

Funktion raja-arvo, jatkuvuus ja derivaatta

Hannu Lehto
Lahden Lyseon lukio



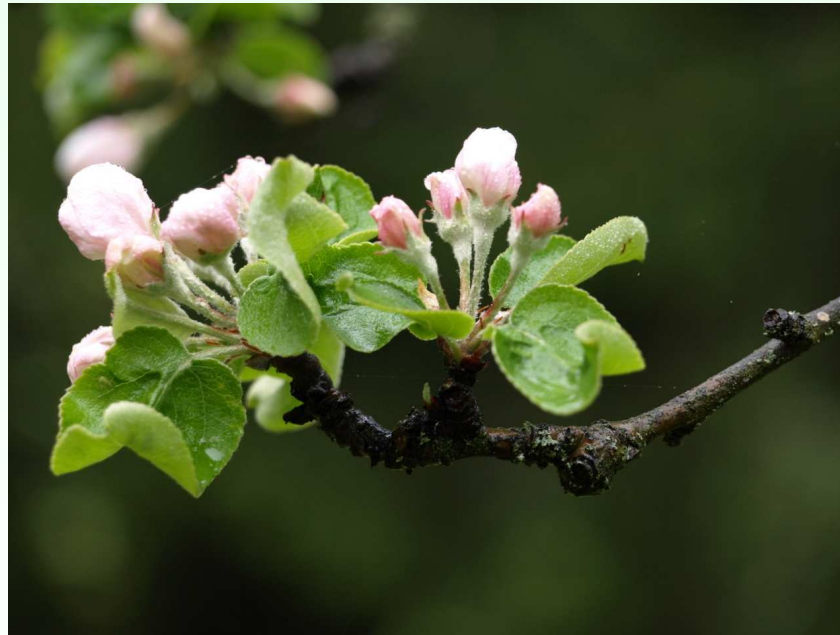
Osa I: Funktion
raja-arvo ja jatkuvuus

- Funktion raja-arvo
- Toispuoliset raja-arvot
- Funktion jatkuvuus
- Epäolennaiset raja-arvot 1
- Epäolennaiset raja-arvot 2
- Rationaalifunktion asymptootit

Osa II:
Rationaalifunktion kulun tutkiminen

Osa III: Funktion derivaatta

Osa I: Funktion raja-arvo ja jatkuvuus



Funktion raja-arvo

Osa I: Funktion
raja-arvo ja jatkuvuus

- **Funktion raja-arvo**
- Toispuoliset raja-arvot
- Funktion jatkuvuus
- Epäolennaiset raja-arvot 1
- Epäolennaiset raja-arvot 2
- Rationaalifunktion asymptootit

Osa II:
Rationaalifunktion kulun
tutkiminen

Osa III: Funktion
derivaatta

- Määritelmä MT7, s. 29

Funktion raja-arvo

Osa I: Funktion
raja-arvo ja jatkuvuus

- **Funktion raja-arvo**
- Toispuoliset raja-arvot
- Funktion jatkuvuus
- Epäolennaiset raja-arvot 1
- Epäolennaiset raja-arvot 2
- Rationaalifunktion asymptootit

Osa II:
Rationaalifunktion kulun
tutkiminen

Osa III: Funktion
derivaatta

- Määritelmä MT7, s. 29¹
- Laskusäännöt MT7, s. 35 – 37

Osa I: Funktion
raja-arvo ja jatkuvuus

- **Funktion raja-arvo**
- Toispuoliset raja-arvot
- Funktion jatkuvuus
- Epäolennaiset raja-arvot 1
- Epäolennaiset raja-arvot 2
- Rationaalifunktion asymptootit

Osa II:
Rationaalifunktion kulun
tutkiminen

Osa III: Funktion
derivaatta

Funktion raja-arvo

- Määritelmä MT7, s. 29¹
- Laskusäännöt MT7, s. 35 – 37²

Esimerkkejä

1.
$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x + 1}$$

Funktion raja-arvo

Osa I: Funktion
raja-arvo ja jatkuvuus

- **Funktion raja-arvo**
- Toispuoliset raja-arvot
- Funktion jatkuvuus
- Epäolennaiset raja-arvot 1
- Epäolennaiset raja-arvot 2
- Rationaalifunktion asymptootit

Osa II:
Rationaalifunktion kulun
tutkiminen

Osa III: Funktion
derivaatta

- Määritelmä MT7, s. 29¹
- Laskusäännöt MT7, s. 35 – 37²

Esimerkkejä

$$1. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x + 1}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9}$$

Funktion raja-arvo

Osa I: Funktion
raja-arvo ja jatkuvuus

- **Funktion raja-arvo**
- Toispuoliset raja-arvot
- Funktion jatkuvuus
- Epäolennaiset raja-arvot 1
- Epäolennaiset raja-arvot 2
- Rationaalifunktion asymptootit

Osa II:
Rationaalifunktion kulun
tutkiminen

Osa III: Funktion
derivaatta

- Määritelmä MT7, s. 29¹
- Laskusäännöt MT7, s. 35 – 37²

Esimerkkejä

1.
$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x + 1}$$

2.
$$\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9}$$

3. MT13, tehtävät 8 ja 9

¹Täsmällinen määritelmä MT13, s. 7 – 14

²Laskusääntöjen todistuksia MT13, s. 17 – 20

Toispuoliset raja-arvot

Osa I: Funktion
raja-arvo ja jatkuvuus

- Funktion raja-arvo
- **Toispuoliset raja-arvot**
- Funktion jatkuvuus
- Epäolennaiset
raja-arvot 1
- Epäolennaiset
raja-arvot 2
- Rationaalifunktion
asymptootit

Osa II:
Rationaalifunktion kulun
tutkiminen

Osa III: Funktion
derivaatta

- Määritelmä MT7, s. 38 –40

Toispuoliset raja-arvot

Osa I: Funktion
raja-arvo ja jatkuvuus

- Funktion raja-arvo
- Toispuoliset raja-arvot
- Funktion jatkuvuus
- Epäolennaiset raja-arvot 1
- Epäolennaiset raja-arvot 2
- Rationaalifunktion asymptootit

Osa II:
Rationaalifunktion kulun
tutkiminen

Osa III: Funktion
derivaatta

- Määritelmä MT7, s. 38 –40

Esimerkkejä

1. Määritä vakiot a ja b niin, että funktiolla

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & , \quad x < -2 \\ ax^3 + bx & , \quad x > -2 \end{cases}$$

on kohdassa -2 raja-arvo 1 .

Toispuoliset raja-arvot

Osa I: Funktion
raja-arvo ja jatkuvuus

- Funktion raja-arvo
- **Toispuoliset raja-arvot**
- Funktion jatkuvuus
- Epäolennaiset raja-arvot 1
- Epäolennaiset raja-arvot 2
- Rationaalifunktion asymptootit

Osa II:
Rationaalifunktion kulun
tutkiminen

Osa III: Funktion
derivaatta

- Määritelmä MT7, s. 38 –40

Esimerkkejä

1. Määritä vakiot a ja b niin, että funktiolla

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & , \quad x < -2 \\ ax^3 + bx & , \quad x > -2 \end{cases}$$

on kohdassa -2 raja-arvo 1 .

2. Määritä raja-arvo $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2|x|}{3x}$

Toispuoliset raja-arvot

Osa I: Funktion
raja-arvo ja jatkuvuus

- Funktion raja-arvo
- Toispuoliset raja-arvot
- Funktion jatkuvuus
- Epäolennaiset raja-arvot 1
- Epäolennaiset raja-arvot 2
- Rationaalifunktion asymptootit

Osa II:
Rationaalifunktion kulun
tutkiminen

Osa III: Funktion
derivaatta

- Määritelmä MT7, s. 38 –40

Esimerkkejä

1. Määritä vakiot a ja b niin, että funktiolla

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & , \quad x < -2 \\ ax^3 + bx & , \quad x > -2 \end{cases}$$

on kohdassa -2 raja-arvo 1 .

2. Määritä raja-arvo $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2|x|}{3x}$
3. MT7 tehtävät 100a, 102b, 98b

Funktion jatkuvuus

Osa I: Funktion
raja-arvo ja jatkuvuus

- Funktion raja-arvo
- Toispuoliset raja-arvot
- **Funktion jatkuvuus**
- Epäolennaiset raja-arvot 1
- Epäolennaiset raja-arvot 2
- Rationaalifunktion asymptootit

Osa II:
Rationaalifunktion kulun
tutkiminen

Osa III: Funktion
derivaatta

- Jatkuvuus annetussa kohdassa: määritelmä MT7, s. 45 – 47

Funktion jatkuvuus

Osa I: Funktion raja-arvo ja jatkuvuus

- Funktion raja-arvo
- Toispuoliset raja-arvot
- **Funktion jatkuvuus**
- Epäolennaiset raja-arvot 1
- Epäolennaiset raja-arvot 2
- Rationaalifunktion asymptootit

Osa II: Rationaalifunktion kulun tutkiminen

Osa III: Funktion derivaatta

- Jatkuvuus annetussa kohdassa: määritelmä MT7, s. 45 – 47
- Toispuolinen jatkuvuus MT7, s. 45

Funktion jatkuvuus

Osa I: Funktion raja-arvo ja jatkuvuus

- Funktion raja-arvo
- Toispuoliset raja-arvot
- **Funktion jatkuvuus**
- Epäolennaiset raja-arvot 1
- Epäolennaiset raja-arvot 2
- Rationaalifunktion asymptootit

Osa II: Rationaalifunktion kulun tutkiminen

Osa III: Funktion derivaatta

- Jatkuvuus annetussa kohdassa: määritelmä MT7, s. 45 – 47
- Toispuolinen jatkuvuus MT7, s. 45
- Funktio f on jatkuva joukossa S , jos se on jatkuva joukon S jokaisessa kohdassa. Suljetun välin päätepisteessä riittää toispuolinen jatkuvuus.

Funktion jatkuvuus

Osa I: Funktion raja-arvo ja jatkuvuus

- Funktion raja-arvo
- Toispuoliset raja-arvot
- **Funktion jatkuvuus**
- Epäolennaiset raja-arvot 1
- Epäolennaiset raja-arvot 2
- Rationaalifunktion asymptootit

Osa II: Rationaalifunktion kulun tutkiminen

Osa III: Funktion derivaatta

- Jatkuvuus annetussa kohdassa: määritelmä MT7, s. 45 – 47
- Toispuolinen jatkuvuus MT7, s. 45
- Funktio f on jatkuva joukossa S , jos se on jatkuva joukon S jokaisessa kohdassa. Suljetun välin päätepisteessä riittää toispuolinen jatkuvuus.
- Jatkuvuuden säilyminen laskutoimituksissa (+, ·, /) MT7, s. 48 – 49

Funktion jatkuvuus

Osa I: Funktion raja-arvo ja jatkuvuus

- Funktion raja-arvo
- Toispuoliset raja-arvot
- **Funktion jatkuvuus**
- Epäolennaiset raja-arvot 1
- Epäolennaiset raja-arvot 2
- Rationaalifunktion asymptootit

Osa II: Rationaalifunktion kulun tutkiminen

Osa III: Funktion derivaatta

- Jatkuvuus annetussa kohdassa: määritelmä MT7, s. 45 – 47
- Toispuolinen jatkuvuus MT7, s. 45
- Funktio f on jatkuva joukossa S , jos se on jatkuva joukon S jokaisessa kohdassa. Suljetun välin päätepisteessä riittää toispuolinen jatkuvuus.
- Jatkuvuuden säilyminen laskutoimituksissa (+, ·, /) MT7, s. 48 – 49
- Yhdistetyn funktion $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ jatkuvuus MT13, s. 28

Funktion jatkuvuus

Osa I: Funktion
raja-arvo ja jatkuvuus

- Funktion raja-arvo
- Toispuoliset raja-arvot
- **Funktion jatkuvuus**
- Epäolennaiset
raja-arvot 1
- Epäolennaiset
raja-arvot 2
- Rationaalifunktion
asymptootit

Osa II:
Rationaalifunktion kulun
tutkiminen

Osa III: Funktion
derivaatta

Esimerkkejä

1. Onko funktio

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{\pi x}{4} & , \quad x < 4 \\ \sqrt{x} - 2 & , \quad x \geq 4 \end{cases}$$

kaikkialla jatkuva, siis aina kun $x \in \mathbb{R}$?

Funktion jatkuvuus

Osa I: Funktion
raja-arvo ja jatkuvuus

- Funktion raja-arvo
- Toispuoliset raja-arvot
- **Funktion jatkuvuus**
- Epäolennaiset
raja-arvot 1
- Epäolennaiset
raja-arvot 2
- Rationaalifunktion
asymptootit

Osa II:
Rationaalifunktion kulun
tutkiminen

Osa III: Funktion
derivaatta

Esimerkkejä

1. Onko funktio

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{\pi x}{4} & , \quad x < 4 \\ \sqrt{x} - 2 & , \quad x \geq 4 \end{cases}$$

kaikkialla jatkuva, siis aina kun $x \in \mathbb{R}$?

2. MT7 tehtävät 119a, 120b, 122, 128

Epäolennaiset raja-arvot 1

Osa I: Funktion
raja-arvo ja jatkuvuus

- Funktion raja-arvo
- Toispuoliset raja-arvot
- Funktion jatkuvuus
- **Epäolennaiset raja-arvot 1**
- Epäolennaiset raja-arvot 2
- Rationaalifunktion asymptootit

Osa II:
Rationaalifunktion kulun tutkiminen

Osa III: Funktion derivaatta

1) Raja-arvo, kun $x \rightarrow \infty$ tai $x \rightarrow -\infty$, MT7, s. 53–56³

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} =$$

Epäolennaiset raja-arvot 1

Osa I: Funktion
raja-arvo ja jatkuvuus

- Funktion raja-arvo
- Toispuoliset raja-arvot
- Funktion jatkuvuus
- **Epäolennaiset raja-arvot 1**
- Epäolennaiset raja-arvot 2
- Rationaalifunktion asymptootit

Osa II:
Rationaalifunktion kulun tutkiminen

Osa III: Funktion derivaatta

1) Raja-arvo, kun $x \rightarrow \infty$ tai $x \rightarrow -\infty$, MT7, s. 53–56³

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^a =$$

Epäolennaiset raja-arvot 1

Osa I: Funktion
raja-arvo ja jatkuvuus

- Funktion raja-arvo
- Toispuoliset raja-arvot
- Funktion jatkuvuus
- **Epäolennaiset raja-arvot 1**
- Epäolennaiset raja-arvot 2
- Rationaalifunktion asymptootit

Osa II:
Rationaalifunktion kulun
tutkiminen

Osa III: Funktion
derivaatta

1) Raja-arvo, kun $x \rightarrow \infty$ tai $x \rightarrow -\infty$, MT7, s. 53–56³

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^a = \begin{cases} 0, & \text{kun } a < 0 \\ \infty, & \text{kun } a > 0 \end{cases}$$

Epäolennaiset raja-arvot 1

Osa I: Funktion
raja-arvo ja jatkuvuus

- Funktion raja-arvo
- Toispuoliset raja-arvot
- Funktion jatkuvuus
- **Epäolennaiset raja-arvot 1**
- Epäolennaiset raja-arvot 2
- Rationaalifunktion asymptootit

Osa II:
Rationaalifunktion kulun
tutkiminen

Osa III: Funktion
derivaatta

1) Raja-arvo, kun $x \rightarrow \infty$ tai $x \rightarrow -\infty$, MT7, s. 53–56³

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^a = \begin{cases} 0, & \text{kun } a < 0 \\ \infty, & \text{kun } a > 0 \end{cases}$$

Esimerkkejä

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 1}{x^2 + 4}$

(epämääräinen muoto " $\frac{\infty}{\infty}$ ")

Epäolennaiset raja-arvot 1

Osa I: Funktion
raja-arvo ja jatkuvuus

- Funktion raja-arvo
- Toispuoliset raja-arvot
- Funktion jatkuvuus
- **Epäolennaiset raja-arvot 1**
- Epäolennaiset raja-arvot 2
- Rationaalifunktion asymptootit

Osa II:
Rationaalifunktion kulun
tutkiminen

Osa III: Funktion
derivaatta

1) Raja-arvo, kun $x \rightarrow \infty$ tai $x \rightarrow -\infty$, MT7, s. 53–56³

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^a = \begin{cases} 0, & \text{kun } a < 0 \\ \infty, & \text{kun } a > 0 \end{cases}$$

Esimerkkejä

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 1}{x^2 + 4}$

(epämääräinen muoto " $\frac{\infty}{\infty}$ ")

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 3}{x^2 + x + 1}$

Epäolennaiset raja-arvot 1

Osa I: Funktion
raja-arvo ja jatkuvuus

- Funktion raja-arvo
- Toispuoliset raja-arvot
- Funktion jatkuvuus
- **Epäolennaiset raja-arvot 1**
- Epäolennaiset raja-arvot 2
- Rationaalifunktion asymptootit

Osa II:
Rationaalifunktion kulun
tutkiminen

Osa III: Funktion
derivaatta

1) Raja-arvo, kun $x \rightarrow \infty$ tai $x \rightarrow -\infty$, MT7, s. 53–56³

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^a = \begin{cases} 0, & \text{kun } a < 0 \\ \infty, & \text{kun } a > 0 \end{cases}$$

Esimerkkejä

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 1}{x^2 + 4}$$

(epämääräinen muoto " $\frac{\infty}{\infty}$ ")

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 3}{x^2 + x + 1}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} - x \right)$$

(epämääräinen muoto " $\infty - \infty$ ")

³Täsmällinen määritelmä MT13, s. 72 – 73

Epäolennaiset raja-arvot 1

Osa I: Funktion
raja-arvo ja jatkuvuus

- Funktion raja-arvo
- Toispuoliset raja-arvot
- Funktion jatkuvuus
- **Epäolennaiset raja-arvot 1**
- Epäolennaiset raja-arvot 2
- Rationaalifunktion asymptootit

Osa II:
Rationaalifunktion kulun
tutkiminen

Osa III: Funktion
derivaatta

Esimerkkejä

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} + x \right)$$

Epäolennaiset raja-arvot 1

Osa I: Funktion
raja-arvo ja jatkuvuus

- Funktion raja-arvo
- Toispuoliset raja-arvot
- Funktion jatkuvuus
- **Epäolennaiset raja-arvot 1**
- Epäolennaiset raja-arvot 2
- Rationaalifunktion asymptootit

Osa II:
Rationaalifunktion kulun
tutkiminen

Osa III: Funktion
derivaatta

Esimerkkejä

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} + x \right)$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} x^{-\frac{1}{2}} (x + 1)$$

(epämääräinen muoto "0 · ∞")

Epäolennaiset raja-arvot 1

Osa I: Funktion
raja-arvo ja jatkuvuus

- Funktion raja-arvo
- Toispuoliset raja-arvot
- Funktion jatkuvuus
- **Epäolennaiset raja-arvot 1**
- Epäolennaiset raja-arvot 2
- Rationaalifunktion asymptootit

Osa II:
Rationaalifunktion kulun
tutkiminen

Osa III: Funktion
derivaatta

$$\lim_{x \rightarrow \infty} k^x =$$

Epäolennaiset raja-arvot 1

Osa I: Funktion
raja-arvo ja jatkuvuus

- Funktion raja-arvo
- Toispuoliset raja-arvot
- Funktion jatkuvuus
- **Epäolennaiset raja-arvot 1**
- Epäolennaiset raja-arvot 2
- Rationaalifunktion asymptootit

Osa II:
Rationaalifunktion kulun tutkiminen

Osa III: Funktion derivaatta

$$\lim_{x \rightarrow \infty} k^x = \begin{cases} \infty & , \quad k > 1 \\ 0 & , \quad 0 < k < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} k^x =$$

Epäolennaiset raja-arvot 1

Osa I: Funktion
raja-arvo ja jatkuvuus

- Funktion raja-arvo
- Toispuoliset raja-arvot
- Funktion jatkuvuus
- **Epäolennaiset raja-arvot 1**
- Epäolennaiset raja-arvot 2
- Rationaalifunktion asymptootit

Osa II:
Rationaalifunktion kulun tutkiminen

Osa III: Funktion derivaatta

$$\lim_{x \rightarrow \infty} k^x = \begin{cases} \infty & , \quad k > 1 \\ 0 & , \quad 0 < k < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} k^x = \lim_{x \rightarrow \infty} k^{-x} =$$

Epäolennaiset raja-arvot 1

Osa I: Funktion
raja-arvo ja jatkuvuus

- Funktion raja-arvo
- Toispuoliset raja-arvot
- Funktion jatkuvuus
- **Epäolennaiset raja-arvot 1**
- Epäolennaiset raja-arvot 2
- Rationaalifunktion asymptootit

Osa II:
Rationaalifunktion kulun tutkiminen

Osa III: Funktion derivaatta

$$\lim_{x \rightarrow \infty} k^x = \begin{cases} \infty & , \quad k > 1 \\ 0 & , \quad 0 < k < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} k^x = \lim_{x \rightarrow \infty} k^{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{k^x} =$$

Epäolennaiset raja-arvot 1

Osa I: Funktion
raja-arvo ja jatkuvuus

- Funktion raja-arvo
- Toispuoliset raja-arvot
- Funktion jatkuvuus
- **Epäolennaiset raja-arvot 1**
- Epäolennaiset raja-arvot 2
- Rationaalifunktion asymptootit

Osa II:
Rationaalifunktion kulun
tutkiminen

Osa III: Funktion
derivaatta

$$\lim_{x \rightarrow \infty} k^x = \begin{cases} \infty & , \quad k > 1 \\ 0 & , \quad 0 < k < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} k^x = \lim_{x \rightarrow \infty} k^{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{k^x} = \begin{cases} 0 & , \quad k > 1 \\ \infty & , \quad 0 < k < 1 \end{cases}$$

Esimerkkejä

6.
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5^{2x} - 10^x}{25^x}$$

Epäolennaiset raja-arvot 2

Osa I: Funktion
raja-arvo ja jatkuvuus

- Funktion raja-arvo
- Toispuoliset raja-arvot
- Funktion jatkuvuus
- Epäolennaiset raja-arvot 1
- **Epäolennaiset raja-arvot 2**
- Rationaalifunktion asymptootit

Osa II:
Rationaalifunktion kulun tutkiminen

Osa III: Funktion derivaatta

2) Raja-arvo ääretön, kun x lähestyy kohtaa, jossa funktiota ei ole määritelty, MT7, s. 56 –57 ⁴

Esimerkkejä

1. Tarkastellaan funktion $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$, $x \neq 1$ mahdollista raja-arvoa kohdassa $x = 1$

Epäolennaiset raja-arvot 2

Osa I: Funktion
raja-arvo ja jatkuvuus

- Funktion raja-arvo
- Toispuoliset raja-arvot
- Funktion jatkuvuus
- Epäolennaiset raja-arvot 1
- **Epäolennaiset raja-arvot 2**
- Rationaalifunktion asymptootit

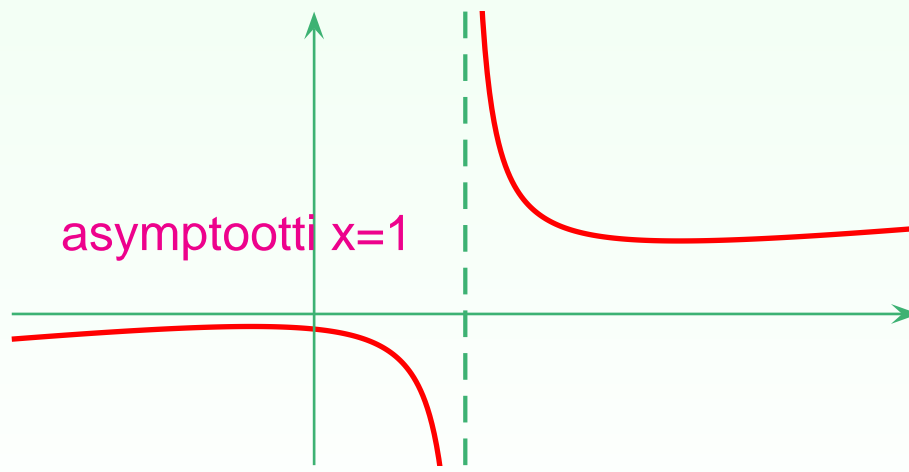
Osa II:
Rationaalifunktion kulun tutkiminen

Osa III: Funktion derivaatta

2) Raja-arvo ääretön, kun x lähestyy kohtaa, jossa funktiota ei ole määritelty, MT7, s. 56 –57 ⁴

Esimerkkejä

1. Tarkastellaan funktion $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$, $x \neq 1$ mahdollista raja-arvoa kohdassa $x = 1$



⁴Täsmällinen määritelmä ja käsittely MT13, s. 67 – 71

Osa I: Funktion
raja-arvo ja jatkuvuus

- Funktion raja-arvo
- Toispuoliset raja-arvot
- Funktion jatkuvuus
- Epäolennaiset raja-arvot 1
- Epäolennaiset raja-arvot 2
- **Rationaalifunktion asymptootit**

Osa II:
Rationaalifunktion kulun
tutkiminen

Osa III: Funktion
derivaatta

Rationaalifunktion asymptootit

- Funktion asymptootti on käyrä, jota funktion kuvaaja rajatta lähestyy.
- MT7, s. 57 –60

Esimerkkejä. Määritä seuraavien rationaalifunktioiden $\frac{P(x)}{Q(x)}$ asymptootit:

1. $f(x) = \frac{3}{x - 2}$

- Funktion raja-arvo
- Toispuoliset raja-arvot
- Funktion jatkuvuus
- Epäolennaiset raja-arvot 1
- Epäolennaiset raja-arvot 2
- **Rationaalifunktion asymptootit**

Rationaalifunktion asymptootit

- Funktion asymptootti on käyrä, jota funktion kuvaaja rajatta lähestyy.
- MT7, s. 57 –60

Esimerkkejä. Määritä seuraavien rationaalifunktioiden $\frac{P(x)}{Q(x)}$ asymptootit:

1. $f(x) = \frac{3}{x - 2}$

2. $f(x) = \frac{3x}{x - 2}$

Rationaalifunktion asymptootit

Osa I: Funktion
raja-arvo ja jatkuvuus

- Funktion raja-arvo
- Toispuoliset raja-arvot
- Funktion jatkuvuus
- Epäolennaiset raja-arvot 1
- Epäolennaiset raja-arvot 2
- Rationaalifunktion asymptootit

Osa II:
Rationaalifunktion kulun
tutkiminen

Osa III: Funktion
derivaatta

- Funktion asymptootti on käyrä, jota funktion kuvaaja rajatta lähestyy.
- MT7, s. 57 –60

Esimerkkejä. Määritä seuraavien rationaalifunktioiden $\frac{P(x)}{Q(x)}$ asymptootit:

1. $f(x) = \frac{3}{x - 2}$

2. $f(x) = \frac{3x}{x - 2}$

3. $f(x) = \frac{x^2}{x - 2}$

Rationaalifunktion asymptootit

Osa I: Funktion
raja-arvo ja jatkuvuus

- Funktion raja-arvo
- Toispuoliset raja-arvot
- Funktion jatkuvuus
- Epäolennaiset raja-arvot 1
- Epäolennaiset raja-arvot 2
- **Rationaalifunktion asymptootit**

Osa II:
Rationaalifunktion kulun
tutkiminen

Osa III: Funktion
derivaatta

- Funktion asymptootti on käyrä, jota funktion kuvaaja rajatta lähestyy.
- MT7, s. 57 –60

Esimerkkejä. Määritä seuraavien rationaalifunktioiden $\frac{P(x)}{Q(x)}$ asymptootit:

1. $f(x) = \frac{3}{x - 2}$

2. $f(x) = \frac{3x}{x - 2}$

3. $f(x) = \frac{x^2}{x - 2}$

Rationaalifunktion asymptoottien määrittäminen

Osa I: Funktion
raja-arvo ja jatkuvuus

- Funktion raja-arvo
- Toispuoliset raja-arvot
- Funktion jatkuvuus
- Epäolennaiset raja-arvot 1
- Epäolennaiset raja-arvot 2
- Rationaalifunktion asymptootit

Osa II:
Rationaalifunktion kulun
tutkiminen

Osa III: Funktion
derivaatta

- Katso MT7, s.59

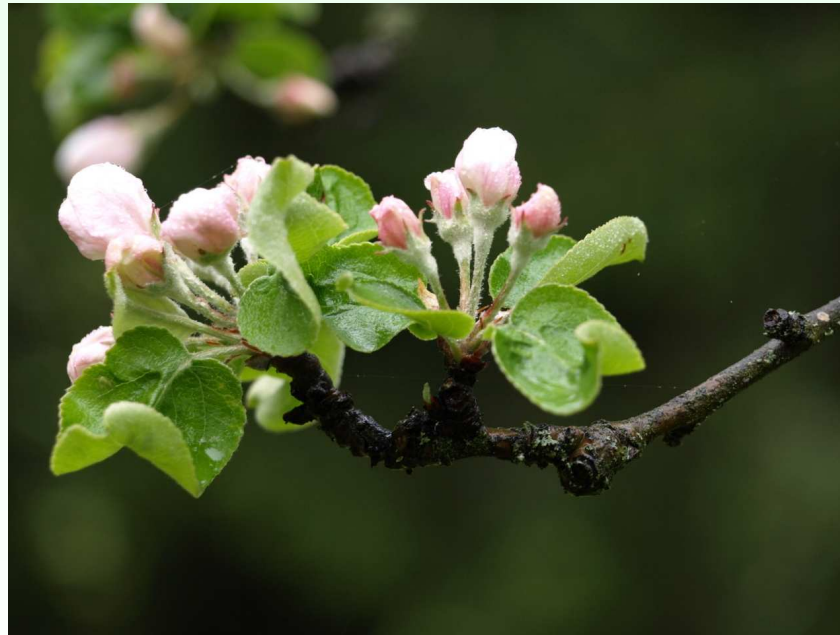
Osa I: Funktion
raja-arvo ja jatkuvuus

Osa II:
Rationaalifunktion kulun
tutkiminen

● Rationaalifunktion
kulun tutkiminen

Osa III: Funktion
derivaatta

Osa II: Rationaalifunktion kulun tutkiminen



Rationaalifunktion kulun tutkiminen

Osa I: Funktion
raja-arvo ja jatkuvuus

Osa II:
Rationaalifunktion kulun
tutkiminen

● Rationaalifunktion
kulun tutkiminen

Osa III: Funktion
derivaatta

- MT7, s. 114 – 116 ja 132 – 133

Rationaalifunktion kulun tutkiminen

Osa I: Funktion
raja-arvo ja jatkuvuus

Osa II:
Rationaalifunktion kulun
tutkiminen

● Rationaalifunktion
kulun tutkiminen

Osa III: Funktion
derivaatta

- MT7, s. 114 – 116 ja 132 – 133

Esimerkki. Tutki rationaalifunktion $f(x) = \frac{x^2}{2x + 2}$ kulkua.

Rationaalifunktion kulun tutkiminen

Osa I: Funktion
raja-arvo ja jatkuvuus

Osa II:
Rationaalifunktion kulun
tutkiminen

● Rationaalifunktion
kulun tutkiminen

Osa III: Funktion
derivaatta

- MT7, s. 114 – 116 ja 132 – 133

Esimerkki. Tutki rationaalifunktion $f(x) = \frac{x^2}{2x + 2}$ kulkua.

1. Määrittelyehto, jatkuvuus, derivoituvuus

Rationaalifunktion kulun tutkiminen

Osa I: Funktion
raja-arvo ja jatkuvuus

Osa II:
Rationaalifunktion kulun
tutkiminen

● Rationaalifunktion
kulun tutkiminen

Osa III: Funktion
derivaatta

- MT7, s. 114 – 116 ja 132 – 133

Esimerkki. Tutki rationaalifunktion $f(x) = \frac{x^2}{2x + 2}$ kulkua.

1. Määrittelyehto, jatkuvuus, derivoituvuus
2. Asymptootit

Rationaalifunktion kulun tutkiminen

Osa I: Funktion
raja-arvo ja jatkuvuus

Osa II:
Rationaalifunktion kulun
tutkiminen

● Rationaalifunktion
kulun tutkiminen

Osa III: Funktion
derivaatta

- MT7, s. 114 – 116 ja 132 – 133

Esimerkki. Tutki rationaalifunktion $f(x) = \frac{x^2}{2x + 2}$ kulkua.

1. Määrittelyehto, jatkuvuus, derivoituvuus
2. Asymptootit
3. Monotonisuus

Rationaalifunktion kulun tutkiminen

Osa I: Funktion
raja-arvo ja jatkuvuus

Osa II:
Rationaalifunktion kulun
tutkiminen

● Rationaalifunktion
kulun tutkiminen

Osa III: Funktion
derivaatta

- MT7, s. 114 – 116 ja 132 – 133

Esimerkki. Tutki rationaalifunktion $f(x) = \frac{x^2}{2x + 2}$ kulkua.

1. Määrittelyehto, jatkuvuus, derivoituvuus
2. Asymptootit
3. Monotonisuus
4. Paikalliset ääriarvot

Rationaalifunktion kulun tutkiminen

Osa I: Funktion
raja-arvo ja jatkuvuus

Osa II:
Rationaalifunktion kulun
tutkiminen

● Rationaalifunktion
kulun tutkiminen

Osa III: Funktion
derivaatta

- MT7, s. 114 – 116 ja 132 – 133

Esimerkki. Tutki rationaalifunktion $f(x) = \frac{x^2}{2x + 2}$ kulkua.

1. Määrittelyehto, jatkuvuus, derivoituvuus
2. Asymptootit
3. Monotonisuus
4. Paikalliset ääriarvot
5. Hahmottele kuvaaja

Rationaalifunktion kulun tutkiminen

Osa I: Funktion
raja-arvo ja jatkuvuus

Osa II:
Rationaalifunktion kulun
tutkiminen

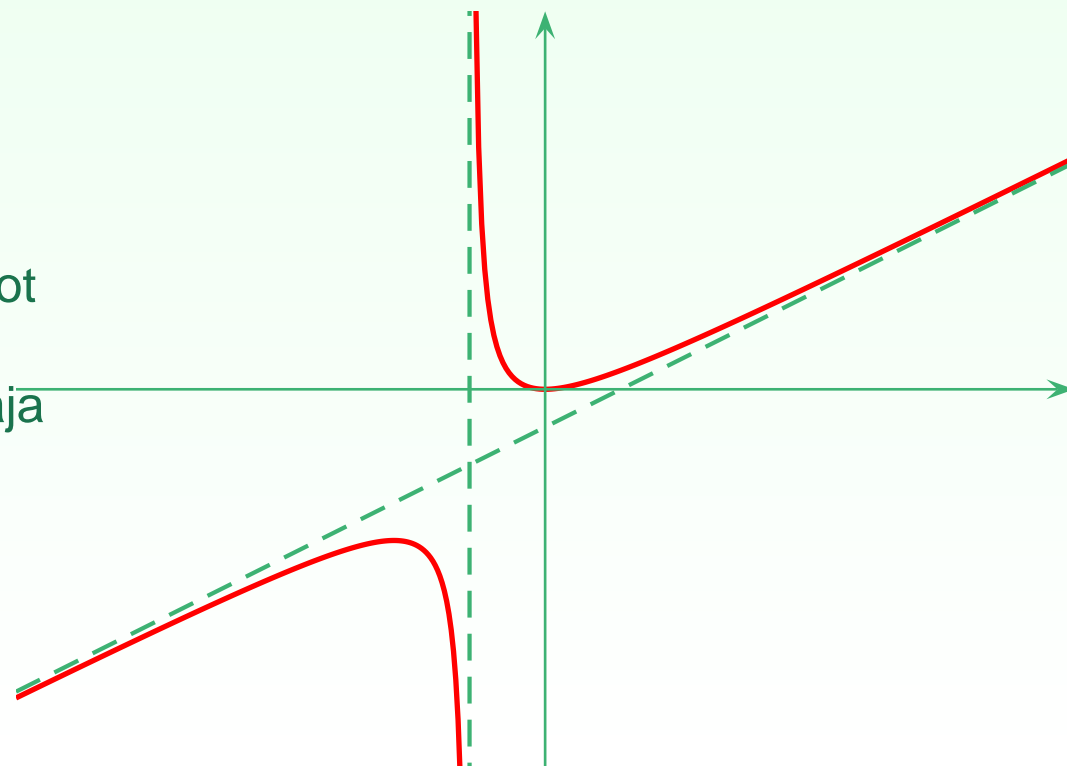
● Rationaalifunktion
kulun tutkiminen

Osa III: Funktion
derivaatta

- MT7, s. 114 – 116 ja 132 – 133

Esimerkki. Tutki rationaalifunktion $f(x) = \frac{x^2}{2x + 2}$ kulkua.

1. Määrittelyehto, jatkuvuus, derivoituvuus
2. Asymptootit
3. Monotonisuus
4. Paikalliset ääriarvot
5. Hahmottele kuvaaja



Rationaalifunktion kulun tutkiminen

Osa I: Funktion
raja-arvo ja jatkuvuus

Osa II:
Rationaalifunktion kulun
tutkiminen

● Rationaalifunktion
kulun tutkiminen

Osa III: Funktion
derivaatta

Esimerkki. Määritä funktion $f(x) = \frac{x^3}{2x - 1}$, $x \in]\frac{1}{2}, 2]$ suurin ja
pienin arvo sekä arvojoukko.

Rationaalifunktion kulun tutkiminen

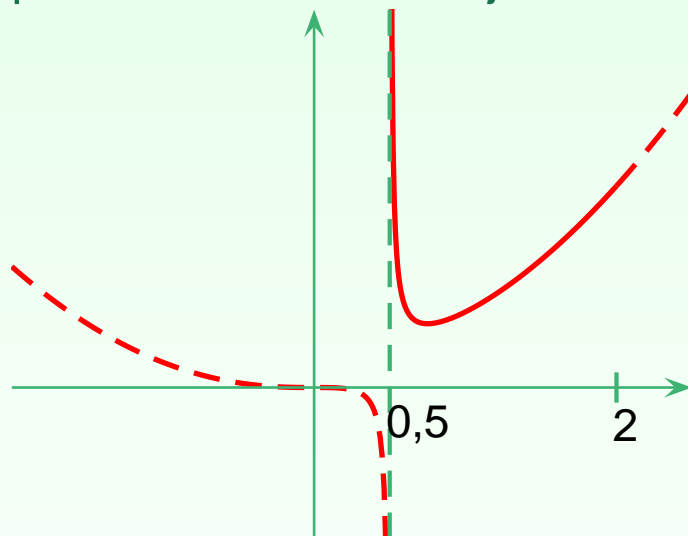
Osa I: Funktion
raja-arvo ja jatkuvuus

Osa II:
Rationaalifunktion kulun
tutkiminen

• Rationaalifunktion
kulun tutkiminen

Osa III: Funktion
derivaatta

Esimerkki. Määritä funktion $f(x) = \frac{x^3}{2x - 1}$, $x \in]\frac{1}{2}, 2]$ suurin ja pienin arvo sekä arvojoukko.



Rationaalifunktion kulun tutkiminen

Osa I: Funktion
raja-arvo ja jatkuvuus

Osa II:
Rationaalifunktion kulun
tutkiminen

● Rationaalifunktion
kulun tutkiminen

Osa III: Funktion
derivaatta

Esimerkki. Määritä funktion $f(x) = \frac{-2}{x^2 + 1}$ arvojoukko.

Rationaalifunktion kulun tutkiminen

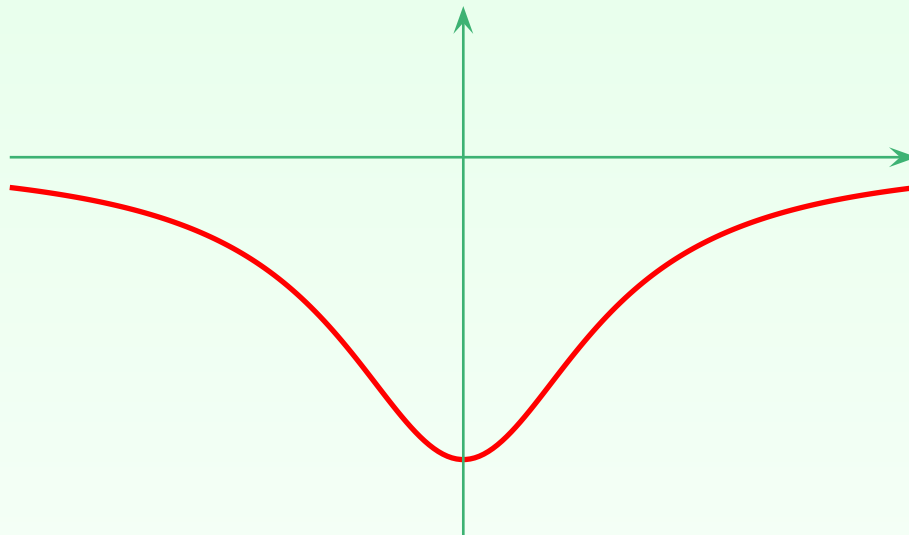
Osa I: Funktion
raja-arvo ja jatkuvuus

Osa II:
Rationaalifunktion kulun
tutkiminen

• Rationaalifunktion
kulun tutkiminen

Osa III: Funktion
derivaatta

Esimerkki. Määritä funktion $f(x) = \frac{-2}{x^2 + 1}$ arvojoukko.



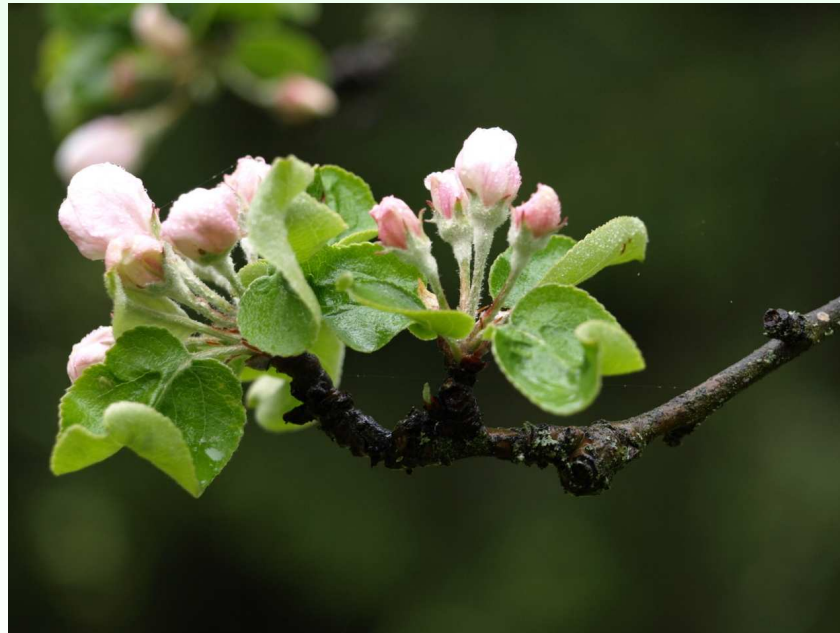
Osa I: Funktion
raja-arvo ja jatkuvuus

Osa II:
Rationaalifunktion kulun
tutkiminen

**Osa III: Funktion
derivaatta**

- Derivaatan määritelmä
- Toispuoliset derivaatat
- Derivoituvuus ja jatkuvuus

Osa III: Funktion derivaatta



Derivaatan määritelmä

Osa I: Funktion
raja-arvo ja jatkuvuus

Osa II:
Rationaalifunktion kulun
tutkiminen

Osa III: Funktion
derivaatta

- **Derivaatan määritelmä**
- Toispuoliset derivaatat
- Derivoituvuus ja jatkuvuus

MT7, s. 62 – 66 ja MT13, s. 32 – 34

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Derivaatan määritelmä

Osa I: Funktion
raja-arvo ja jatkuvuus

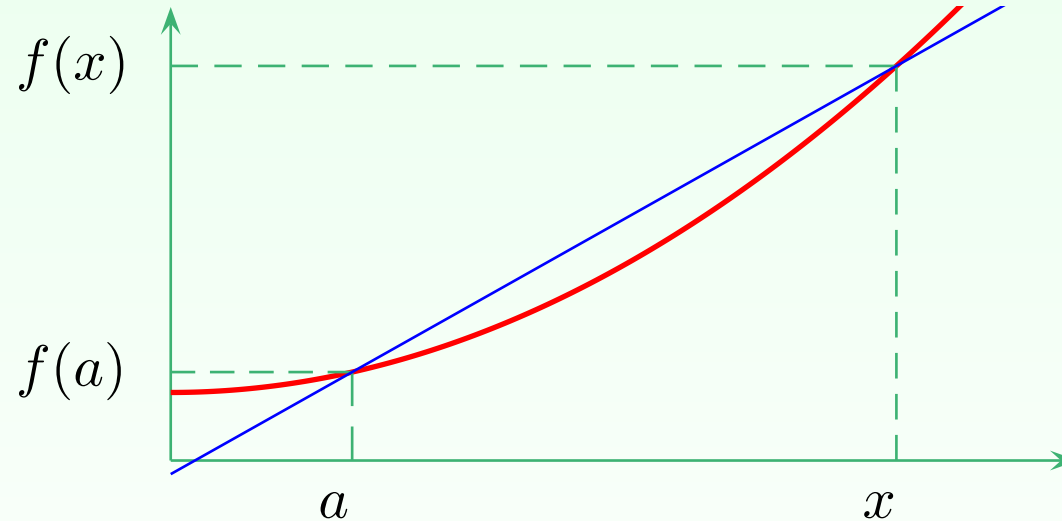
Osa II:
Rationaalifunktion kulun
tutkiminen

Osa III: Funktion
derivaatta

- Derivaatan määritelmä
- Toispuoliset derivaatat
- Derivoituvuus ja jatkuvuus

MT7, s. 62 – 66 ja MT13, s. 32 – 34

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$



Derivaatan määritelmä

Osa I: Funktion
raja-arvo ja jatkuvuus

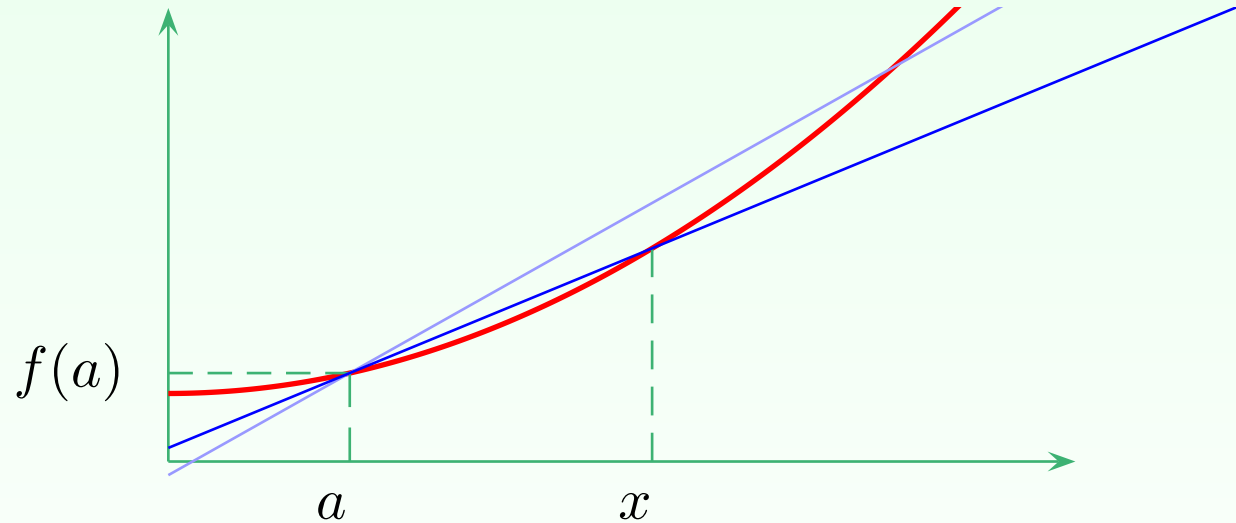
Osa II:
Rationaalifunktion kulun
tutkiminen

Osa III: Funktion
derivaatta

- Derivaatan määritelmä
- Toispuoliset derivaatat
- Derivoituvuus ja jatkuvuus

MT7, s. 62 – 66 ja MT13, s. 32 – 34

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$



Derivaatan määritelmä

Osa I: Funktion
raja-arvo ja jatkuvuus

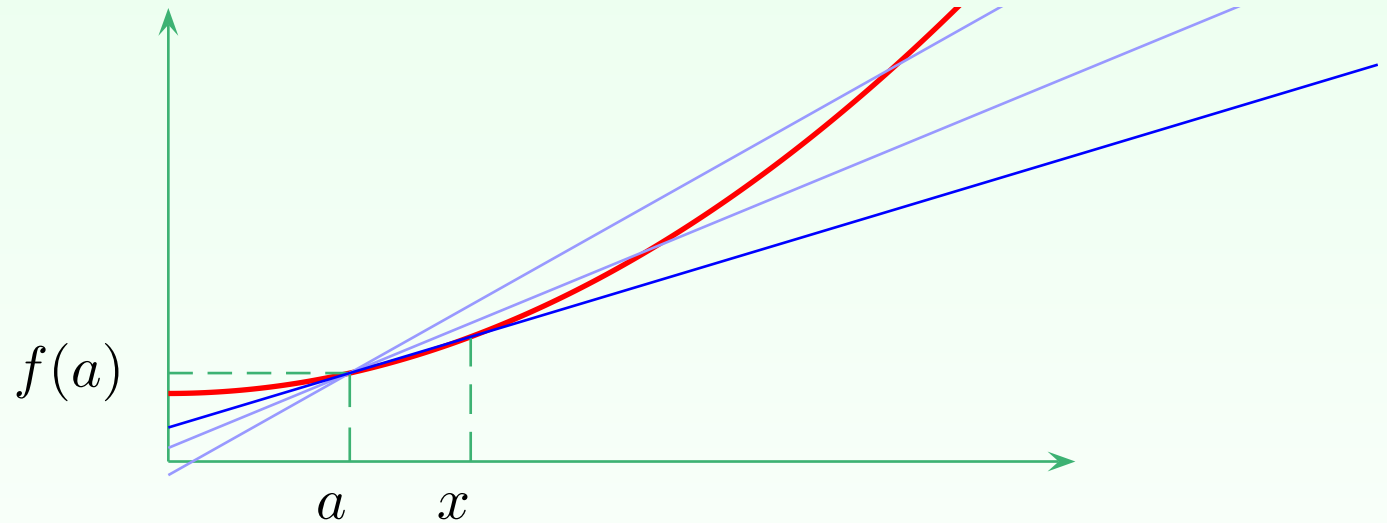
Osa II:
Rationaalifunktion kulun
tutkiminen

Osa III: Funktion
derivaatta

- Derivaatan määritelmä
- Toispuoliset derivaatat
- Derivoituvuus ja jatkuvuus

MT7, s. 62 – 66 ja MT13, s. 32 – 34

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$



Derivaatan määritelmä

Osa I: Funktion
raja-arvo ja jatkuvuus

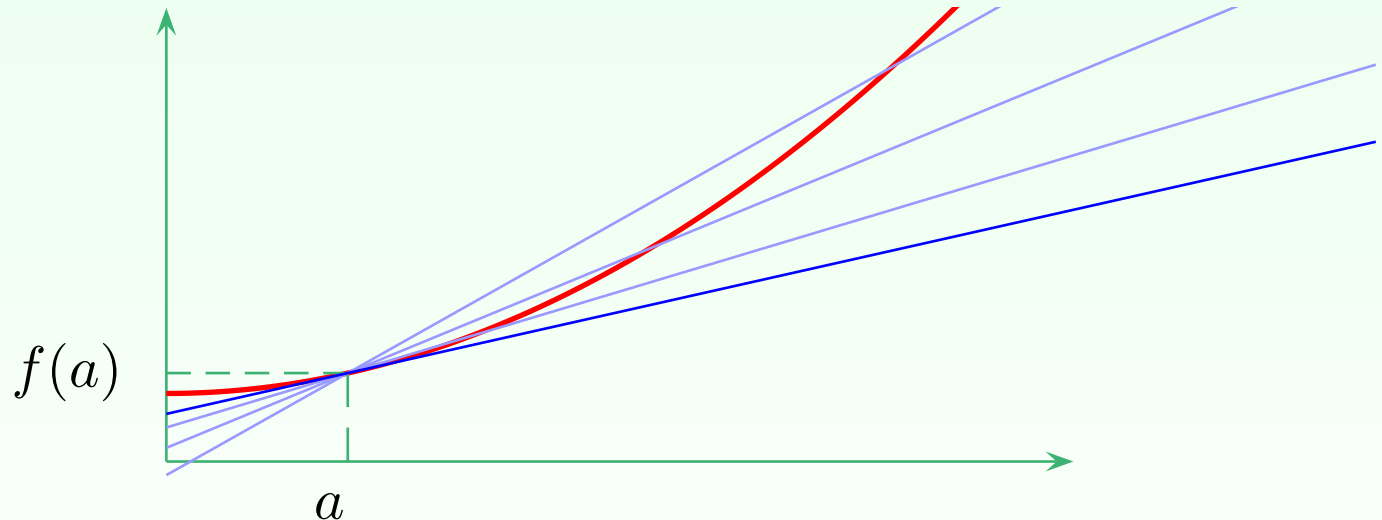
Osa II:
Rationaalifunktion kulun
tutkiminen

Osa III: Funktion
derivaatta

- Derivaatan määritelmä
- Toispuoliset derivaatat
- Derivoituvuus ja jatkuvuus

MT7, s. 62 – 66 ja MT13, s. 32 – 34

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$



Derivaatta kohdassa $x = a$

- on erotusosamäärän raja-arvo, kun $x \rightarrow a$,
- on kohtaan a piirretyn käyrän tangentin kulmakerroin,
- kuvaa funktion muutosnopeutta kohdassa a .

Derivaatan määritelmä

Osa I: Funktion
raja-arvo ja jatkuvuus

Osa II:
Rationaalifunktion kulun
tutkiminen

Osa III: Funktion
derivaatta

- **Derivaatan määritelmä**
- Toispuoliset derivaatat
- Derivoituvuus ja jatkuvuus

Esimerkkejä.

1. Määritä funktion $f(x) = \sqrt{x}$ derivaatta

a) kohdassa $x = 3$,

b) $f'(x)$, kun $x > 0$.

2. YO-S04 tehtävä 10

3. YO-K05 tehtävä 12

Toispuoliset derivaatat

Osa I: Funktion
raja-arvo ja jatkuvuus

Osa II:
Rationaalifunktion kulun
tutkiminen

Osa III: Funktion
derivaatta

- Derivaatan
määritelmä
- **Toispuoliset
derivaatat**
- Derivoituvuus ja
jatkuvuus

- MT7, s. 65

$$f'(a+) = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

oikeanpuolinen derivaatta

$$f'(a-) = \lim_{x \rightarrow a-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

vasemmanpuolinen derivaatta

Toispuoliset derivaatat

Osa I: Funktion
raja-arvo ja jatkuvuus

Osa II:
Rationaalifunktion kulun
tutkiminen

Osa III: Funktion
derivaatta

- Derivaatan määritelmä
- **Toispuoliset derivaatat**
- Derivoituvuus ja jatkuvuus

Esimerkkejä.⁵

1. Onko funktio $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - x & , \quad x \leq 1 \\ x^3 & , \quad x > 1 \end{cases}$ derivoituva
kohdassa $x = 1$?

Toispuoliset derivaatat

Osa I: Funktion
raja-arvo ja jatkuvuus

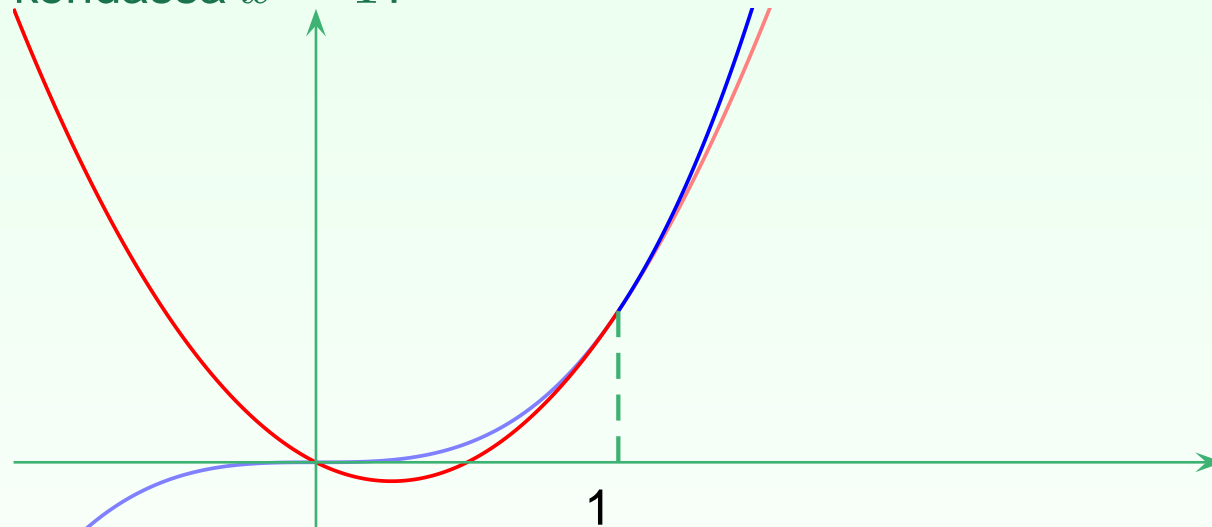
Osa II:
Rationaalifunktion kulun
tutkiminen

Osa III: Funktion
derivaatta

- Derivaatan
määritelmä
- Toispuoliset
derivaatat
- Derivoituvuus ja
jatkuvuus

Esimerkkejä.⁵

1. Onko funktio $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - x & , x \leq 1 \\ x^3 & , x > 1 \end{cases}$ derivoituva
kohdassa $x = 1$?



⁵Katso myös MT13, s. 34

Toispuoliset derivaatat

Osa I: Funktion
raja-arvo ja jatkuvuus

Osa II:
Rationaalifunktion kulun
tutkiminen

Osa III: Funktion
derivaatta

- Derivaatan
määritelmä
- **Toispuoliset
derivaatat**
- Derivoituvuus ja
jatkuvuus

Esimerkkejä.

2. Onko funktiolla $f(x) = \sqrt{x - 1}$ oikeanpuolinen derivaatta kohdassa $x = 1$?

Toispuoliset derivaatat

Osa I: Funktion
raja-arvo ja jatkuvuus

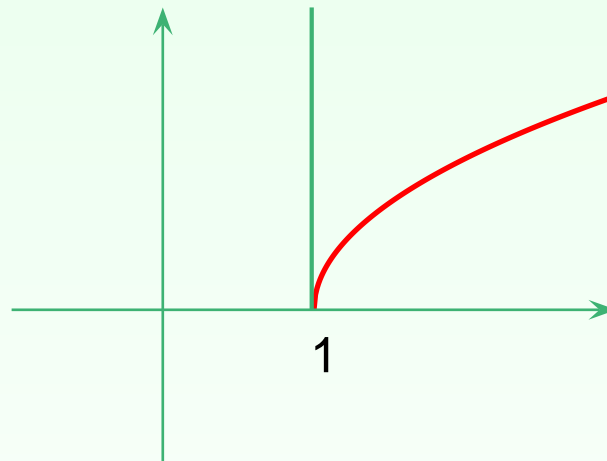
Osa II:
Rationaalifunktion kulun
tutkiminen

Osa III: Funktion
derivaatta

- Derivaatan määritelmä
- **Toispuoliset derivaatat**
- Derivoituvuus ja jatkuvuus

Esimerkkejä.

2. Onko funktiolla $f(x) = \sqrt{x - 1}$ oikeanpuolinen derivaatta kohdassa $x = 1$?



Toispuoliset derivaatat

Osa I: Funktion
raja-arvo ja jatkuvuus

Osa II:
Rationaalifunktion kulun
tutkiminen

Osa III: Funktion
derivaatta

- Derivaatan määritelmä
- **Toispuoliset derivaatat**
- Derivoituvuus ja jatkuvuus

Esimerkkejä.

3. Tutki, onko funktio $f(x) = |x^2 - 4|$ derivoituva kohdassa $x = 2$?

Toispuoliset derivaatat

Osa I: Funktion
raja-arvo ja jatkuvuus

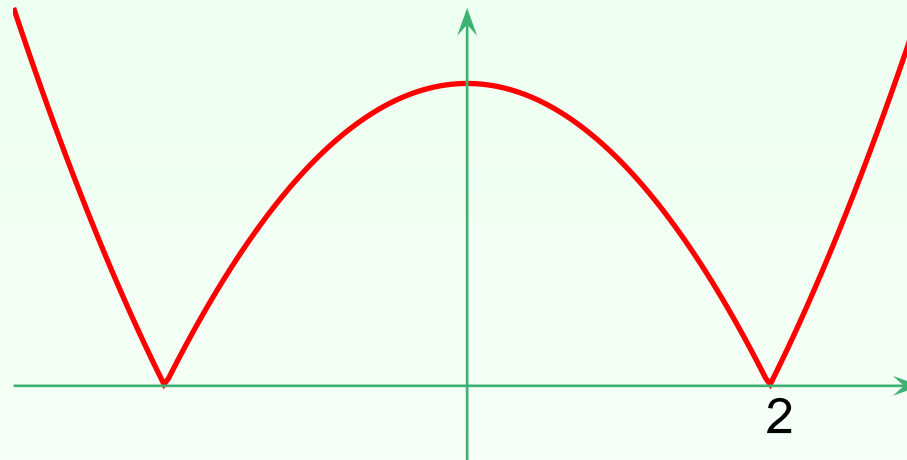
Osa II:
Rationaalifunktion kulun
tutkiminen

Osa III: Funktion
derivaatta

- Derivaatan
määritelmä
- Toispuoliset
derivaatat
- Derivoituvuus ja
jatkuvuus

Esimerkkejä.

3. Tutki, onko funktio $f(x) = |x^2 - 4|$ derivoituva kohdassa $x = 2$?



Derivoituvuus ja jatkuvuus

Osa I: Funktion
raja-arvo ja jatkuvuus

Osa II:
Rationaalifunktion kulun
tutkiminen

Osa III: Funktion
derivaatta

- Derivaatan määritelmä
- Toispuoliset derivaatat
- Derivoituvuus ja jatkuvuus

- MT7, s. 67⁶

Lause. Derivoituva funktio on aina jatkuva. Jatkuva funktio ei välttämättä ole derivoituva.

Derivoituvuus ja jatkuvuus

Osa I: Funktion
raja-arvo ja jatkuvuus

Osa II:
Rationaalifunktion kulun
tutkiminen

Osa III: Funktion
derivaatta

- Derivaatan määritelmä
- Toispuoliset derivaatat
- **Derivoituvuus ja jatkuvuus**

- MT7, s. 67⁶

Lause. Derivoituva funktio on aina jatkuva. Jatkuva funktio ei välttämättä ole derivoituva.

Jatkuvuus on siis välttämätön ehto derivoituvuudelle, mutta ei riittävä.

⁶Myös MT13, s. 35 – 37