{x}{2x^2 + 3x - 2} dx$$

$$\int_1^3 \frac{x}{2x^2 + 3x - 2} dx = \int_1^3 \left(\frac{1}{10x - 5} + \frac{2}{5x + 10} \right) dx$$

$$= \frac{1}{10} \int_1^3 \frac{10}{10x - 5} dx + \frac{2}{5} \int_1^3 \frac{5}{5x + 10} dx$$

Sovellus 2

Sisältö

Osa I: Teoriaa

Osa II: Esimerkkejä

Osa III: Sovelluksia

● Sovellus 1

● **Sovellus 2**

Laske

$$\int_1^3 \frac{x}{2x^2 + 3x - 2} dx$$

$$\int_1^3 \frac{x}{2x^2 + 3x - 2} dx = \int_1^3 \left(\frac{1}{10x - 5} + \frac{2}{5x + 10} \right) dx$$

$$= \frac{1}{10} \int_1^3 \frac{10}{10x - 5} dx + \frac{2}{5} \int_1^3 \frac{5}{5x + 10} dx$$

$$= \frac{1}{10} \int_1^3 \ln |10x - 5| + \frac{2}{5} \int_1^3 \ln |5x + 10|$$

Sovellus 2

Sisältö

Osa I: Teoriaa

Osa II: Esimerkkejä

Osa III: Sovelluksia

● Sovellus 1

● **Sovellus 2**

Laske

$$\int_1^3 \frac{x}{2x^2 + 3x - 2} dx$$

$$\int_1^3 \frac{x}{2x^2 + 3x - 2} dx = \int_1^3 \left(\frac{1}{10x - 5} + \frac{2}{5x + 10} \right) dx$$

$$= \frac{1}{10} \int_1^3 \frac{10}{10x - 5} dx + \frac{2}{5} \int_1^3 \frac{5}{5x + 10} dx$$

$$= \frac{1}{10} \int_1^3 \ln |10x - 5| + \frac{2}{5} \int_1^3 \ln |5x + 10|$$

$$= \frac{1}{10} (\ln 25 - \ln 5) + \frac{2}{5} (\ln 25 - \ln 15) = \frac{1}{2} \ln 5 - \frac{2}{5} \ln 3.$$