Lukujonot ja sarjat

Hannu Lehto

Lahden Lyseon lukio

Osa I: Lukujono

Lukujonon määritelmä

- MT9, s. 78 – 82

Funktio $f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}$ on päättymätön lukujono.

Lukujonon määritelmä

- MT9, s. 78 – 82

Funktio $f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}$ on päättymätön lukujono.
Lukujonon yleinen termi on $a_n = f(n)$.

Lukujonon määritelmä

- MT9, s. 78 – 82

Funktio $f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}$ on päättymätön lukujono.
Lukujonon yleinen termi on $a_n = f(n)$.
Lukujonon merkintä: (a_n).

Lukujonon määritelmä

- MT9, s. 78 – 82

Funktio $f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}$ on päättymätön lukujono.
Lukujonon yleinen termi on $a_n = f(n)$.
Lukujonon merkintä: (a_n).
Lukujono voidaan esittää

- Luettelona: $2, 6, 18, 54, 162, \ldots$

Lukujonon määritelmä

- MT9, s. 78 – 82

Funktio $f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}$ on päättymätön lukujono.
Lukujonon yleinen termi on $a_n = f(n)$.
Lukujonon merkintä: (a_n).
Lukujono voidaan esittää

- Luettelona: $2, 6, 18, 54, 162, \ldots$
- Funktiomuodossa: $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$

Lukujonon määritelmä

- MT9, s. 78 – 82

Funktio $f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}$ on päättymätön lukujono.
Lukujonon yleinen termi on $a_n = f(n)$.
Lukujonon merkintä: (a_n).
Lukujono voidaan esittää

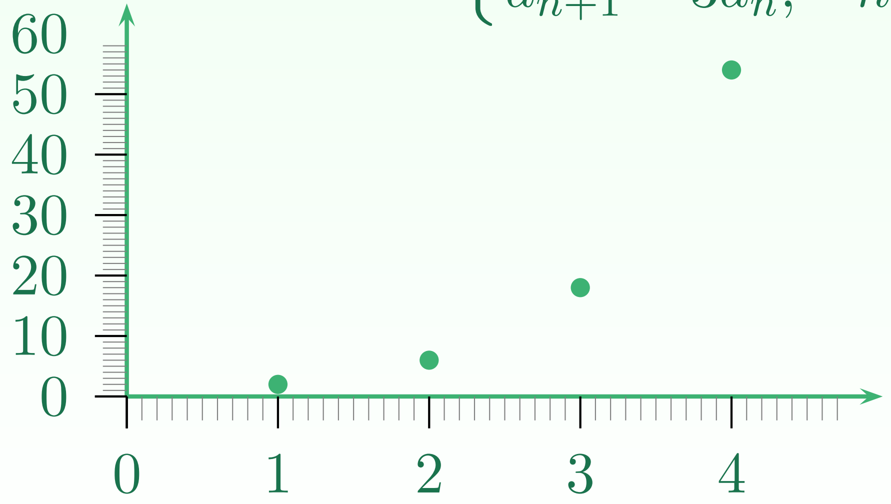
- Luettelona: $2, 6, 18, 54, 162, \ldots$
- Funktiomuodossa: $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$
- Rekursiivisesti: $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = 3a_n, \quad n \in \mathbb{Z}_+ \end{cases}$

Lukujonon määritelmä

- MT9, s. 78 – 82

Funktio $f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}$ on päättymätön lukujono.
Lukujonon yleinen termi on $a_n = f(n)$.
Lukujonon merkintä: (a_n).
Lukujono voidaan esittää

- Luettelona: $2, 6, 18, 54, 162, \ldots$
- Funktiomuodossa: $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$
- Rekursiivisesti: $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = 3a_n, \quad n \in \mathbb{Z}_+ \end{cases}$



Lukujonon monotonisuus

- MT9, s. 87

Lukujono (a_n) on

Lukujonon monotonisuus

- MT9, s. 87

Lukujono (a_n) on

- *aidosti kasvava*, jos $a_n < a_{n+1}$,

Lukujonon monotonisuus

- MT9, s. 87

Lukujono (a_n) on

- *aidosti kasvava*, jos $a_n < a_{n+1}$,
- *kasvava*, jos $a_n \leq a_{n+1}$,

Lukujonon monotonisuus

- MT9, s. 87

Lukujono (a_n) on

- *aidosti kasvava*, jos $a_n < a_{n+1}$,
- *kasvava*, jos $a_n \leq a_{n+1}$,
- *aidosti vähenevä*, jos $a_n > a_{n+1}$,

Lukujonon monotonisuus

- MT9, s. 87

Lukujono (a_n) on

- *aidosti kasvava*, jos $a_n < a_{n+1}$,
- *kasvava*, jos $a_n \leq a_{n+1}$,
- *aidosti vähenevä*, jos $a_n > a_{n+1}$,
- *vähenevä*, jos $a_n \geq a_{n+1}$.

Lukujonon monotonisuus

- MT9, s. 87

Lukujono (a_n) on

- *aidosti kasvava*, jos $a_n < a_{n+1}$,
- *kasvava*, jos $a_n \leq a_{n+1}$,
- *aidosti vähenevä*, jos $a_n > a_{n+1}$,
- *vähenevä*, jos $a_n \geq a_{n+1}$.

Lukujonon monotonisuuden tutkiminen

- MT9, s. 88

Lukujonon $a_n = f(n)$ monotonisuutta voidaan tutkia tarkastelemalla

Lukujonon monotonisuuden tutkiminen

- MT9, s. 88

Lukujonon $a_n = f(n)$ monotonisuutta voidaan tutkia tarkastelemalla

1. erotusta $a_{n+1} - a_n$,

Lukujonon monotonisuuden tutkiminen

- MT9, s. 88

Lukujonon $a_n = f(n)$ monotonisuutta voidaan tutkia tarkastelemalla

1. erotusta $a_{n+1} - a_n$,
2. osamäärää $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$, mikäli jonon kaikki termit ovat positiivisia,

Lukujonon monotonisuuden tutkiminen

- MT9, s. 88

Lukujonon $a_n = f(n)$ monotonisuutta voidaan tutkia tarkastelemalla

1. erotusta $a_{n+1} - a_n$,
2. osamäärää $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$, mikäli jonon kaikki termit ovat positiivisia,
3. funktiota $f(x),\ x \in \mathbb{R} \wedge x \geq 1$, mikäli $f(x)$ on määritelty ja derivoituva, kun $x \geq 1$.

Lukujonon monotonisuuden tutkiminen

- MT9, s. 88

Lukujonon $a_n = f(n)$ monotonisuutta voidaan tutkia tarkastelemalla

1. erotusta $a_{n+1} - a_n$,
2. osamäärää $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$, mikäli jonon kaikki termit ovat positiivisia,
3. funktiota $f(x),\ x \in \mathbb{R} \wedge x \geq 1$, mikäli $f(x)$ on määritelty ja derivoituva, kun $x \geq 1$.

Esimerkkejä.

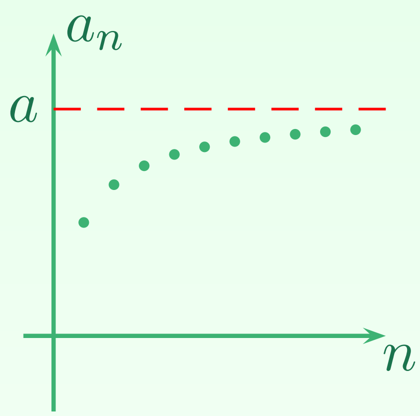
1. YO-K88 tehtävä 7
2. YO-K07 tehtävä 10

Harjoitustehtäviä

- YO-S88:7. Osoita, että lukujono $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$ on aidosti vähenevä.
- YO-K07:10. Jonon (a_n) termit ovat muotoa $a_n = \dfrac{2n-2}{n+1}, n = 1, 2, 3, \ldots$.
  Osoita, että kaikille termeille pätee $a_n < 2$ ja $a_{n+1} > a_n$.

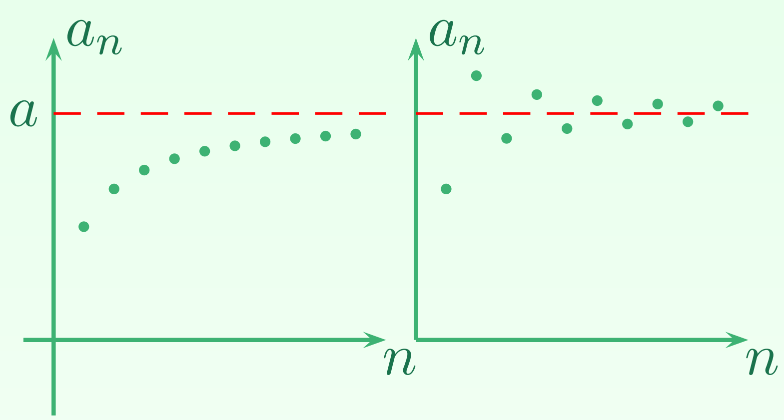
Lukujonon raja-arvon määritelmä

- MT9, s. 115 [1]



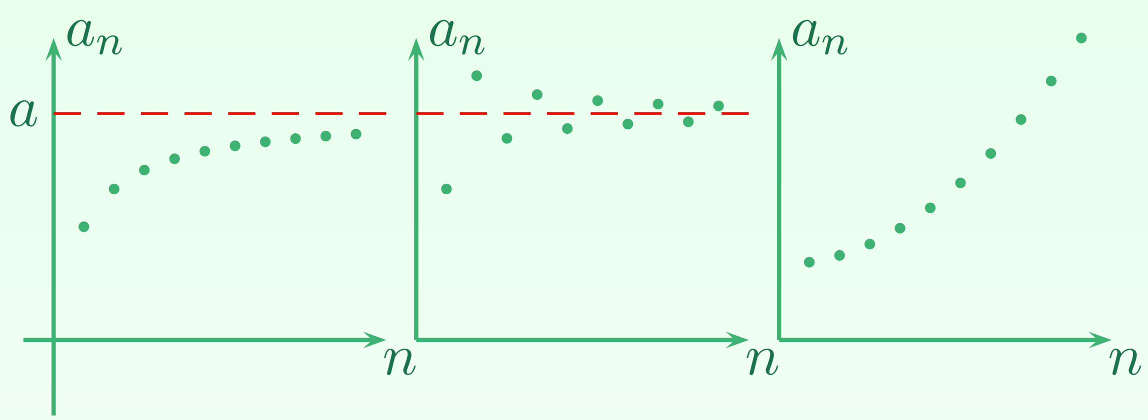
Lukujonon raja-arvon määritelmä

- MT9, s. 115 [1]



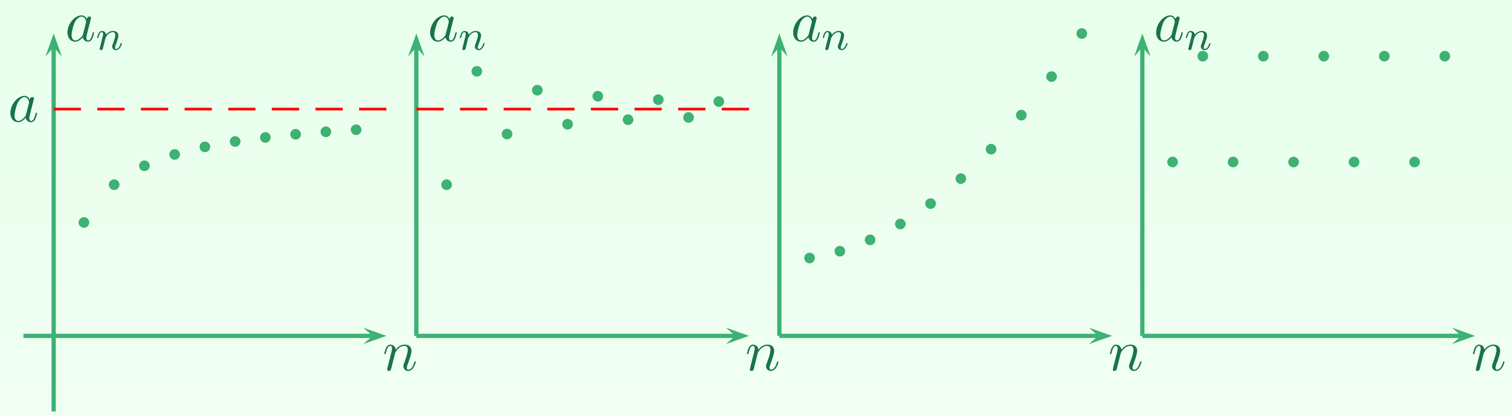
Lukujonon raja-arvon määritelmä

- MT9, s. 115 [1]



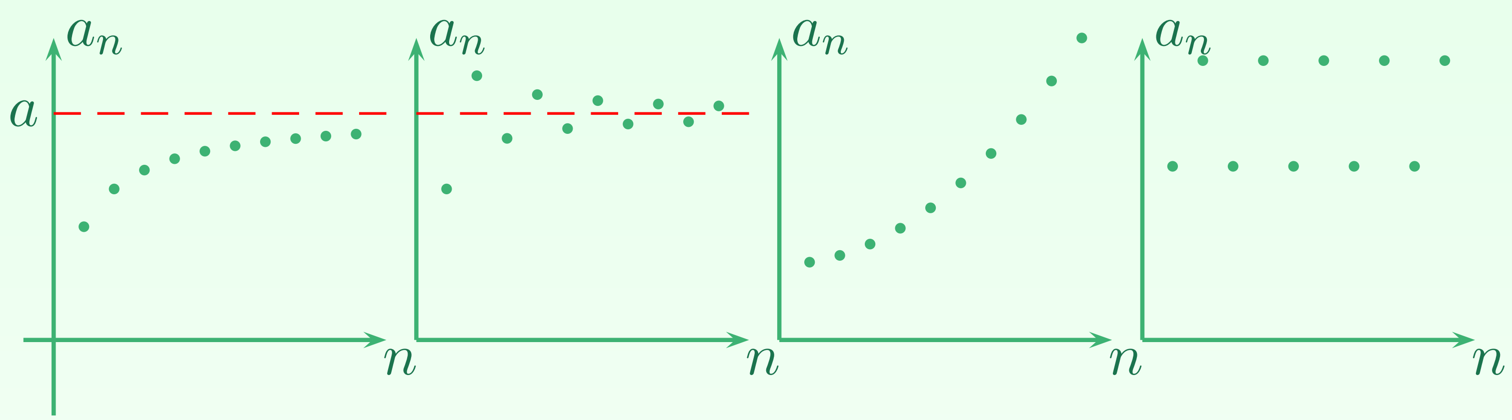
Lukujonon raja-arvon määritelmä

- MT9, s. 115 [1]



Lukujonon raja-arvon määritelmä

- MT9, s. 115 [1]



Lukujono (a_n) *suppenee kohti raja-arvoa* a, jos jonon termit a_n saadaan mielivaltaisen lähelle lukua a, kun n tulee riittävän suureksi. Merkintä:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \text{ tai } a_n \to a, \text{kun } n \to \infty$$

Muussa tapauksessa jono hajaantuu.

[1] Täsmällinen määritelmä MT13, s. 80 – 82

Harjoitustehtäviä

- MT9, s. 122 tehtävä 319. Mistä n:n arvosta lähtien jonon $a_n = \dfrac{n}{2n-1}$ termit poikkeavat jonon raja-arvosta $a = \dfrac{1}{2}$ vähemmän kuin 0,001:n verran?

- YO-S87:5 (hieman muutettuna). Lukujonolla $x_n = \dfrac{2n^2+1}{3n^2-1}$ on raja-arvo $\dfrac{2}{3}$. Mistä n:n arvosta alkaen $\left|x_n - \dfrac{2}{3}\right| < 10^{-5}$? (Vastaus; Arvosta 236 alkaen)

Osa I: Lukujono

- Lukujonon määritelmä
- Lukujonon monotonisuus
- Lukujonon monotonisuuden tutkiminen
- Lukujonon raja-arvon määritelmä
- Lukujonon raja-arvon laskeminen

Osa II: Sarjat

Lukujonon raja-arvon laskeminen

- MT9, s. 116 – 119, erityisesti laskusäännöt sivulta 117
- Laskutekniikka on vastaava kuin laskettaessa funktion raja-arvo äärettömyydessä.

Harjoitustehtäviä

- MT9: 322
- MT9: 325
- MT9: 327
- MT9: 336

Osa II: Sarjat

Johdatteleva esimerkki

Laske ”ääretön summa” $2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$.

Johdatteleva esimerkki

Laske ”ääretön summa” $2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$.

Muodostetaan osasummien jono:

Johdatteleva esimerkki

Laske ”ääretön summa” $2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$.

Muodostetaan osasummien jono:

$S_1 = 2$

Johdatteleva esimerkki

Laske ”ääretön summa” $2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$.

Muodostetaan osasummien jono:

$S_1 = 2$

$S_2 = 2 + 1$

Johdatteleva esimerkki

Laske ”ääretön summa” $2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$.

Muodostetaan osasummien jono:

$$S_1 = 2$$
$$S_2 = 2 + 1$$
$$S_3 = 2 + 1 + \frac{1}{2}$$
$$\vdots$$
$$S_n =$$

Johdatteleva esimerkki

Laske ”ääretön summa” $2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$.

Muodostetaan osasummien jono:

$S_1 = 2$

$S_2 = 2+1$

$S_3 = 2+1+\frac{1}{2}$

$\vdots$

$$S_n = 2+1+\frac{1}{2}+\cdots+$$

Johdatteleva esimerkki

Laske ”ääretön summa” $2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$.

Muodostetaan osasummien jono:

$S_1 = 2$
$S_2 = 2 + 1$
$S_3 = 2 + 1 + \frac{1}{2}$
$\vdots$

$$S_n = 2 + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} =$$

Johdatteleva esimerkki

Laske "ääretön summa" $2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$.

Muodostetaan osasummien jono:

$S_1 = 2$

$S_2 = 2+1$

$S_3 = 2+1+\frac{1}{2}$

$\vdots$

$$S_n = 2+1+\frac{1}{2}+\cdots+2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{2}}$$

$\vdots$

Johdatteleva esimerkki

Laske ”ääretön summa” $2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$.

Muodostetaan osasummien jono:

$S_1 = 2$

$S_2 = 2 + 1$

$S_3 = 2 + 1 + \frac{1}{2}$

$\vdots$

$$S_n = 2 + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1 - \frac{1}{2}}$$

$\vdots$

Jos yhteenlaskettavien määrä $n \to \infty$, niin

$$S_n = \frac{2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1 - \frac{1}{2}} \to$$

Johdatteleva esimerkki

Laske "ääretön summa" $2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$.

Muodostetaan osasummien jono:

$S_1 = 2$

$S_2 = 2 + 1$

$S_3 = 2 + 1 + \frac{1}{2}$

$\vdots$

$$S_n = 2 + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1 - \frac{1}{2}}$$

$\vdots$

Jos yhteenlaskettavien määrä $n \to \infty$, niin

$$S_n = \frac{2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1 - \frac{1}{2}} \to \frac{2}{1 - \frac{1}{2}} = 4.$$

Johdatteleva esimerkki

Laske ”ääretön summa” $2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$.

Muodostetaan osasummien jono:

$$S_1 = 2$$
$$S_2 = 2+1$$
$$S_3 = 2+1+\frac{1}{2}$$
$$\vdots$$
$$S_n = 2+1+\frac{1}{2}+\cdots+2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{2}}$$
$$\vdots$$

Jos yhteenlaskettavien määrä $n \to \infty$, niin

$$S_n = \frac{2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{2}} \to \frac{2}{1-\frac{1}{2}} = 4.$$

joka on ”äärettömän summan” arvo eli sarjan summa.

Sarjan suppenemisen määritelmä

Sarja $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ suppenee, jos osasummien jono (S_n) suppenee.

Sarjan suppenemisen määritelmä

Sarja $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ suppenee, jos osasummien jono (S_n) suppenee.Sarjan summa on osasummien jonon raja-arvo, ts.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n =$$

Sarjan suppenemisen määritelmä

Sarja $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ suppenee, jos osasummien jono (S_n) suppenee.Sarjan summa on osasummien jonon raja-arvo, ts.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = S.$$

Sarjan suppenemisen määritelmä

Sarja $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ suppenee, jos osasummien jono (S_n) suppenee.Sarjan summa on osasummien jonon raja-arvo, ts.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = S.$$

Muulloin sarja hajaantuu.

Esimerkki

Tutki määritelmän nojalla sarjan $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+1}{n}$ suppenemista.

Esimerkki

Tutki määritelmän nojalla sarjan $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+1}{n}$ suppenemista.

1. Muodosta osasummien jonon yleinen termi $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$.
2. Laske raja-arvo $\lim_{n \to \infty} S_n$.

Harjoitustehtäviä

- MT13: 152
- MT13: 158
- MT13: 162

Sarjan yleisen termin raja-arvo

Jos sarja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ suppenee, niin $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$. (Välttämätön ehto suppenemiselle)

Todistus.

$\square$

Sarjan yleisen termin raja-arvo

Jos sarja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ suppenee, niin $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. (Välttämätön ehto suppenemiselle)

Todistus.

$\square$

Seuraus. Jos $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, niin sarja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hajaantuu.

Sarjan yleisen termin raja-arvo

Jos sarja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ suppenee, niin $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. (Välttämätön ehto suppenemiselle)

Todistus.

$\square$

Seuraus. Jos $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, niin sarja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hajaantuu.

Huom. Jos $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, niin sarjan suppenemisesta ei voi päätellä vielä mitään!

Esimerkki

Suppeneeko sarja $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n-5}$?

Harjoitustehtäviä

- MT13: 201
- MT13: 206

Geometrinen jono

Geometrisessa jonossa on

- $a_{n+1} = a_n q$, missä q on vakio
- $a_n = a_1 q^{n-1}$.

Geometrinen jono

Geometrisessa jonossa on

- $a_{n+1} = a_n q$, missä q on vakio
- $a_n = a_1 q^{n-1}$.

Geometrisen jonon suppeneminen

- Jos $-1 < q < 1 \Leftrightarrow |q| < 1$,

Geometrinen jono

Geometrisessa jonossa on

- $a_{n+1} = a_n q$, missä q on vakio
- $a_n = a_1 q^{n-1}$.

Geometrisen jonon suppeneminen

- Jos $-1 < q < 1 \Leftrightarrow |q| < 1$, niin geometrinen jono suppenee ja raja-arvo on 0.
- Jos $q = 1$,

Geometrinen jono

Geometrisessa jonossa on

- $a_{n+1} = a_n q$, missä q on vakio
- $a_n = a_1 q^{n-1}$.

Geometrisen jonon suppeneminen

- Jos $-1 < q < 1 \Leftrightarrow |q| < 1$, niin geometrinen jono suppenee ja raja-arvo on 0.
- Jos $q = 1$, niin geom. jono suppenee ja raja-arvo on a_1.
- Muulloin

Geometrinen jono

Geometrisessa jonossa on

- $a_{n+1} = a_n q$, missä q on vakio
- $a_n = a_1 q^{n-1}$.

Geometrisen jonon suppeneminen

- Jos $-1 < q < 1 \Leftrightarrow |q| < 1$, niin geometrinen jono suppenee ja raja-arvo on 0.
- Jos $q = 1$, niin geom. jono suppenee ja raja-arvo on a_1.
- Muulloin geometrinen jono hajaantuu.

Harjoitustehtäviä

- MT9: 324
- MT9: 328

Geometrinen summa

$$S_n = a + aq + aq^2 + aq^3 + \cdots + aq^{n-1}$$

Geometrinen summa

$$\begin{aligned} S_n &= a + aq + aq^2 + aq^3 + \cdots + aq^{n-1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} aq^{k-1} \end{aligned}$$

Geometrinen summa

$$\begin{aligned} S_n &= a + aq + aq^2 + aq^3 + \cdots + aq^{n-1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} aq^{k-1} \\ &= \frac{a\left(1-q^n\right)}{1-q}, \quad \text{kun } q \neq 1 \end{aligned}$$

Geometrinen summa

$$\begin{aligned} S_n &= a + aq + aq^2 + aq^3 + \cdots + aq^{n-1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} aq^{k-1} \\ &= \frac{a\left(1 - q^n\right)}{1 - q}, \quad \text{kun } q \neq 1 \end{aligned}$$

$$S_n = na, \quad \text{kun } q = 1$$

Geometrinen sarja

Geometrinen sarja $a + aq + aq^2 + aq^3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ suppenee, joss. $-1 < q < 1$, jolloin sen summa on $S = \dfrac{a}{1-q}$.

Todistus.

$\square$

Esimerkki

1. Millä muuttujan x arvoilla sarja $\sum_{n=1}^{\infty}(1-2x)^n$ suppenee?

Mikä tällöin on sarjan summa?

Esimerkki

1. Millä muuttujan x arvoilla sarja $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(1-2x)^n$ suppenee?

Mikä tällöin on sarjan summa?

2. Ratkaise yhtälö $1+2x+4x^2+8x^3+16x^4+\cdots=5.$

Harjoitustehtäviä

- MT13: 173
- MT13: 174
- MT13: 178
- MT13: 181
- MT13: 183
- MT13: 185
- +MT13: 189

Yhteenveto

Sarjan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ suppenemisen tutkiminen