

# Pitkän matematiikan tentti

Hannu Lehto  
Lahden lyseon lukio

2011

1. Vähittäiskauppa saa tukkuliikkeestä 24 %:n alennuksen ja alennetusta hinnasta vielä 2 %:n käteisalennuksen. Mikä on laskun alkuperäinen suuruus, kun käteisalennus on 38 €?
2. Kaupungin ja sitä ympäröivän maalaiskunnan asukkaista asui 46 % kaupungissa. Tietyn ajanjakson kuluessa kaupungin väkiluku lisääntyi 15,0 % ja maalaiskunnan 5,0 %. Kuinka monta prosenttia kasvoi väestön määrä kyseisellä alueella ja mikä osa asukkaista tällöin asui kaupungissa?
3. Erään järven kalakanta vähenee vuosittain 5 %. Kuinka monen vuoden kuluttua kalakanta ensimmäisen kerran alittaa laskennan alkuhetken kalakannan 50 %:lla?
4. Michellä on pankin A osakkeita nimellisarvoltaan 8000 € ja pankin B osakkeita nimellisarvoltaan 5000 €. Hänen vaimollaan on vastaavasti pankin A osakkeita 6000 € ja pankin B osakkeita 7000 € nimellisarvoja vastaava määrä. Eräänä vuonna mies sai osakkeistaan osinkoa 1660 € ja vaimo vastaavasti 1700 €. Laske pankkien osinkoprosentit.
5. Maanjäristyksessä vapautuu lyhyessä ajassa suuria energioita. Maanjäristyksen voimakkuutta ilmaistaan ns. *Richterin asteikolla*, jonka lukema  $M$  määräytyy energiasta  $E$  kaavalla  $M = 3,2 + \log_{32} E$ . Energian yksikkönä on megawattitunti MWh.
  - a) Maanjäristyksessä vapautui energiaa  $7,2 \cdot 10^4$  MWh. Mikä oli järjestyksen voimakkuus Richterin asteikolla.
  - b) Ratkaise yhtälöstä  $M = 3,2 + \log_{32} E$  energia  $E$ , siis muodosta kaava, jolla vapautuvan energian määrä lasketaan richterasteikon lukemasta  $M$ .
  - c) Richterin asteikon lukema kasvaa 1,5 yksikköä. Miten muuttuu järjestyksessä vapautuva energia?
6. Matkaa kuljetaan tasaisella nopeudella. Kun matkasta on jäljellä 40 %, nopeutta lisätään 20 %. Kuinka monta prosenttia koko matkaan tällöin kuluva aika lyhenee?
7. Puoliintumispaksuudella tarkoitetaan sellaista väliainekerroksen paksuutta, joka vaimentaa säteilyn voimakkuuden (intensiteetin) puoleen. Gammasäteily on lyhytaaltoista sähkömagneettista säteilyä, jolle puoliintumispaksuus riippuu säteilyn energiasta. Erään gammasäteilyn puoliintumispaksuus alumiinissa on 7 mm. Kuinka suuri osa säteilyn alkuperäisestä voimakkuudesta läpäisee 3,0 cm paksun alumiinikerroksen?

8. Auton pysähtymismatka riippuu siitä, miten nopeasti jarrutus ehditään aloittaa sekä itse jarrutusmatkasta. Voidaan siis kirjoittaa

$$\text{pysähtymismatka} = \text{reaktiomatka} + \text{jarrutusmatka}.$$

Reaktiomatka on suoraan verrannollinen nopeuteen ja jarrutusmatka suoraan verrannollinen nopeuden neliöön. Nopeudella 90 km/h reaktiomatka on 18,0 m ja jarrutusmatka 48,6 m. Laske pysähtymismatka nopeuden ollessa 120 km/h.

9. Ratkaise yhtälö  $a^2x - 1 = a(x - 1)$  vakion  $a$  kaikilla arvoilla.
10. Ratkaise yhtälöt a)  $x^3 + 3x^2 = 4x$ , b)  $(x^2 + x)^2 = 2x^2 + 2x$ .
11. Ratkaise epäyhtälö  $x^4 - 2x^3 \leq x^2 - 2x$ .
12. Ratkaise yhtälö  $\frac{3x}{x+1} - \frac{x+1}{x-1} = 2$ .
13. Ratkaise epäyhtälö  $x + 1 \leq \frac{2}{x}$ .
14. Ratkaise yhtälö  $3x + 2\sqrt{x} - 1 = 0$ .
15. Ratkaise epäyhtälö  $\sqrt{x+2} - x < 0$ .
16. Ratkaise a)  $1 + |x - 2| = 2x$  b)  $|2x - 3| \leq x$ .
17. Ratkaise yhtälö  $4^x - 13 \cdot 2^x + 36 = 0$ .
18. Ratkaise yhtälö  $2 \log_2(x + 1) + \log_2(3 - 2x) = 2$ .
19. Millä vakion  $k$  arvoilla funktio  $f(x) = (k^2 - 3)^x$  on aidosti vähenevä?
20. Laske lausekkeen  $(2^x)^y - \left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^y$  arvo, kun  $x$  ja  $y$  ovat yhtälön  $x^2 + 2x - 1 = 0$  ratkaisut.
21. Millä vakion  $t$  arvoilla epäyhtälö  $x^2 + tx > t - t^2$  on identtinen eli toteutuu kaikilla  $x$ :n arvoilla?
22. Tasakylkisen kolmion kanta on 10 ja kylki 13. Kolmioon on piirretty suorakulmio, jonka kanta on kolmion kannalla ja kaksi kärkeä kolmion kyljillä. Laske suorakulmion ala, kun sen kanta on puolet korkeudesta.
23. Suorakulmaisen kolmion sisään piirretyn ympyrän sivuamispiste jakaa hypotenuusan 1 cm:n ja 3 cm:n pituisiin osiin. Laske kolmion ala.
24. Kolmionmittaustornit A, B ja C sijaitsevat siten, että tornien A ja B välinen etäisyys on 40 km ja tornien A ja C välinen etäisyys 60 km. Tornien A, B ja C muodostamassa kolmiossa kulma A on  $45^\circ$ . Laske
- a) tornien B ja C välinen etäisyys,  
b) kolmion muut kulmat.
25. Suorakulmaisen särmiön pohjasärmät ovat 3 ja 4 sekä korkeus 5. Laske sadasosan tarkkuudella

- a) avaruuslävistäjän ja pohjan välinen kulma,  
 b) avaruuslävistäjän ja lyhemmän pohjasärmän välinen kulma.
26. Hevosen juomakaukalo on kyljellään olevan suoran ympyrälieriön puolikas. Kaukalon pituus on 1,0 metriä syvyys 0,20 metriä. Kaukalo täytetään piripintaan vedellä.
- a) Montako litraa kaukalossa on vettä?  
 b) Ankarasta metsätyöstä palannut ruuna Reipas juo kaukalosta vettä niin paljon, että veden pinta laskee 3 cm. Kuinka monta litraa Reipas joi?
27. Kartio leikataan pohjan suuntaisella tasolla niin, että tilavuus puolittuu. Laske osien korkeuksien suhde.
28. Suoran ympyräkartion sisään asetetaan suora ympyrälieriö, jonka pohja on kartion pohjalla. Laske tilavuudeltaan suurimman lieriön korkeus, kun kartion korkeus on 12 cm ja pohjan säde 10 cm.
29. Laske  $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ , kun  $x$  on tylppä ja  $\sin x = \frac{3}{5}$ .
30. Ratkaise a)  $4\sin^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$ , b)  $\cos(\pi - x) - \cos 2x = 0$ .
31. Millä vakion  $a$  arvoilla yhtälöllä  $a \sin 3x = 2a - 1$  on juuria?
32. Origosta  $O$  alkavat vektorit  $\vec{OA} = 3\vec{i} - 6\vec{j} + 3\vec{k}$  ja  $\vec{OB} = -5\vec{i} + 8\vec{j} - 3\vec{k}$  ovat kolmion kahtena sivuna. Piste  $P$  jakaa sivun  $OA$  suhteessa 2:1 ja piste  $Q$  sivun  $AB$  suhteessa 3:1. Määritä vektori  $\vec{PQ}$ .
33. Kolmion kahtena sivuna ovat samasta pisteestä alkavat vektorit  $\vec{i} + \vec{j} + t\vec{k}$  ja  $\vec{i} + t\vec{j} + \vec{k}$ . Millä vakion  $t$  arvoilla kolmio on tasasivuinen ja mikä on silloin sen ala?
34. Laske suorien  $2x + 3y - 1 = 0$  ja  $3x - 4y - 10 = 0$  leikkauspisteen etäisyys suorasta  $5x + 12y - 11 = 0$ .
35. Määritä sen suoran yhtälö, joka on etäisyydellä 1 suorasta  $5x + 12y - 7 = 0$ .
36. Miten sijaitsevat ne  $xy$ -tason pisteet, joiden etäisyys avaruuden pisteestä  $(2, -1, 4)$  on 5?
37. Millä vakion  $a$  arvoilla yhtälö  $x^2 + y^2 + 4ax - 2ay + 6a^2 + 10a = 0$  esittää ympyrää? Mikä on tämän ympyrän suurin mahdollinen pinta-ala?
38. a) Taso kulkee pisteen  $(2, 1, 4)$  kautta ja sen normaalivektori on  $\vec{n} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$ . Määritä tason yhtälön normaalimuoto. Onko piste  $(4, 3, 6)$  tällä tasolla?  
 b) Osoita, että suora  $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + t \\ z = 3 + 3t \end{cases}$  ja taso  $2x - y - z + 5 = 0$  ovat yhdensuuntaiset.

39. Suora  $s_1$  kulkee pisteiden  $A = (2, 3, -1)$  ja  $B = (3, 8, -2)$  kautta. Suora  $s_2$  kulkee pisteiden  $C = (-1, 0, 6)$  ja  $D = (-2, 1, 9)$  kautta. Määritä suorien leikkauspiste.
40. Vektorit  $\vec{u} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$  ja  $\vec{v} = 2\vec{i} + 8\vec{j} - \vec{k}$  ovat erään tason suuntavektoreita. Määritä tasoa vastaan kohtisuorassa oleva vektori, jonka pituus on  $\sqrt{21}$ .
41. Tutki, onko olemassa raja-arvoa  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 2|x|}{x + 3|x|}$ .
42. Määritä vakio  $a$  niin, että funktiolla  $f(x) = \frac{2x^2 + ax + 3}{x^2 - 2x - 3}$  on äärellinen raja-arvo, kun  $x \rightarrow 3$ . Mikä on kyseinen raja-arvo?
43. Määritä raja-arvo  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x + 3} - 2}$ .
44. Millä vakion  $a$  arvolla funktio
- $$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2, & \text{kun } x \leq a \\ 2x + 1, & \text{kun } x > a \end{cases}$$
- on jatkuva kohdassa  $x = a$ ?
45. Määritä erotusosamäärän avulla  $f'(1)$ , kun  $f(x) = (x - 1)\sqrt[3]{5x + 3}$ .
46. Osoita, että funktio  $f(x) = \frac{1}{1 + x|x|}$  on derivoituva kohdassa  $x = 0$ .
47. Funktiolle  $f(x) = \frac{ax^2 + 2x}{x - 1}$ ,  $x \neq 1$ , on voimassa  $f'(-2) = 1$ . Laske  $f(2)$ .
48. Laske sen kolmion ala, jonka käyrälle  $y = 4 + x - x^2$  kohtaan  $x = 2$  piirretty normaali muodostaa koordinaattiakselien kanssa.
49. Määritä paraabelin  $y = -4x^2$  niiden tangenttien yhtälöt, jotka kulkevat pisteen  $(\frac{1}{2}, 3)$  kautta.
50. Määritä funktion  $f(x) = \frac{x^2}{x - 2}$  ääriarvot.
51. Määritä seuraavien funktioiden derivaatan nollakohdat:  
**a)**  $f(x) = x(2x - 1)^5$ ,    **b)**  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - \frac{3}{5}x$ .
52. Osoita, että yhtälöllä  $(x + 1)^3 = x$  on täsmälleen yksi reaalijuuri.
53. Osoita, että  $\ln x \geq 1 - \frac{1}{x}$ , kun  $x > 0$ .
54. Määritä funktion  $f(x) = 2x + \sin^2 x$  suurin ja pienin arvo välillä  $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ .
55. Määritä funktion  $f(x) = 1 + \sin x - \cos^2 x$  suurin ja pienin arvo. Millä  $x$ :n arvoilla ne saavutetaan?

56. Ranta-alueella on 30 lomamökkiä, joiden viikkovuokra on 800 €. Jos mökkejä rakennetaan lisää, viihtyvyys huononee ja vuokraa joudutaan laskemaan. Mikä mökkien lukumäärä johtaa mahdollisimman suuriin tuloihin, jos jokainen uusi mökki vähentää viikkovuokraa 20 euroa?
57. Puolisuunnikkaan kolmen sivun pituus on  $a$ . Mikä on puolisuunnikkaan suurin mahdollinen ala?
58. Tulitikkulaatikon kuori on tehty suorakulmaisen särmiön muotoiseksi, ja se on avoin kummastakin päästä. Laatikon tilavuus on  $24 \text{ cm}^3$ , ja sen pituus on puolitoistakertainen leveyteen verrattuna. Mikä on kuoren ala, kun se on mahdollisimman pieni?
59. Määritä mitat tilavuudeltaan pienimmälle suoralle ympyräkartiolle, johon mahtuu kuutio, jonka särmän pituus on 10 cm.
60. Olkoon  $f(x) = e^{2x} + 1$ .
- Osoita, että funktiolla  $f(x)$  on käänteisfunktio  $g(x)$ .
  - Mikä on käänteisfunktion määrittelyjoukko?
  - Laske käänteisfunktion derivaatta kohdassa  $x=2$ .
  - Mikä on käänteisfunktion lauseke?
- 61.
- $$a) \int \cos(3x + 1) dx \quad b) \int \frac{x}{x^2 + 1} dx \quad c) \int_{-1}^{4/9} \frac{1}{\sqrt{x + 5}} dx.$$
62. Määritä funktion  $f(x) = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$  integraalifunktioista se, jonka kuvaaja kulkee pisteen  $(1, -\frac{1}{2})$  kautta.
63. Laske  $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos x (\sin x + 1) dx$ .
64. Laske käyrien  $y = \sqrt{2x + 1}$  ja  $y = |x - 1|$  rajoittaman alueen ala.
65. a) Laske sen alueen ala, jonka läyrät  $y = 2e^x$  ja  $y = e^{2x}$  rajoittavat  $y$ -akselin kanssa.  
b) Laske sen pyörähdyskappaleen tilavuus, joka syntyy, kun ko. alue pyörähtää  $x$ -akselin ympäri.
66. Käyrät  $y = 1 - x^2$  ja  $y = 1 - \frac{1}{4}x^2$  rajoittavat positiivisen  $x$ -akselin kanssa alueen koordinaatiston ensimmäiseen neljännekseen. Laske alueen ala. Laske myös sen kappaleen tilavuus, joka syntyy, kun alue pyörähtää  $x$ -akselin ympäri.
67. Lasten uima-allas on ympyrän muotoinen halkaisijan ollessa 12 m ja syvyyden 1,0 m. Uima-allas voidaan ajatella syntyvän siten, että paraabeli pyörähtää  $y$ - akselin ympäri. Kuinka monta litraa vettä tähän altaaseen sopii?

68. Anni ja Bertta heittävät tikkatauluun kumpikin yhden tikan. Heidän todennäköisyytensä osua tauluun ovat  $P(A) = 0,6$  ja  $P(B) = 0,7$ . Millä todennäköisyydellä **a)** molemmat osuvat, **b)** kumpikaan ei osu, **c)** ainakin toinen osuu?
69. Kahta kolikkoa heitetään kahdesti. Laske todennäköisyys sille, että klaavojen määrä on kummallakin heitolla sama.
70. Eräässä lomakeskuksessa on poutapäivien todennäköisyys lomakautena 80 %. Turisti viettää yhden lomaviikon tässä keskuksessa. Laske todennäköisyys, että hän kokee enintään yhden sadepäivän.
71. Leirikoulun hyväksi järjestetyissä arpajaisissa ilmoitettiin, että joka 20:s arpa voittaa. Kuinka monta arpaa on ostettava, jotta todennäköisyys ainakin yhteen voittoon olisi yli 50 %?
72. Viisi pahvilappua on numeroitu 1, 2, 3, 4, 5. lapuista valitaan umpimähkään kaksi. satunnaismuuttuja  $x$  ilmoittaa lapuissa olevien lukujen summan. Määritä satunnaismuuttujan jakauma ja laske sen odotusarvo ja keskihajonta.
73. a) Määritä vakio  $a$  niin, että funktio

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x < 1 \\ \frac{a}{x}, & \text{kun } 1 \leq x \leq 5 \\ 0, & \text{kun } x > 5 \end{cases}$$

on erään satunnaismuuttujan  $x$  tiheysfunktio.

- b) Määritä satunnaismuuttujan  $x$  kertymäfunktio.
- c) Laske todennäköisyys  $P(2 < x < 3)$ .
74. Eräällä tieosuudella nopeusrajoitus on 60 km/h. Tarkkailupisteessä todettiin autojen nopeuksien jakautuvan normaalisti keskiarvona 56 km/h ja keskihajontana 6,0 km/h.
- a) Kuinka monta prosenttia autoista ajoi ylinopeutta?
- b) Mikä on se nopeus, jonka 90 % autoista ylitti?
75. Osoita, että lukujono  $a_n = \frac{3n+1}{2n-1}$  on aidosti vähenevä.
76. a) Aritmeettisessä jonossa  $(a_n)$  on  $a_1 = 2$  ja  $a_8 = 114$ . Määritä jonon 200. jäsen.
- b) Geometrisessä lukujonossa  $(a_n)$  on  $a_4 = 2$  ja  $a_6 = 8$ . Laske  $\sum_{n=1}^{10} a_n$ .
77. Masa tallettaa vuoden alussa rahasumman tilille, jolle jokaisen vuoden lopussa maksetaan korkoa 3,5 %. Hän jatkaa samansuuruisien talletusten tekemistä seuraavina vuosina aina vuoden alussa. Kuinka monta vuotta kuluu siihen, että tilin saldo on 15-kertainen vuositalletukseen nähden? Lähdeveroa ei huomioida.
78. Olkoon jono  $a_1, a_2, a_3 \dots$  aritmeettinen. Osoita, että jono  $2^{a_1}, 2^{a_2}, 2^{a_3}, \dots$  on geometrinen.