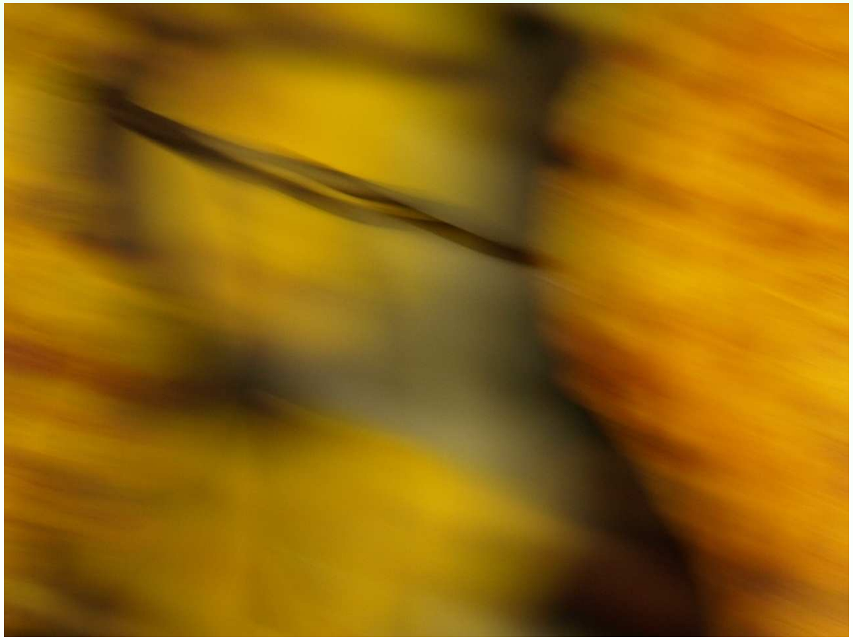
Epäolennaiset integraalit

Hannu Lehto

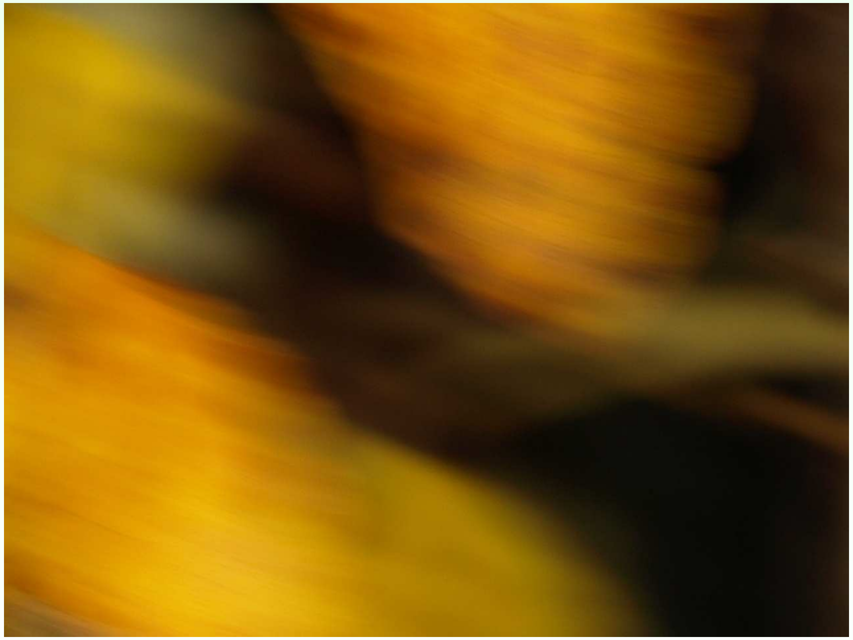
Lahden Lyseon lukio



Osa I: Epäolennainen integraali yli äärettömän välin
- Johdatteleva esimerkki
- Määritelmä
- Esimerkki

Osa II: Epäolennainen integraali yli puoliavoimen tai avoimen välin

Osa I: Epäolennainen integraali yli äärettömän välin



Johdatteleva esimerkki

Osa I: Epäolennainen integraali yli äärettömän välin

- Johdatteleva esimerkki
- Määritelmä
- Esimerkki

Osa II: Epäolennainen integraali yli puoliavoimen tai avoimen välin

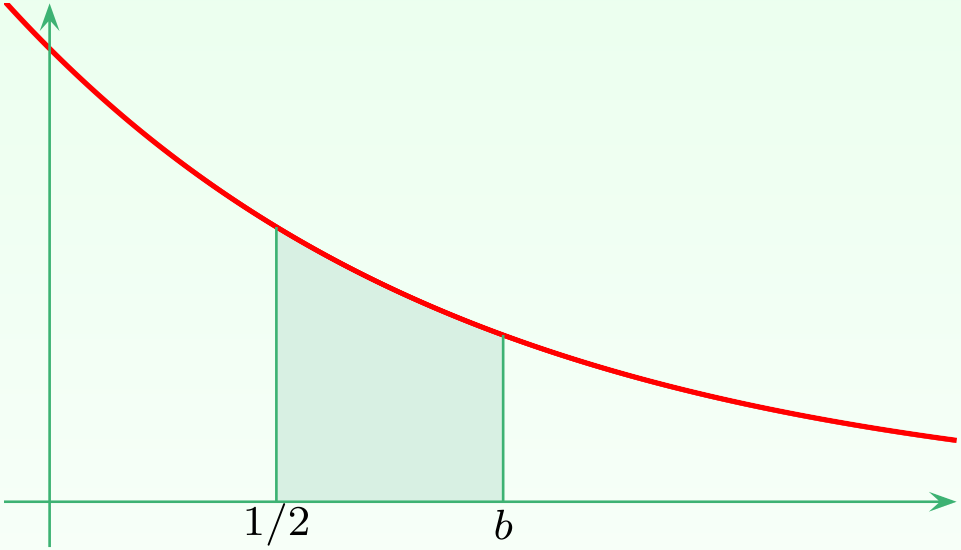
Laske $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{b} e^{-x}\,dx$, kun $b > \dfrac{1}{2}$.

Osa I: Epäolennainen integraali yli äärettömän välin
- Johdatteleva esimerkki
- Määritelmä
- Esimerkki

Osa II: Epäolennainen integraali yli puoliavoimen tai avoimen välin

Johdatteleva esimerkki

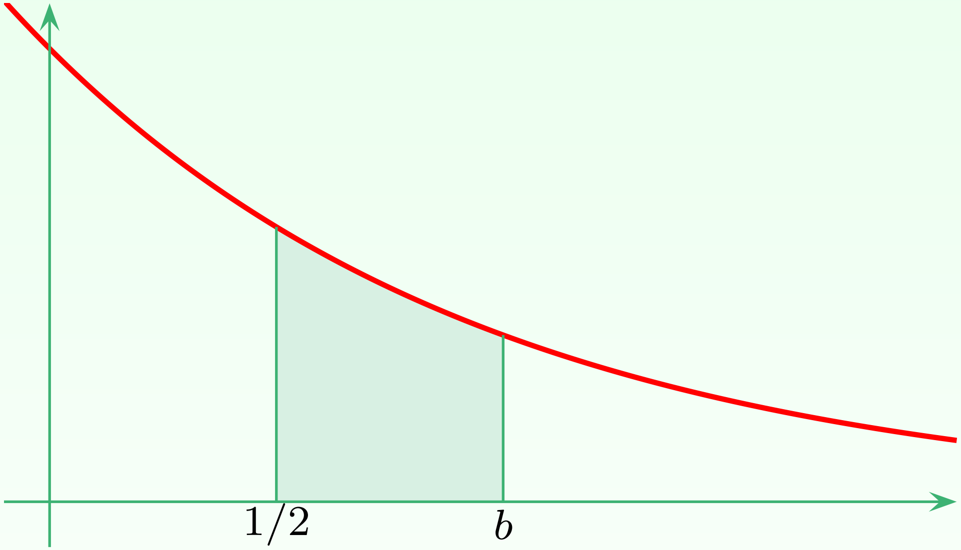
Laske $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{b} e^{-x}dx$, kun $b > \dfrac{1}{2}$.



Osa I: Epäolennainen integraali yli äärettömän välin
● Johdatteleva esimerkki
● Määritelmä
● Esimerkki
Osa II: Epäolennainen integraali yli puoliavoimen tai avoimen välin

Johdatteleva esimerkki

Laske $\int_{\frac{1}{2}}^{b} e^{-x}dx$, kun $b > \frac{1}{2}$.

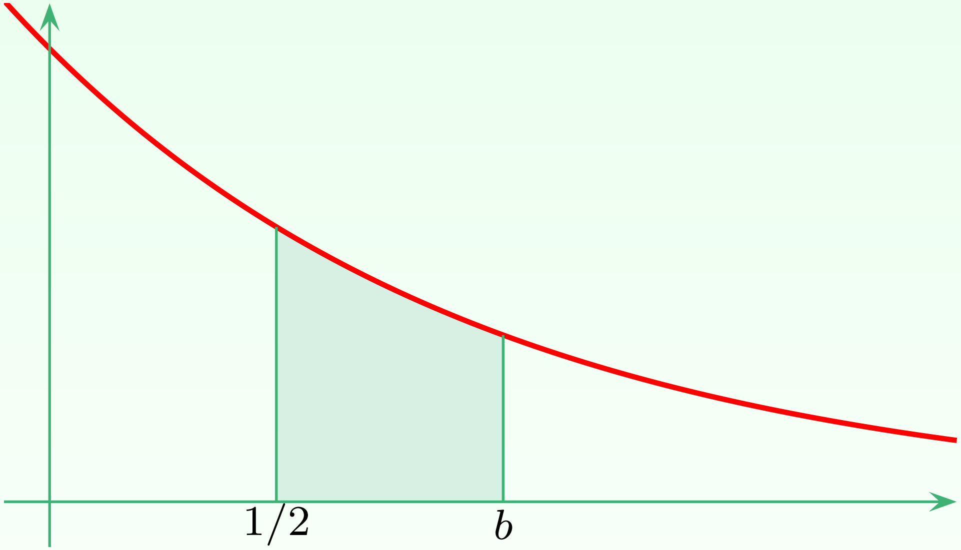


$$\int_{\frac{1}{2}}^{b} e^{-x}dx = -1\int_{\frac{1}{2}}^{b} -1 \cdot e^{-x}dx = -1 \Big/_{\frac{1}{2}}^{b} e^{-x} = -e^{-b} + e^{\frac{1}{2}}$$

Osa I: Epäolennainen integraali yli äärettömän välin
● Johdatteleva esimerkki
● Määritelmä
● Esimerkki
Osa II: Epäolennainen integraali yli puoliavoimen tai avoimen välin

Johdatteleva esimerkki

Laske $\int_{\frac{1}{2}}^{b} e^{-x} dx$, kun $b > \frac{1}{2}$.

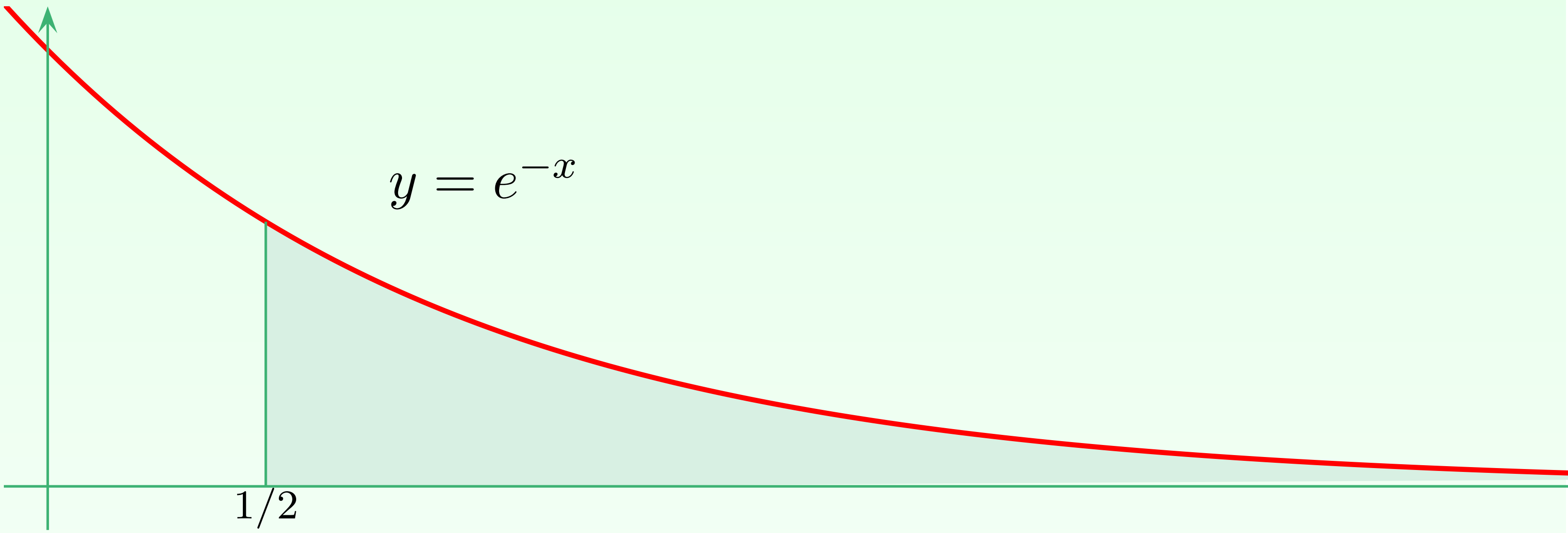


$$\int_{\frac{1}{2}}^{b} e^{-x} dx = -1 \int_{\frac{1}{2}}^{b} -1 \cdot e^{-x} dx = -1 \Big/_{\frac{1}{2}}^{b} e^{-x} = -e^{-b} + e^{\frac{1}{2}}$$

Mitä tapahtuu, kun $b \to \infty$?

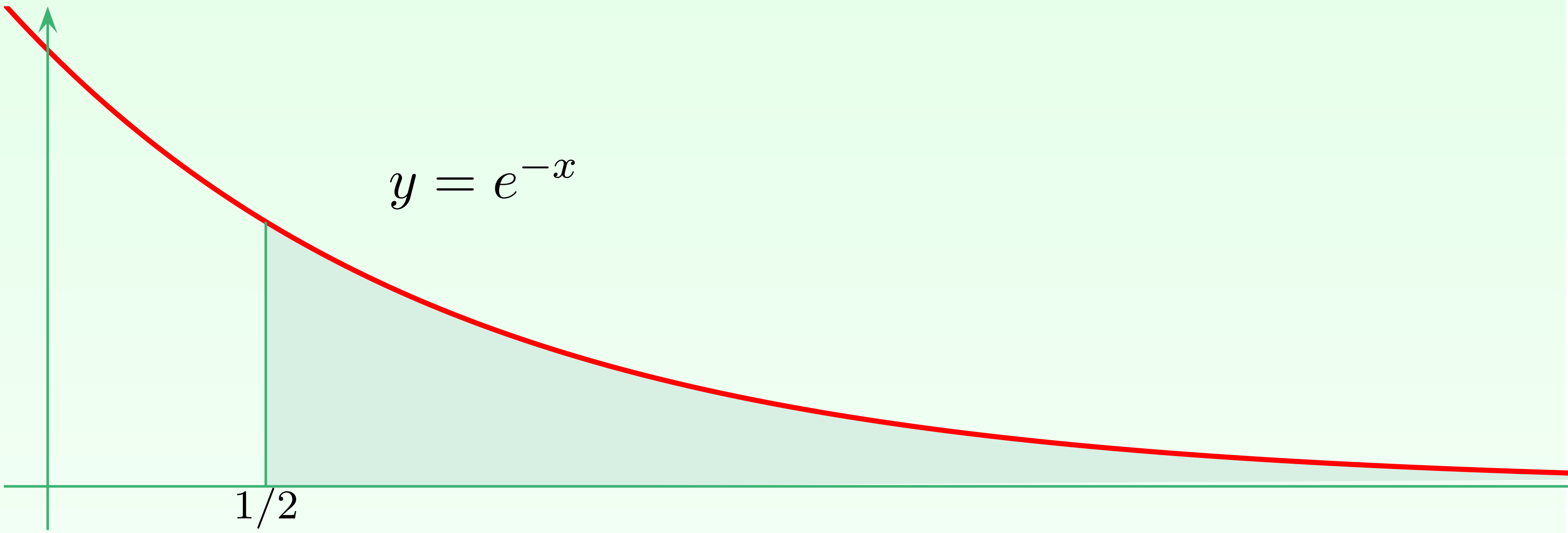
Osa I: Epäolennainen integraali yli äärettömän välin
● Johdatteleva esimerkki
● Määritelmä
● Esimerkki
Osa II: Epäolennainen integraali yli puoliavoimen tai avoimen välin

Johdatteleva esimerkki



Osa I: Epäolennainen integraali yli äärettömän välin
● Johdatteleva esimerkki
● Määritelmä
● Esimerkki
Osa II: Epäolennainen integraali yli puoliavoimen tai avoimen välin

Johdatteleva esimerkki

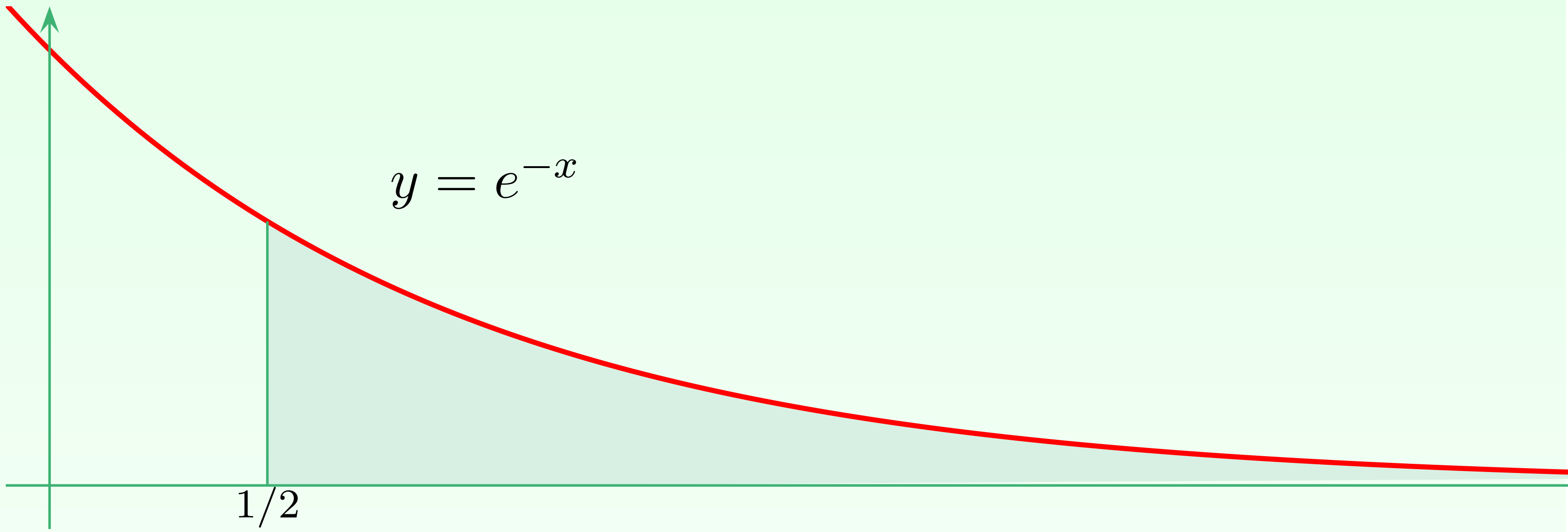


$$\lim_{b\to\infty} \int_{\frac{1}{2}}^{b} e^{-x} dx \quad = \quad \lim_{b\to\infty} \left(-e^{-b} + e^{\frac{1}{2}}\right)$$

Osa I: Epäolennainen integraali yli äärettömän välin
- Johdatteleva esimerkki
- Määritelmä
- Esimerkki

Osa II: Epäolennainen integraali yli puoliavoimen tai avoimen välin

Johdatteleva esimerkki

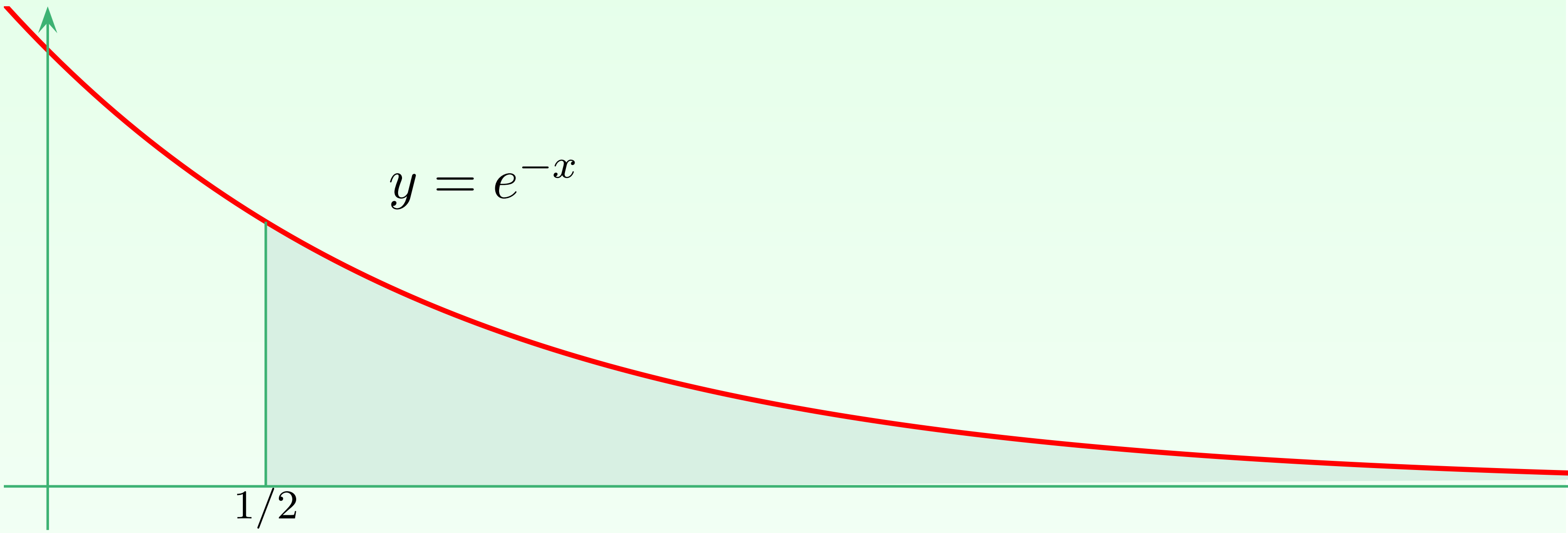


$$\lim_{b\to\infty}\int_{\frac{1}{2}}^{b} e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}\left(-e^{-b}+e^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{e^{b}}+e^{\frac{1}{2}}\right)$$

Osa I: Epäolennainen integraali yli äärettömän välin
● Johdatteleva esimerkki
● Määritelmä
● Esimerkki
Osa II: Epäolennainen integraali yli puoliavoimen tai avoimen välin

Johdatteleva esimerkki

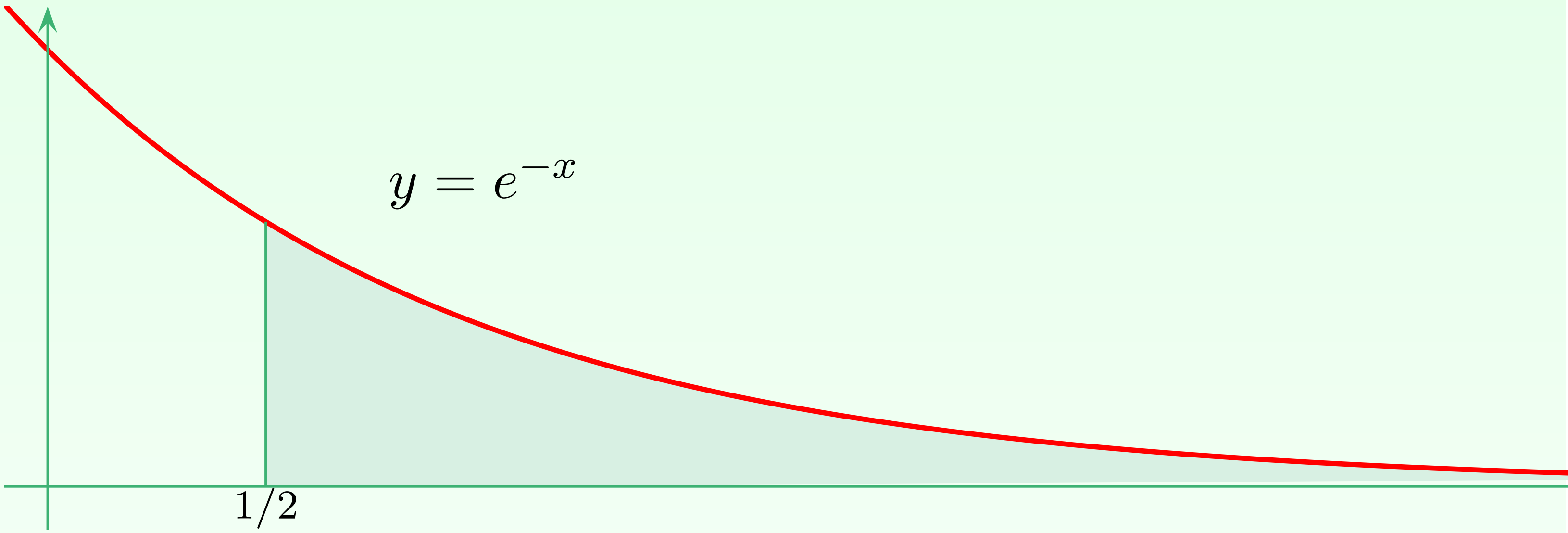


$$\begin{aligned}
\lim_{b\to\infty} \int_{\frac{1}{2}}^{b} e^{-x} dx &= \lim_{b\to\infty} \left(-e^{-b} + e^{\frac{1}{2}}\right) \\
&= \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{e^{b}} + e^{\frac{1}{2}}\right) \\
&= e^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Johdatteleva esimerkki

Osa I: Epäolennainen integraali yli äärettömän välin
- Johdatteleva esimerkki
- Määritelmä
- Esimerkki

Osa II: Epäolennainen integraali yli puoliavoimen tai avoimen välin



$$
\begin{aligned}
\lim_{b\to\infty} \int_{\frac{1}{2}}^{b} e^{-x}dx &= \lim_{b\to\infty}\left(-e^{-b} + e^{\frac{1}{2}}\right) \\
&= \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{e^{b}} + e^{\frac{1}{2}}\right) \\
&= e^{\frac{1}{2}} \\
&= \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} e^{-x}dx
\end{aligned}
$$

Osa I: Epäolennainen integraali yli äärettömän välin
● Johdatteleva esimerkki
● Määritelmä
● Esimerkki
Osa II: Epäolennainen integraali yli puoliavoimen tai avoimen välin

Määritelmä

- Jos f on jatkuva välillä $[a, \infty[$ ja $\lim\limits_{b \to \infty} \int\limits_a^b f(x)dx$ on olemassa, niin (epäolennainen) integraali

$$\int\limits_a^\infty f(x)dx = \lim_{b \to \infty} \int\limits_a^b f(x)dx$$

suppenee, muuten hajaantuu.

Osa I: Epäolennainen integraali yli äärettömän välin
● Johdatteleva esimerkki
● Määritelmä
● Esimerkki
Osa II: Epäolennainen integraali yli puoliavoimen tai avoimen välin

Määritelmä

- Jos f on jatkuva välillä $[a, \infty[$ ja $\lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_a^b f(x)dx$ on olemassa, niin (epäolennainen) integraali

$$\int\limits_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int\limits_a^b f(x)dx$$

suppenee, muuten hajaantuu.

- Jos f on jatkuva välillä $]-\infty, b]$ ja $\lim\limits_{a\to-\infty} \int\limits_a^b f(x)dx$ on olemassa, niin (epäolennainen) integraali

$$\int\limits_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int\limits_a^b f(x)dx$$

suppenee, muuten hajaantuu.

Osa I: Epäolennainen integraali yli äärettömän välin
● Johdatteleva esimerkki
● Määritelmä
● Esimerkki
Osa II: Epäolennainen integraali yli puoliavoimen tai avoimen välin

Määritelmä

- Jos f on jatkuva välillä $[a, \infty[$ ja $\lim\limits_{b \to \infty} \int\limits_a^b f(x)dx$ on olemassa, niin (epäolennainen) integraali

$$\int\limits_a^\infty f(x)dx = \lim_{b \to \infty} \int\limits_a^b f(x)dx$$

suppenee, muuten hajaantuu.

- Jos f on jatkuva välillä $]-\infty, b]$ ja $\lim\limits_{a \to -\infty} \int\limits_a^b f(x)dx$ on olemassa, niin (epäolennainen) integraali

$$\int\limits_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a \to -\infty} \int\limits_a^b f(x)dx$$

suppenee, muuten hajaantuu.

Osa I: Epäolennainen integraali yli äärettömän välin
● Johdatteleva esimerkki
● Määritelmä
● Esimerkki
Osa II: Epäolennainen integraali yli puoliavoimen tai avoimen välin

Määritelmä

- Jos f on jatkuva $\mathbb{R}$:ssa ja $\int\limits_{-\infty}^{0} f(x)dx$ sekä $\int\limits_{0}^{\infty} f(x)dx$ suppenevat, niin

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} f(x)dx + \lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b} f(x)dx$$

suppenee.

VAROITUS. Olkoon esimerkiksi $f(x) = x$. Epäolennaista integraalia EI voi laske näin:

$$\int_{-\infty}^{\infty} xdx = \lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{a} xdx.$$

MIKSI?

Osa I: Epäolennainen integraali yli äärettömän välin
● Johdatteleva esimerkki
● Määritelmä
● Esimerkki
Osa II: Epäolennainen integraali yli puoliavoimen tai avoimen välin

Esimerkki

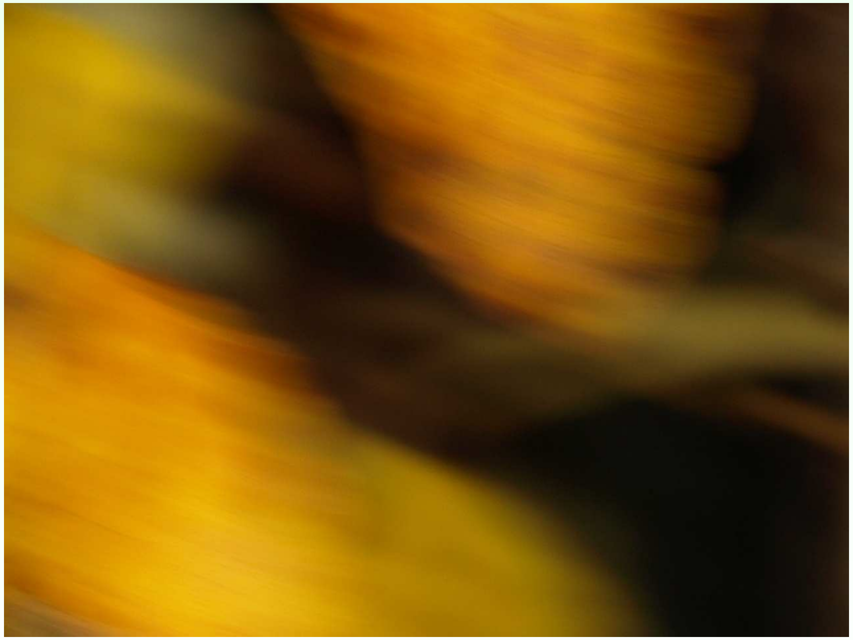
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{3x}\,dx$$

Osa I: Epäolennainen integraali yli äärettömän välin

Osa II: Epäolennainen integraali yli puoliavoimen tai avoimen välin

- Johdatteleva esimerkki
- Määritelmä: puoliavoin väli
- Määritelmä: avoin väli

Osa II: Epäolennainen integraali yli puoliavoimen tai avoimen välin



Osa I: Epäolennainen integraali yli äärettömän välin

Osa II: Epäolennainen integraali yli puoliavoimen tai avoimen välin

- Johdatteleva esimerkki
- Määritelmä: puoliavoin väli
- Määritelmä: avoin väli

Johdatteleva esimerkki

Laske integraali $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx$.

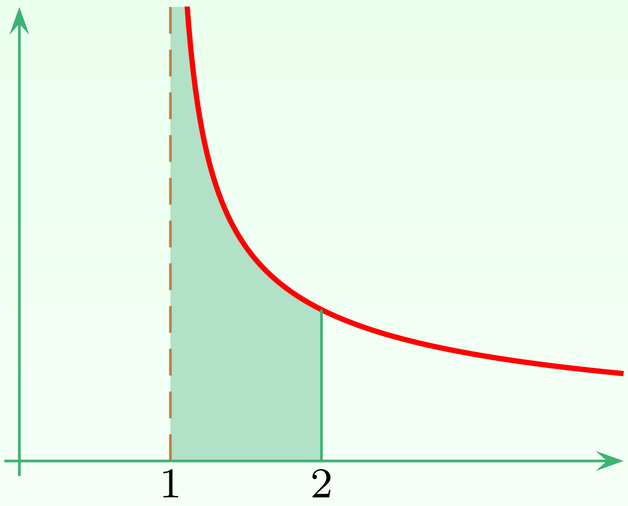
Osa I: Epäolennainen integraali yli äärettömän välin

Osa II: Epäolennainen integraali yli puoliavoimen tai avoimen välin

- Johdatteleva esimerkki
- Määritelmä: puoliavoin väli
- Määritelmä: avoin väli

Johdatteleva esimerkki

Laske integraali $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx$.



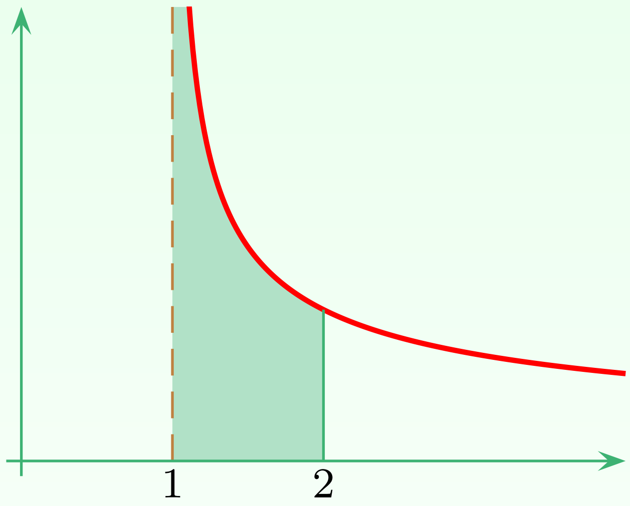
Johdatteleva esimerkki

Osa I: Epäolennainen integraali yli äärettömän välin

Osa II: Epäolennainen integraali yli puoliavoimen tai avoimen välin

- Johdatteleva esimerkki
- Määritelmä: puoliavoin väli
- Määritelmä: avoin väli

Laske integraali $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx$.

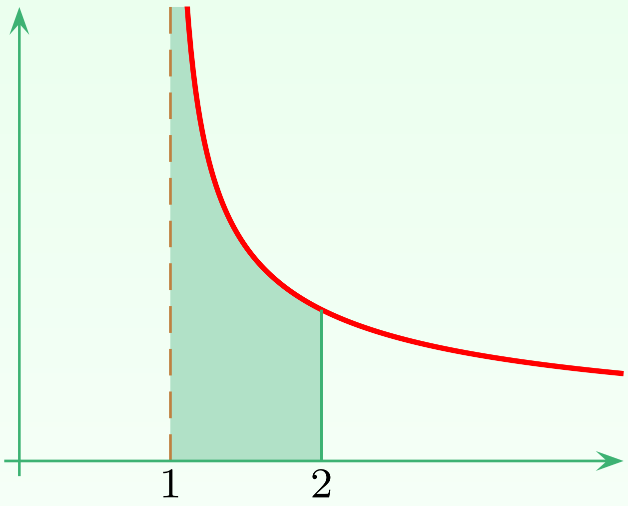


$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx =$$

Osa I: Epäolennainen integraali yli äärettömän välin
Osa II: Epäolennainen integraali yli puoliavoimen tai avoimen välin
● Johdatteleva esimerkki
● Määritelmä: puoliavoin väli
● Määritelmä: avoin väli

Johdatteleva esimerkki

Laske integraali $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx$.



$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx = \lim_{c \to 1+} \int_c^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx$$

Osa I: Epäolennainen integraali yli äärettömän välin

Osa II: Epäolennainen integraali yli puoliavoimen tai avoimen välin

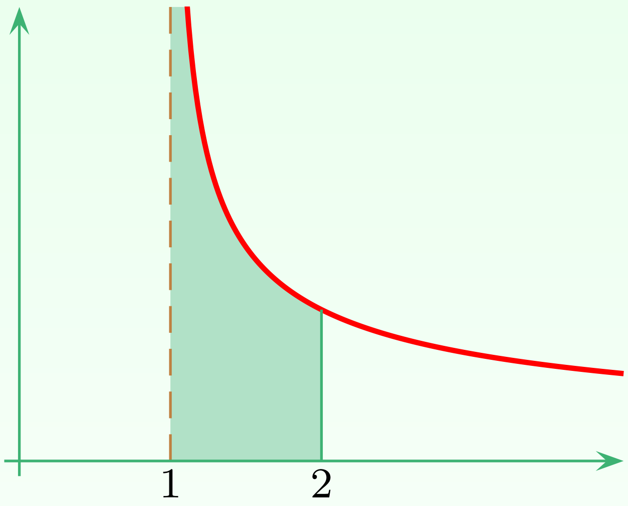
● Johdatteleva esimerkki

● Määritelmä: puoliavoin väli

● Määritelmä: avoin väli

Johdatteleva esimerkki

Laske integraali $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx$.



$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx = \lim_{c\to 1+} \int_c^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx = \lim_{c\to 1+} \int_c^2 (x-1)^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

Osa I: Epäolennainen integraali yli äärettömän välin

Osa II: Epäolennainen integraali yli puoliavoimen tai avoimen välin

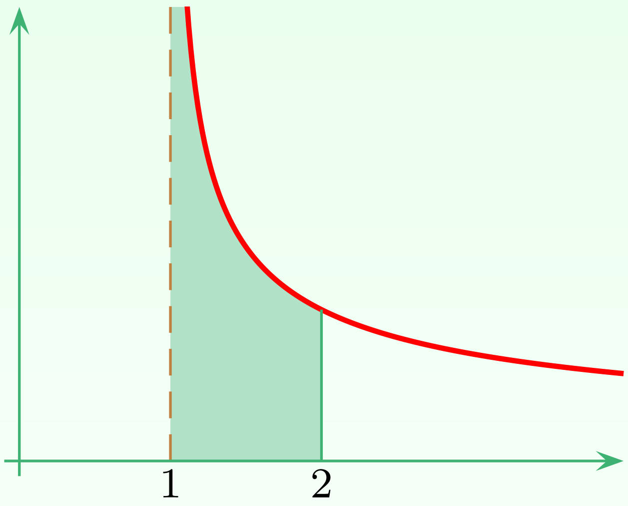
● Johdatteleva esimerkki

● Määritelmä: puoliavoin väli

● Määritelmä: avoin väli

Johdatteleva esimerkki

Laske integraali $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx$.

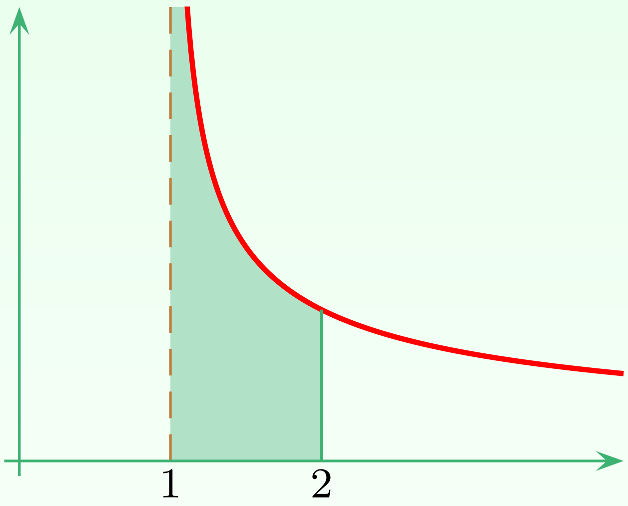


$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx = \lim_{c\to 1+} \int_c^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx$$
$$= \lim_{c\to 1+} \int_c^2 (x-1)^{-\frac{1}{2}}dx$$
$$= \lim_{c\to 1+} \Big/_{c}^{2}\, 2(x-1)^{\frac{1}{2}}$$

Osa I: Epäolennainen integraali yli äärettömän välin
Osa II: Epäolennainen integraali yli puoliavoimen tai avoimen välin
● Johdatteleva esimerkki
● Määritelmä: puoliavoin väli
● Määritelmä: avoin väli

Johdatteleva esimerkki

Laske integraali $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx.$



$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx &= \lim_{c\to 1+} \int_c^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx \\ &= \lim_{c\to 1+} \int_c^2 (x-1)^{-\frac{1}{2}}\,dx \\ &= \lim_{c\to 1+} \Big/_c^2\, 2(x-1)^{\frac{1}{2}} \\ &= \lim_{c\to 1+} \left(2 - 2\sqrt{c-1}\right)\end{aligned}$$

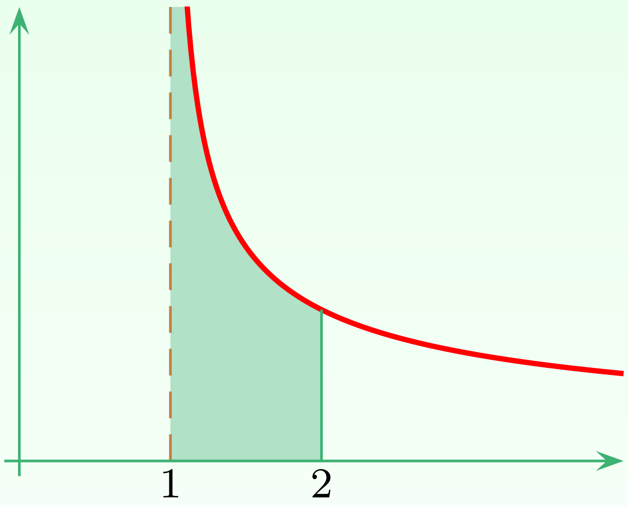
Johdatteleva esimerkki

Osa I: Epäolennainen integraali yli äärettömän välin

Osa II: Epäolennainen integraali yli puoliavoimen tai avoimen välin

- Johdatteleva esimerkki
- Määritelmä: puoliavoin väli
- Määritelmä: avoin väli

Laske integraali $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx$.



$$\begin{aligned}
\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx &= \lim_{c\to 1+} \int_c^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx \\
&= \lim_{c\to 1+} \int_c^2 (x-1)^{-\frac{1}{2}}dx \\
&= \lim_{c\to 1+} \Big/_{c}^{2}\, 2(x-1)^{\frac{1}{2}} \\
&= \lim_{c\to 1+} \left(2 - 2\sqrt{c-1}\right) \\
&= 2
\end{aligned}$$

Osa I: Epäolennainen integraali yli äärettömän välin

Osa II: Epäolennainen integraali yli puoliavoimen tai avoimen välin
- Johdatteleva esimerkki
- Määritelmä: puoliavoin väli
- Määritelmä: avoin väli

Määritelmä: puoliavoin väli

- Jos f on jatkuva välillä $]a, b]$ ja $\lim_{c \to a+} \int_c^b f(x)dx$ on olemassa, niin (epäolennainen) integraali

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \to a+} \int_c^b f(x)dx$$

suppenee, muuten hajaantuu.

Osa I: Epäolennainen integraali yli äärettömän välin

Osa II: Epäolennainen integraali yli puoliavoimen tai avoimen välin

- Johdatteleva esimerkki
- Määritelmä: puoliavoin väli
- Määritelmä: avoin väli

Määritelmä: puoliavoin väli

- Jos f on jatkuva välillä $]a,b]$ ja $\lim\limits_{c\to a+}\int_c^b f(x)dx$ on olemassa, niin (epäolennainen) integraali

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c\to a+}\int_c^b f(x)dx$$

suppenee, muuten hajaantuu.

- Jos f on jatkuva välillä $[a,b[$ ja $\lim\limits_{c\to b-}\int_a^c f(x)dx$ on olemassa, niin (epäolennainen) integraali

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c\to b-}\int_a^c f(x)dx$$

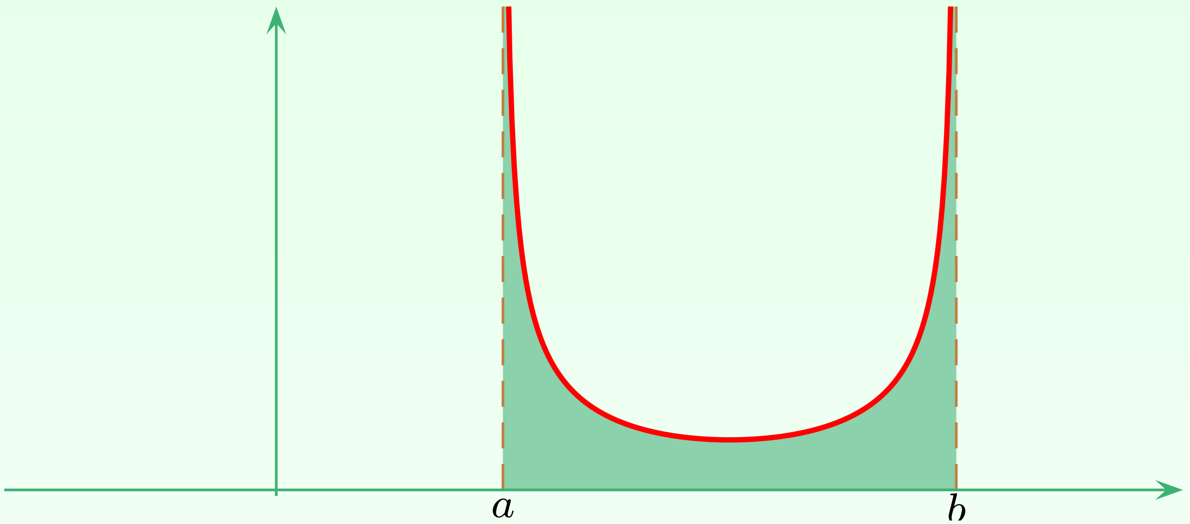
suppenee, muuten hajaantuu.

Määritelmä: avoin väli

Osa I: Epäolennainen integraali yli äärettömän välin

Osa II: Epäolennainen integraali yli puoliavoimen tai avoimen välin

- Johdatteleva esimerkki
- Määritelmä: puoliavoin väli
- Määritelmä: avoin väli

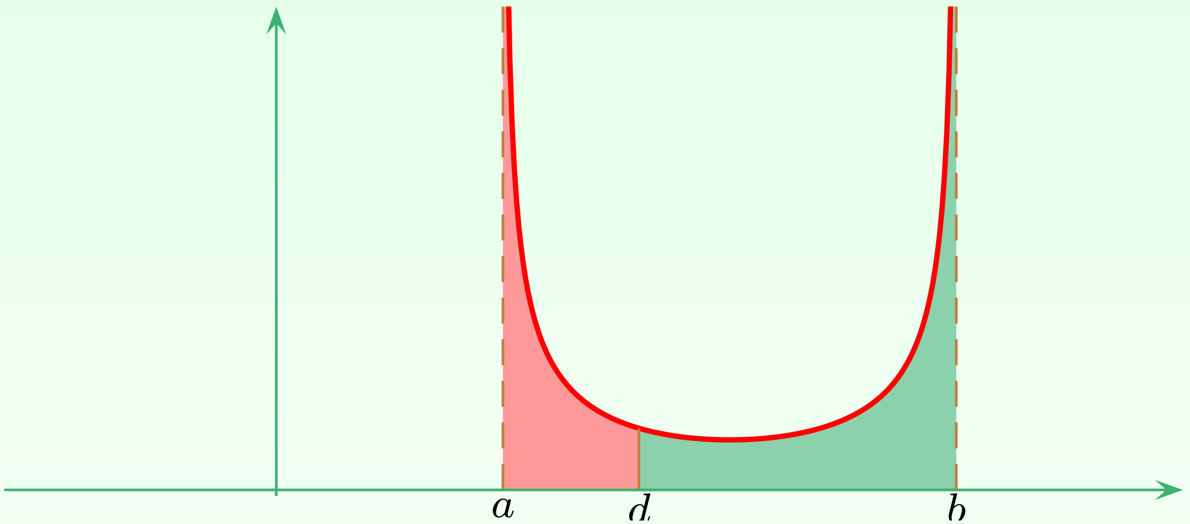


Määritelmä: avoin väli

Osa I: Epäolennainen integraali yli äärettömän välin

Osa II: Epäolennainen integraali yli puoliavoimen tai avoimen välin

- Johdatteleva esimerkki
- Määritelmä: puoliavoin väli
- Määritelmä: avoin väli

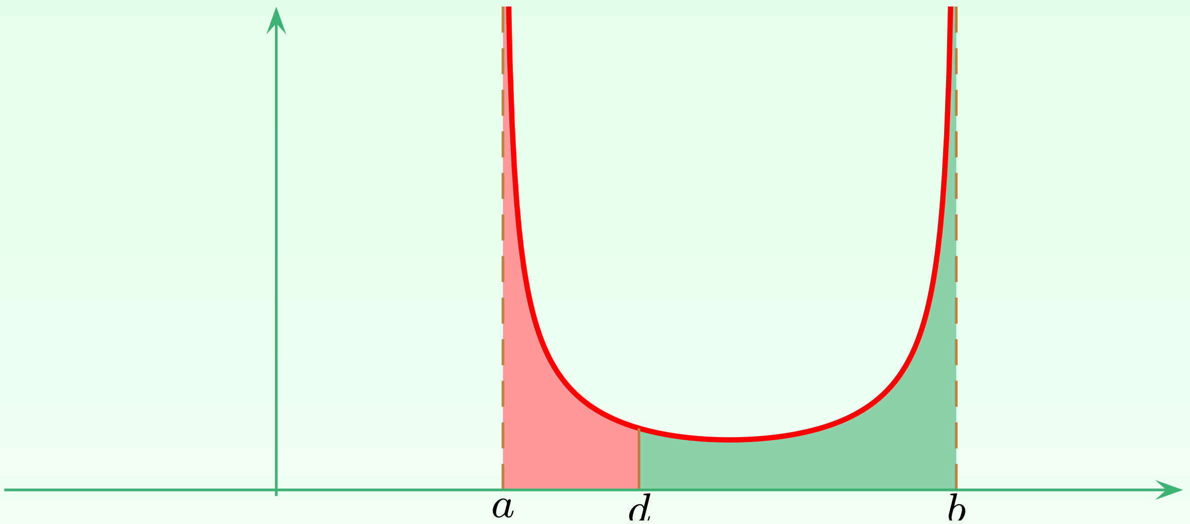


Osa I: Epäolennainen integraali yli äärettömän välin

Osa II: Epäolennainen integraali yli puoliavoimen tai avoimen välin

- Johdatteleva esimerkki
- Määritelmä: puoliavoin väli
- Määritelmä: avoin väli

Määritelmä: avoin väli



- Jos f on jatkuva välillä $]a, b[$ ja $\lim\limits_{c \to a+} \int\limits_c^d f(x)dx$ ja $\lim\limits_{c \to b-} \int\limits_d^c f(x)dx$ ovat olemassa, niin (epäolennainen) integraali

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{c \to a+} \int\limits_c^d f(x)dx + \lim_{c \to b-} \int\limits_d^c f(x)dx$$

suppenee, muuten hajaantuu.