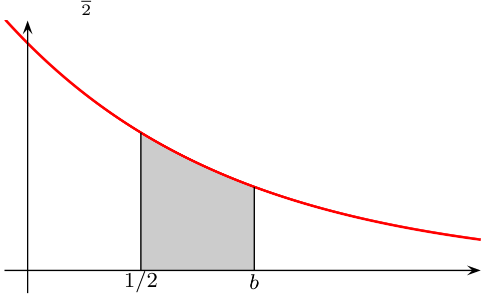
Epäolennaisen integraalit

Hannu Lehto
Lahden Lyseon lukio

Johdatteleva esimerkki

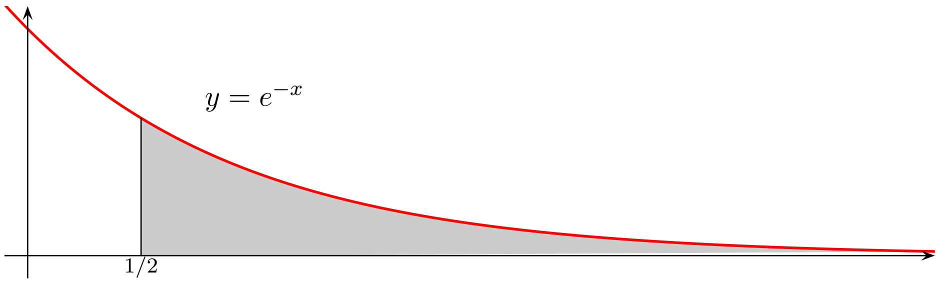
Laske $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{b} e^{-x}dx$, kun $b > \dfrac{1}{2}$.



$$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{b} e^{-x}dx = -1\int\limits_{\frac{1}{2}}^{b} -1\cdot e^{-x}dx = -1 \Big/_{\frac{1}{2}}^{b} e^{-x} = -e^{-b} + e^{\frac{1}{2}}$$

Mitä tapahtuu, kun $b \to \infty$?

Johdatteleva esimerkki



$$\begin{aligned}\lim_{b\to\infty}\int_{\frac{1}{2}}^{b} e^{-x}dx &= \lim_{b\to\infty}\left(-e^{-b} + e^{\frac{1}{2}}\right)\\ &= \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{e^{b}} + e^{\frac{1}{2}}\right)\\ &= e^{\frac{1}{2}}\\ &= \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} e^{-x}dx\end{aligned}$$

Määritelmä

- Jos f on jatkuva välillä $[a,\infty[$ ja $\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$ on olemassa, niin (epäolennainen) integraali

$$\int\limits_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$$

suppenee, muuten hajaantuu.

- Jos f on jatkuva välillä $]-\infty,b]$ ja $\lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$ on olemassa, niin (epäolennainen) integraali

$$\int\limits_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$$

suppenee, muuten hajaantuu.

5 / 11

Määritelmä

- Jos f on jatkuva $\mathbb{R}$:ssa ja $\int\limits_{-\infty}^0 f(x)dx$ sekä $\int\limits_0^\infty f(x)dx$ suppenevat, niin

$$\int\limits_{-\infty}^\infty f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^0 f(x)dx + \lim_{b\to\infty}\int\limits_0^b f(x)dx$$

suppenee.

VAROITUS. Olkoon esimerkiksi $f(x)=x$. Epäolennaista integraalia EI voi laske näin:

$$\int\limits_{-\infty}^\infty xdx = \lim_{a\to\infty}\int\limits_{-a}^a xdx.$$

MIKSI?

6 / 11

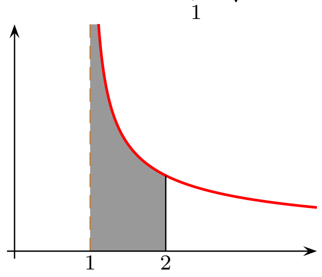
Esimerkki

$$\int\limits_{-\infty}^\infty e^{3x}dx$$

7 / 11

Johdatteleva esimerkki

Laske integraali $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx$.



$$\begin{aligned}\int_1^2 \tfrac{1}{\sqrt{x-1}}dx &= \lim_{c\to 1+} \int_c^2 \tfrac{1}{\sqrt{x-1}}dx \\ &= \lim_{c\to 1+} \int_c^2 (x-1)^{-\frac{1}{2}}dx \\ &= \lim_{c\to 1+} \Big/_c^2\, 2(x-1)^{\frac{1}{2}} \\ &= \lim_{c\to 1+} \left(2-2\sqrt{c-1}\right) \\ &= 2\end{aligned}$$

Määritelmä: puoliavoin väli

- Jos f on jatkuva välillä $]a,b]$ ja $\lim\limits_{c\to a+} \int_c^b f(x)dx$ on olemassa, niin (epäolennainen) integraali

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c\to a+} \int_c^b f(x)dx$$

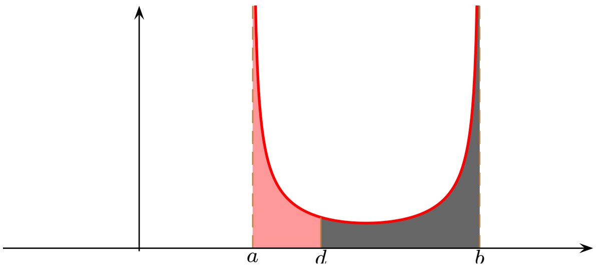
suppenee, muuten hajaantuu.

- Jos f on jatkuva välillä $[a,b[$ ja $\lim\limits_{c\to b-} \int_a^c f(x)dx$ on olemassa, niin (epäolennainen) integraali

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c\to b-} \int_a^c f(x)dx$$

suppenee, muuten hajaantuu.

Määritelmä: avoin väli



- Jos f on jatkuva välillä $]a, b[$ ja $\lim\limits_{c \to a+} \int\limits_c^d f(x)dx$ ja $\lim\limits_{c \to b-} \int\limits_d^c f(x)dx$ ovat olemassa, niin (epäolennainen) integraali

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \to a+} \int_c^d f(x)dx + \lim_{c \to b-} \int_d^c f(x)dx$$

suppenee, muuten hajaantuu.