

Funktion raja-arvo, jatkuvuus ja derivaatta

Hannu Lehto
Lahden Lyseon lukio

Osa I: Funktion raja-arvo ja jatkuvuus	2
Funktion raja-arvo	3
Toispuoliset raja-arvot	4
Funktion jatkuvuus	5
Epäolennaiset raja-arvot 1	7
Epäolennaiset raja-arvot 2	10
Rationaalifunktion asymptootit	11
Osa II: Rationaalifunktion kulun tutkiminen	13
Rationaalifunktion kulun tutkiminen	14
Osa III: Funktion derivaatta	17
Derivaatan määritelmä	18
Toispuoliset derivaatat	20
Derivoituvuus ja jatkuvuus	24

Funktion raja-arvo

- Määritelmä MT7, s. 29^a
- Laskusäännöt MT7, s. 35 – 37^b

Esimerkkejä

1. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x + 1}$

2. $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9}$

3. MT13, tehtävät 8 ja 9

3 / 24

^aTäsmällinen määritelmä MT13, s. 7 – 14

^bLaskusääntöjen todistuksia MT13, s. 17 – 20

Toispuoliset raja-arvot

- Määritelmä MT7, s. 38 – 40

Esimerkkejä

1. Määritä vakiot a ja b niin, että funktiolla

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & , x < -2 \\ ax^3 + bx & , x > -2 \end{cases}$$

on kohdassa -2 raja-arvo 1 .

2. Määritä raja-arvo $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2|x|}{3x}$

3. MT7 tehtävät 100a, 102b, 98b

4 / 24

Funktion jatkuvuus

- Jatkuvuus annetussa kohdassa: määritelmä MT7, s. 45 – 47
- Toispuolinen jatkuvuus MT7, s. 45
- Funktio f on jatkuva joukossa S , jos se on jatkuva joukon S jokaisessa kohdassa. Suljetun välin päätepisteessä riittää toispuolinen jatkuvuus.
- Jatkuvuuden säilyminen laskutoimituksissa (+, ·, /) MT7, s. 48 – 49
- Yhdistetyn funktion $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ jatkuvuus MT13, s. 28

5 / 24

Funktion jatkuvuus

Esimerkkejä

1. Onko funktio

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{\pi x}{4} & , x < 4 \\ \sqrt{x} - 2 & , x \geq 4 \end{cases}$$

kaikkialla jatkuva, siis aina kun $x \in \mathbb{R}$?

2. MT7 tehtävät 119a, 120b, 122, 128

6 / 24

Epäolennaiset raja-arvot 1

- 1) Raja-arvo, kun $x \rightarrow \infty$ tai $x \rightarrow -\infty$, MT7, s. 53–56^a

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^a = \begin{cases} 0, & \text{kun } a < 0 \\ \infty, & \text{kun } a > 0 \end{cases}$$

Esimerkkejä

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 1}{x^2 + 4}$ (epämääräinen muoto " $\frac{\infty}{\infty}$ ")
2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 3}{x^2 + x + 1}$
3. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x)$ (epämääräinen muoto " $\infty - \infty$ ")

7 / 24

^aTäsmällinen määritelmä MT13, s. 72–73

Epäolennaiset raja-arvot 1

Esimerkkejä

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} + x)$
5. $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{-\frac{1}{2}}(x + 1)$ (epämääräinen muoto " $0 \cdot \infty$ ")

8 / 24

Epäolennaiset raja-arvot 1

$$\lim_{x \rightarrow \infty} k^x = \begin{cases} \infty & , k > 1 \\ 0 & , 0 < k < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} k^x = \lim_{x \rightarrow \infty} k^{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{k^x} = \begin{cases} 0 & , k > 1 \\ \infty & , 0 < k < 1 \end{cases}$$

Esimerkkejä

6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5^{2x} - 10^x}{25^x}$

9 / 24

Harjoitustehtävät

Pyramidi 13, s. 40, tehtävät 310, 313, 314, 316, 317, 318

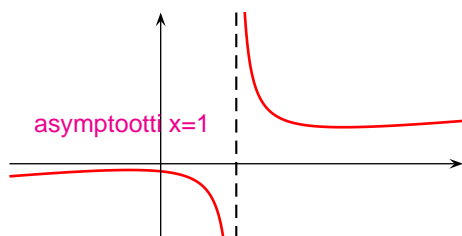
note 1 of slide 9

Epäolennaiset raja-arvot 2

2) Raja-arvo ääretön, kun x lähestyy kohtaa, jossa funktiota ei ole määritelty, MT7, s. 56–57^a

Esimerkkejä

1. Tarkastellaan funktion $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$, $x \neq 1$ mahdollista raja-arvoa kohdassa $x = 1$



10 / 24

^aTäsmällinen määritelmä ja käsittely MT13, s. 67–71

Rationaalifunktion asymptootit

- Funktion asymptootti on käyrä, jota funktion kuvaaja rajatta lähestyy.
- MT7, s. 57 –60

Esimerkkejä. Määritä seuraavien rationaalifunktioiden $\frac{P(x)}{Q(x)}$ asymptootit:

1. $f(x) = \frac{3}{x - 2}$

2. $f(x) = \frac{3x}{x - 2}$

3. $f(x) = \frac{x^2}{x - 2}$

11 / 24

Rationaalifunktion asymptoottien määrittäminen

- Katso MT7, s.59

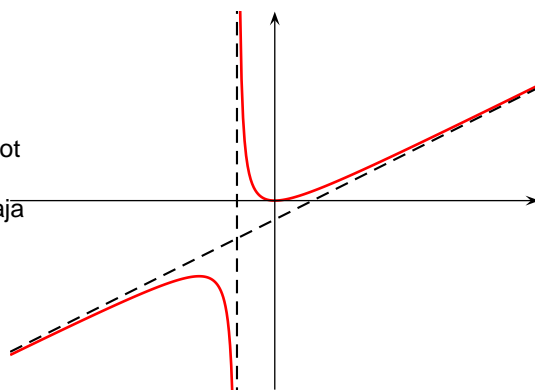
12 / 24

Rationaalifunktion kulun tutkiminen

- MT7, s. 114 – 116 ja 132 – 133

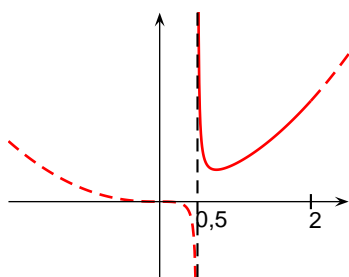
Esimerkki. Tutki rationaalifunktion $f(x) = \frac{x^2}{2x + 2}$ kulkua.

1. Määrittelyehto, jatkuvuus, derivoituvuus
2. Asymptootit
3. Monotonisuus
4. Paikalliset ääriarvot
5. Hahmottele kuvaaja



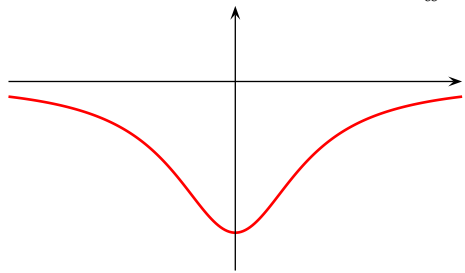
Rationaalifunktion kulun tutkiminen

Esimerkki. Määritä funktion $f(x) = \frac{x^3}{2x - 1}$, $x \in]\frac{1}{2}, 2]$ suurin ja pienin arvo sekä arvojoukko.



Rationaalifunktion kulun tutkiminen

Esimerkki. Määritä funktion $f(x) = \frac{-2}{x^2 + 1}$ arvojoukko.



16 / 24

Harjoitustehtävät

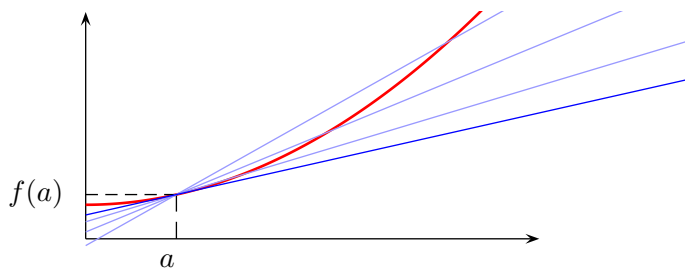
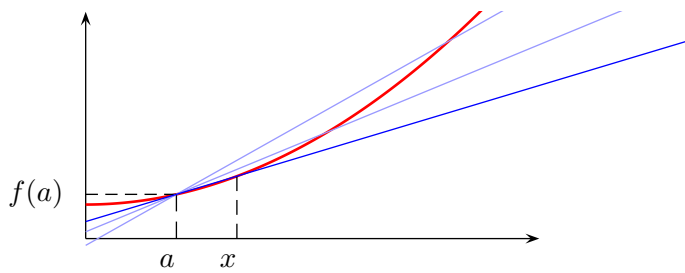
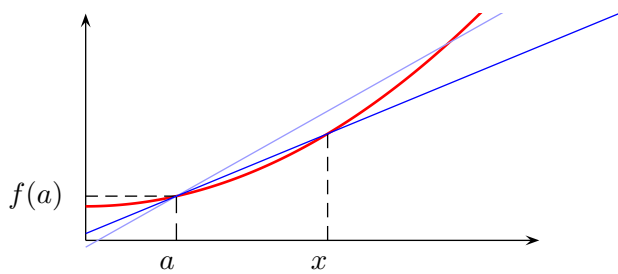
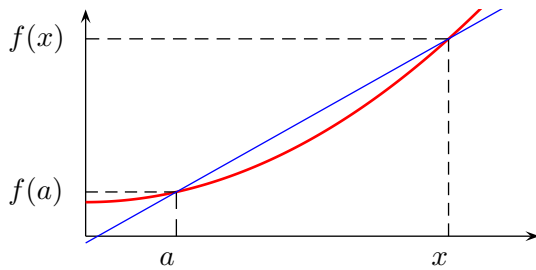
Tehtävät MT7: 291, 284a, 292, 318b, 319a, 335

note 1 of slide 16

Derivaatan määritelmä

MT7, s. 62 – 66 ja MT13, s. 32 – 34

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$



Derivaatta kohdassa $x = a$

- on erotusosamäärän raja-arvo, kun $x \rightarrow a$,
- on kohtaan a piirretyn käyrän tangentin kulmakerroin,
- kuvaa funktion muutosnopeutta kohdassa a .

Derivaatan määritelmä

Esimerkkejä.

1. Määritä funktion $f(x) = \sqrt{x}$ derivaatta
 - a) kohdassa $x = 3$,
 - b) $f'(x)$, kun $x > 0$.
2. YO-S04 tehtävä 10
3. YO-K05 tehtävä 12

19 / 24

Harjoitustehtäviä

- YO-S04:10. Määritä funktion $f(x) = 1/x$ derivaatta pisteessä $x = 2$ laskemalla erotusosamäärän raja-arvo.
- YO-K05:12. Olkoon funktio f jatkuva origossa. Määritä erotusosamäärän avulla funktion $g(x) = xf(x)$ derivaatta origossa. Voidaanko tulosta soveltaa funktioon $f(x) = |x| + 1$?

note 1 of slide 19

Toispuoliset derivaatat

- MT7, s. 65

$$f'(a+) = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{oikeanpuolinen derivaatta}$$

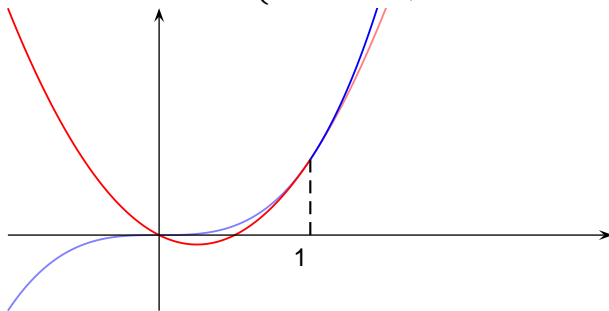
$$f'(a-) = \lim_{x \rightarrow a-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{vasemmanpuolinen derivaatta}$$

20 / 24

Toispuoliset derivaatat

Esimerkkejä.^a

1. Onko funktio $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - x, & x \leq 1 \\ x^3, & x > 1 \end{cases}$ derivoituva kohdassa $x = 1$?



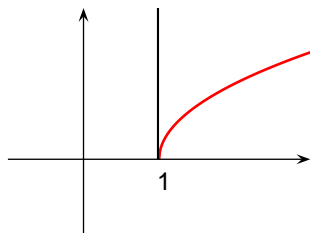
21 / 24

^aKatso myös MT13, s. 34

Toispuoliset derivaatat

Esimerkkejä.

2. Onko funktiolla $f(x) = \sqrt{x-1}$ oikeanpuolinen derivaatta kohdassa $x = 1$?

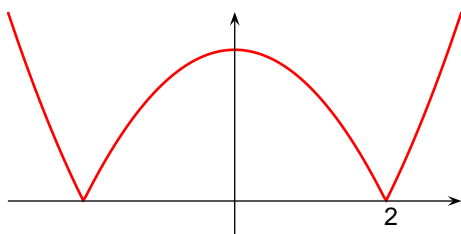


22 / 24

Toispuoliset derivaatat

Esimerkkejä.

3. Tutki, onko funktio $f(x) = |x^2 - 4|$ derivoituva kohdassa $x = 2$?



23 / 24

Derivoituvuus ja jatkuvuus

- MT7, s. 67^a

Lause. Derivoituva funktio on aina jatkuva. Jatkuva funktio ei välttämättä ole derivoituva.

Jatkuvuus on siis välttämätön ehto derivoituvuudelle, mutta ei riittävä.

24 / 24

^aMyös MT13, s. 35 – 37