

Todistustehtäviä

Hannu Lehto
Lahden Lyseon lukio

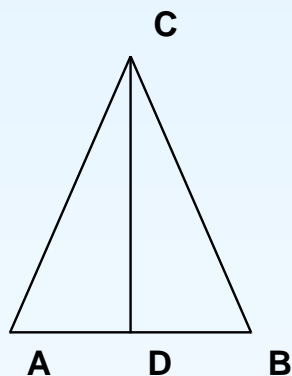


Todistustehtävän rakenne

Lause. Tasakylkisen kolmion kannalle piirretty korkeusjana puolittaa kannan.

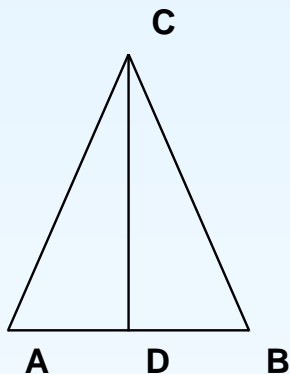
Todistustehtävän rakenne

Lause. Tasakylkisen kolmion kannalle piirretty korkeusjana puolittaa kannan.



Todistustehtävän rakenne

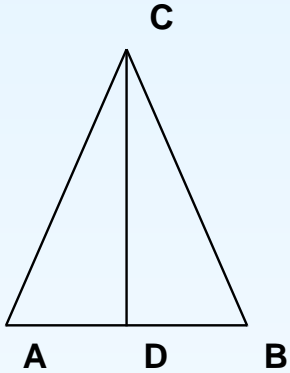
Lause. Tasakylkisen kolmion kannalle piirretty korkeusjana puolittaa kannan.



Oletus.

Todistustehtävän rakenne

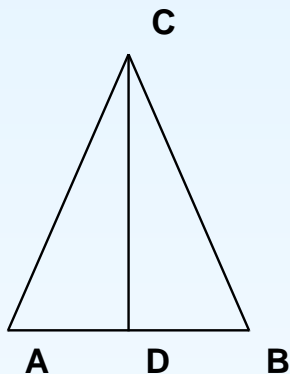
Lause. Tasakylkisen kolmion kannalle piirretty korkeusjana puolittaa kannan.



Oletus. $\triangle ABC$ on tasakylkinen ja CD on korkeusjana.

Todistustehtävän rakenne

Lause. Tasakylkisen kolmion kannalle piirretty korkeusjana puolittaa kannan.

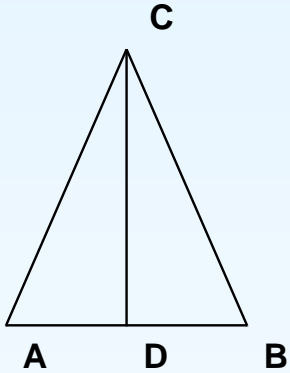


Oletus. $\triangle ABC$ on tasakylkinen
ja CD on korkeusjana.

Väitös.

Todistustehtävän rakenne

Lause. Tasakylkisen kolmion kannalle piirretty korkeusjana puolittaa kannan.

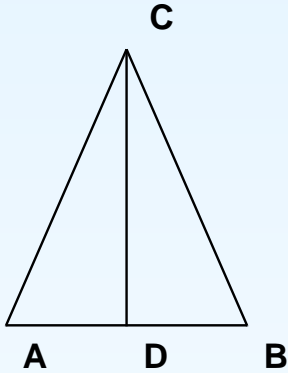


Oletus. $\triangle ABC$ on tasakylkinen ja CD on korkeusjana.

Väitös. $AD=BD$.

Todistustehtävän rakenne

Lause. Tasakylkisen kolmion kannalle piirretty korkeusjana puolittaa kannan.



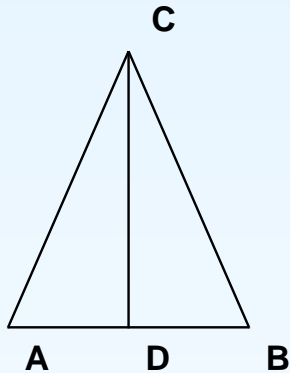
Oletus. $\triangle ABC$ on tasakylkinen
ja CD on korkeusjana.

Väitös. $AD=BD$.

Todistus. Tarkastellaan kolmioita ADC ja BDC

Todistustehtävän rakenne

Lause. Tasakylkisen kolmion kannalle piirretty korkeusjana puolittaa kannan.



Oletus. $\triangle ABC$ on tasakylkinen ja CD on korkeusjana.

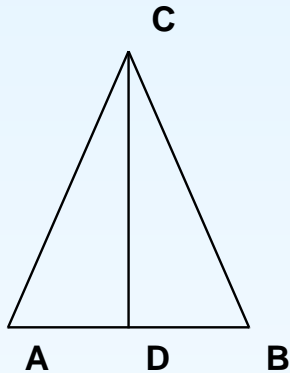
Väitös. $AD=BD$.

Todistus. Tarkastellaan kolmioita ADC ja BDC

- $AC=BC$, koska

Todistustehtävän rakenne

Lause. Tasakylkisen kolmion kannalle piirretty korkeusjana puolittaa kannan.



Oletus. $\triangle ABC$ on tasakylkinen ja CD on korkeusjana.

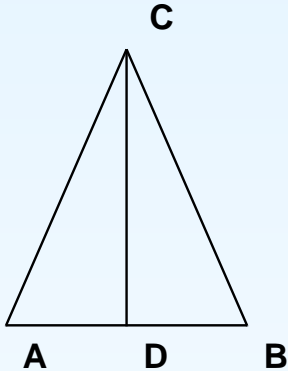
Väitös. $AD=BD$.

Todistus. Tarkastellaan kolmioita ADC ja BDC

- $AC=BC$, koska oletuksen mukaan $\triangle ABC$ on tasakylkinen.

Todistustehtävän rakenne

Lause. Tasakylkisen kolmion kannalle piirretty korkeusjana puolittaa kannan.



Oletus. $\triangle ABC$ on tasakylkinen ja CD on korkeusjana.

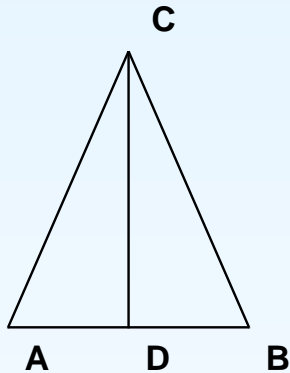
Väitös. $AD=BD$.

Todistus. Tarkastellaan kolmioita ADC ja BDC

- $AC=BC$, koska oletuksen mukaan $\triangle ABC$ on tasakylkinen.
- CD on yhteinen

Todistustehtävän rakenne

Lause. Tasakylkisen kolmion kannalle piirretty korkeusjana puolittaa kannan.



Oletus. $\triangle ABC$ on tasakylkinen ja CD on korkeusjana.

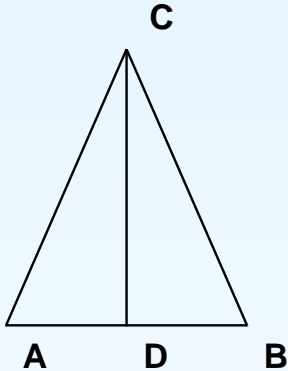
Väitös. $AD=BD$.

Todistus. Tarkastellaan kolmioita ADC ja BDC

- $AC=BC$, koska oletuksen mukaan $\triangle ABC$ on tasakylkinen.
- CD on yhteinen
- $\sphericalangle ADC = \sphericalangle BDC = 90^\circ$, koska

Todistustehtävän rakenne

Lause. Tasakylkisen kolmion kannalle piirretty korkeusjana puolittaa kannan.



Oletus. $\triangle ABC$ on tasakylkinen ja CD on korkeusjana.

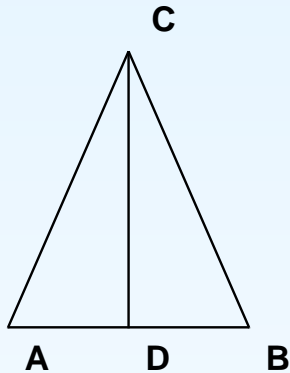
Väitös. $AD=BD$.

Todistus. Tarkastellaan kolmioita ADC ja BDC

- $AC=BC$, koska oletuksen mukaan $\triangle ABC$ on tasakylkinen.
- CD on yhteinen
- $\sphericalangle ADC = \sphericalangle BDC = 90^\circ$, koska oletuksen perusteella CD on korkeusjana.

Todistustehtävän rakenne

Lause. Tasakylkisen kolmion kannalle piirretty korkeusjana puolittaa kannan.



Oletus. $\triangle ABC$ on tasakylkinen ja CD on korkeusjana.

Väitös. $AD=BD$.

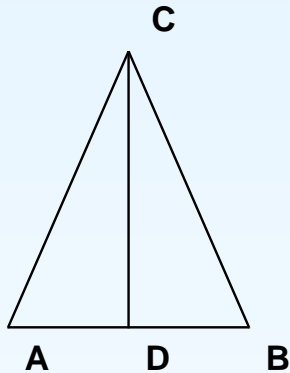
Todistus. Tarkastellaan kolmioita ADC ja BDC

- $AC=BC$, koska oletuksen mukaan $\triangle ABC$ on tasakylkinen.
- CD on yhteinen
- $\sphericalangle ADC = \sphericalangle BDC = 90^\circ$, koska oletuksen perusteella CD on korkeusjana.

Täten on $\triangle ADC \cong \triangle BDC$

Todistustehtävän rakenne

Lause. Tasakylkisen kolmion kannalle piirretty korkeusjana puolittaa kannan.



Oletus. $\triangle ABC$ on tasakylkinen ja CD on korkeusjana.

Väitös. $AD=BD$.

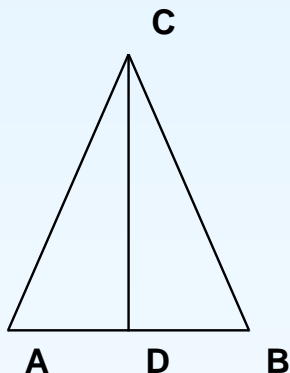
Todistus. Tarkastellaan kolmioita ADC ja BDC

- $AC=BC$, koska oletuksen mukaan $\triangle ABC$ on tasakylkinen.
- CD on yhteinen
- $\sphericalangle ADC = \sphericalangle BDC = 90^\circ$, koska oletuksen perusteella CD on korkeusjana.

Täten on $\triangle ADC \cong \triangle BDC$ (ssk, kulmat DAC ja DBC samanlaatuiset eli terävät).

Todistustehtävän rakenne

Lause. Tasakylkisen kolmion kannalle piirretty korkeusjana puolittaa kannan.



Oletus. $\triangle ABC$ on tasakylkinen ja CD on korkeusjana.

Väitös. $AD=BD$.

Todistus. Tarkastellaan kolmioita ADC ja BDC

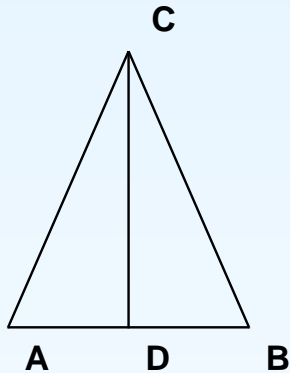
- $AC=BC$, koska oletuksen mukaan $\triangle ABC$ on tasakylkinen.
- CD on yhteinen
- $\sphericalangle ADC = \sphericalangle BDC = 90^\circ$, koska oletuksen perusteella CD on korkeusjana.

Täten on $\triangle ADC \cong \triangle BDC$ (ssk, kulmat DAC ja DBC samanlaatuiset eli terävät).

Näin $AD=BD$

Todistustehtävän rakenne

Lause. Tasakylkisen kolmion kannalle piirretty korkeusjana puolittaa kannan.



Oletus. $\triangle ABC$ on tasakylkinen ja CD on korkeusjana.

Väitös. $AD=BD$.

Todistus. Tarkastellaan kolmioita ADC ja BDC

- $AC=BC$, koska oletuksen mukaan $\triangle ABC$ on tasakylkinen.
- CD on yhteinen
- $\sphericalangle ADC = \sphericalangle BDC = 90^\circ$, koska oletuksen perusteella CD on korkeusjana.

Täten on $\triangle ADC \cong \triangle BDC$ (ssk, kulmat DAC ja DBC samanlaatuiset eli terävät).

Näin $AD=BD$ yhtenevien kolmioiden vastinsivuina. \square

Janan keskinormaali

Määritelmä. Janan *keskinormaali* on suora, joka kulkee janan keskipisteen kautta ja on kohtisuorassa janaa vastaan.

Janan keskinormaali

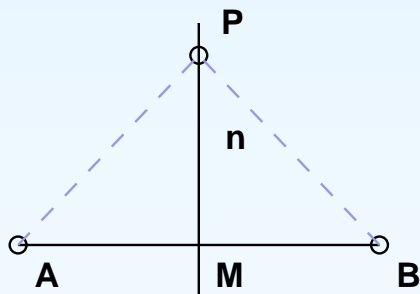
Määritelmä. Janan *keskinormaali* on suora, joka kulkee janan keskipisteen kautta ja on kohtisuorassa janaa vastaan.

Lause 1. Jokainen keskinormaalin piste on yhtä etäällä janan päätepisteistä.

Janan keskinormaali

Määritelmä. Janan *keskinormaali* on suora, joka kulkee janan keskipisteen kautta ja on kohtisuorassa janaa vastaan.

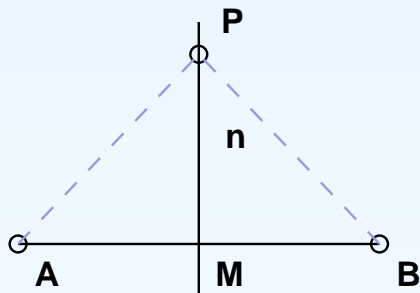
Lause 1. Jokainen keskinormaalien piste on yhtä etäällä janan päätepisteistä.



Janan keskinormaali

Määritelmä. Janan *keskinormaali* on suora, joka kulkee janan keskipisteen kautta ja on kohtisuorassa janaa vastaan.

Lause 1. Jokainen keskinormaalien piste on yhtä etäällä janan päätepisteistä.

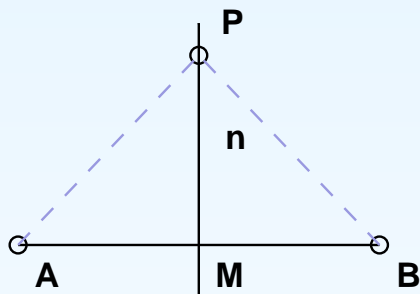


Oletus.

Janan keskinormaali

Määritelmä. Janan *keskinormaali* on suora, joka kulkee janan keskipisteen kautta ja on kohtisuorassa janaa vastaan.

Lause 1. Jokainen keskinormaalien piste on yhtä etäällä janan päätepisteistä.

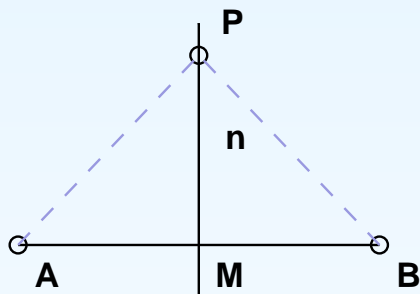


Oletus. Piste P on janan AB keskinormaalien n (mielivaltainen) piste.

Janan keskinormaali

Määritelmä. Janan *keskinormaali* on suora, joka kulkee janan keskipisteen kautta ja on kohtisuorassa janaa vastaan.

Lause 1. Jokainen keskinormaalien piste on yhtä etäällä janan päätepisteistä.



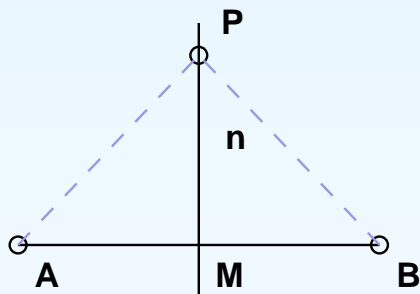
Oletus. Piste P on janan AB keskinormaalien n (mielivaltainen) piste.

Väitös.

Janan keskinormaali

Määritelmä. Janan *keskinormaali* on suora, joka kulkee janan keskipisteen kautta ja on kohtisuorassa janaa vastaan.

Lause 1. Jokainen keskinormaalien piste on yhtä etäällä janan päätepisteistä.



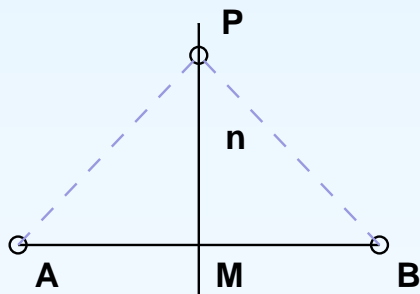
Oletus. Piste P on janan AB keskinormaalien n (mielivaltainen) piste.

Väitös. $PA=PB$

Janan keskinormaali

Määritelmä. Janan *keskinormaali* on suora, joka kulkee janan keskipisteen kautta ja on kohtisuorassa janaa vastaan.

Lause 1. Jokainen keskinormaalien piste on yhtä etäällä janan päätepisteistä.



Oletus. Piste P on janan AB keskinormaalien n (mielivaltainen) piste.

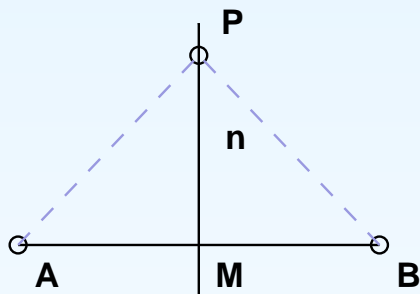
Väitös. $PA=PB$

Todistus.

Janan keskinormaali

Määritelmä. Janan *keskinormaali* on suora, joka kulkee janan keskipisteen kautta ja on kohtisuorassa janaa vastaan.

Lause 1. Jokainen keskinormaalिन piste on yhtä etäällä janan päätepisteistä.



Oletus. Piste P on janan AB keskinormaalिन n (mielivaltainen) piste.

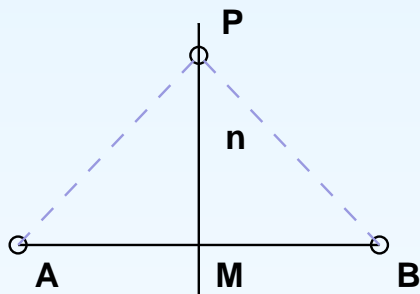
Väitös. $PA=PB$

Todistus. 1) Olkoon piste P janan AB ulkopuolella ja M keskinormaalिन ja janan AB leikkauspiste.

Janan keskinormaali

Määritelmä. Janan *keskinormaali* on suora, joka kulkee janan keskipisteen kautta ja on kohtisuorassa janaa vastaan.

Lause 1. Jokainen keskinormaalien piste on yhtä etäällä janan päätepisteistä.



Oletus. Piste P on janan AB keskinormaalien n (mielivaltainen) piste.

Väitös. $PA=PB$

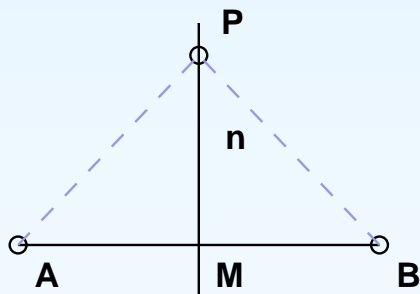
Todistus. 1) Olkoon piste P janan AB ulkopuolella ja M keskinormaalien ja janan AB leikkauspiste.

Tarkastellaan kolmioita AMP ja BMP.

Janan keskinormaali

Määritelmä. Janan *keskinormaali* on suora, joka kulkee janan keskipisteen kautta ja on kohtisuorassa janaa vastaan.

Lause 1. Jokainen keskinormaalien piste on yhtä etäällä janan päätepisteistä.



Oletus. Piste P on janan AB keskinormaalien n (mielivaltainen) piste.

Väitös. $PA=PB$

Todistus. 1) Olkoon piste P janan AB ulkopuolella ja M keskinormaalien ja janan AB leikkauspiste.

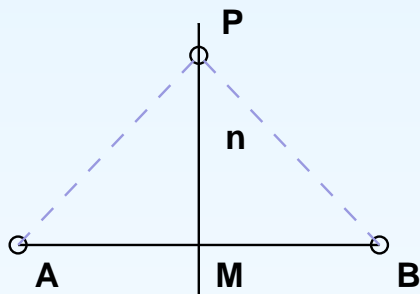
Tarkastellaan kolmioita AMP ja BMP.

- $AM=BM$,

Janan keskinormaali

Määritelmä. Janan *keskinormaali* on suora, joka kulkee janan keskipisteen kautta ja on kohtisuorassa janaa vastaan.

Lause 1. Jokainen keskinormaalिन piste on yhtä etäällä janan päätepisteistä.



Oletus. Piste P on janan AB keskinormaalिन n (mielivaltainen) piste.

Väitös. $PA=PB$

Todistus. 1) Olkoon piste P janan AB ulkopuolella ja M keskinormaalिन ja janan AB leikkauspiste.

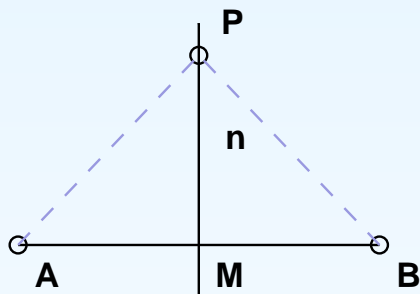
Tarkastellaan kolmioita AMP ja BMP.

- $AM=BM$, keskinormaalिन määritelmän nojalla.

Janan keskinormaali

Määritelmä. Janan *keskinormaali* on suora, joka kulkee janan keskipisteen kautta ja on kohtisuorassa janaa vastaan.

Lause 1. Jokainen keskinormaalın piste on yhtä etäällä janan päätepisteistä.



Oletus. Piste P on janan AB keskinormaalın n (mielivaltainen) piste.

Väitös. $PA=PB$

Todistus. 1) Olkoon piste P janan AB ulkopuolella ja M keskinormaalın ja janan AB leikkauspiste.

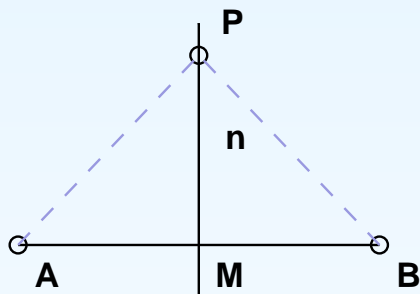
Tarkastellaan kolmioita AMP ja BMP.

- $AM=BM$, keskinormaalın määritelmän nojalla.
- PM on yhteinen.

Janan keskinormaali

Määritelmä. Janan *keskinormaali* on suora, joka kulkee janan keskipisteen kautta ja on kohtisuorassa janaa vastaan.

Lause 1. Jokainen keskinormaalिन piste on yhtä etäällä janan päätepisteistä.



Oletus. Piste P on janan AB keskinormaalिन n (mielivaltaisen) piste.

Väitös. $PA=PB$

Todistus. 1) Olkoon piste P janan AB ulkopuolella ja M keskinormaalिन ja janan AB leikkauspiste.

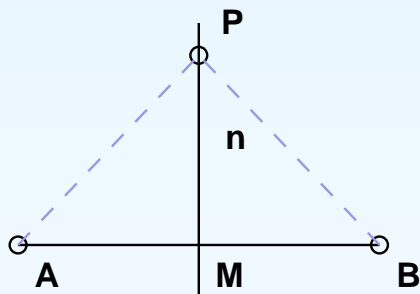
Tarkastellaan kolmioita AMP ja BMP.

- $AM=BM$, keskinormaalिन määritelmän nojalla.
- PM on yhteinen.
- $\sphericalangle AMP = \sphericalangle BMP$

Janan keskinormaali

Määritelmä. Janan *keskinormaali* on suora, joka kulkee janan keskipisteen kautta ja on kohtisuorassa janaa vastaan.

Lause 1. Jokainen keskinormaalिन piste on yhtä etäällä janan päätepisteistä.



Oletus. Piste P on janan AB keskinormaalिन n (mielivaltainen) piste.

Väitös. $PA=PB$

Todistus. 1) Olkoon piste P janan AB ulkopuolella ja M keskinormaalिन ja janan AB leikkauspiste.

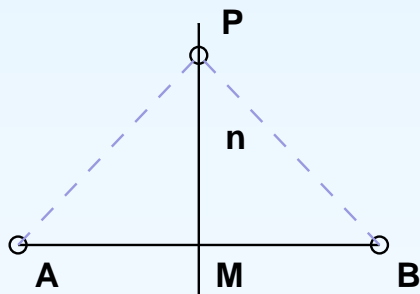
Tarkastellaan kolmioita AMP ja BMP.

- $AM=BM$, keskinormaalिन määritelmän nojalla.
- PM on yhteinen.
- $\sphericalangle AMP = \sphericalangle BMP$ keskinormaalिन määritelmän nojalla.

Janan keskinormaali

Määritelmä. Janan *keskinormaali* on suora, joka kulkee janan keskipisteen kautta ja on kohtisuorassa janaa vastaan.

Lause 1. Jokainen keskinormaalिन piste on yhtä etäällä janan päätepisteistä.



Oletus. Piste P on janan AB keskinormaalिन n (mielivaltainen) piste.

Väitös. $PA=PB$

Todistus. 1) Olkoon piste P janan AB ulkopuolella ja M keskinormaalिन ja janan AB leikkauspiste.

Tarkastellaan kolmioita AMP ja BMP.

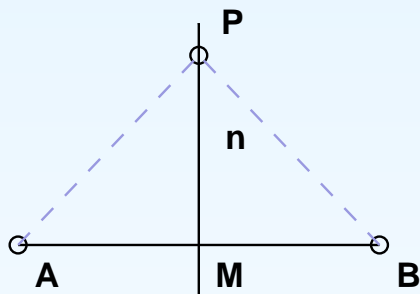
- $AM=BM$, keskinormaalिन määritelmän nojalla.
- PM on yhteinen.
- $\sphericalangle AMP = \sphericalangle BMP$ keskinormaalिन määritelmän nojalla.

Täten on $\triangle AMP \cong \triangle BMP$

Janan keskinormaali

Määritelmä. Janan *keskinormaali* on suora, joka kulkee janan keskipisteen kautta ja on kohtisuorassa janaa vastaan.

Lause 1. Jokainen keskinormaalिन piste on yhtä etäällä janan päätepisteistä.



Oletus. Piste P on janan AB keskinormaalिन n (mielivaltainen) piste.

Väitös. $PA=PB$

Todistus. 1) Olkoon piste P janan AB ulkopuolella ja M keskinormaalिन ja janan AB leikkauspiste.

Tarkastellaan kolmioita AMP ja BMP.

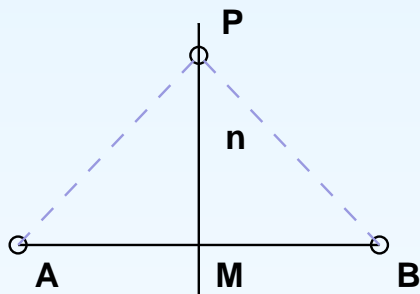
- $AM=BM$, keskinormaalिन määritelmän nojalla.
- PM on yhteinen.
- $\sphericalangle AMP = \sphericalangle BMP$ keskinormaalिन määritelmän nojalla.

Täten on $\triangle AMP \cong \triangle BMP$ (sks).

Janan keskinormaali

Määritelmä. Janan *keskinormaali* on suora, joka kulkee janan keskipisteen kautta ja on kohtisuorassa janaa vastaan.

Lause 1. Jokainen keskinormaalिन piste on yhtä etäällä janan päätepisteistä.



Oletus. Piste P on janan AB keskinormaalिन n (mielivaltainen) piste.

Väitös. $PA=PB$

Todistus. 1) Olkoon piste P janan AB ulkopuolella ja M keskinormaalिन ja janan AB leikkauspiste.

Tarkastellaan kolmioita AMP ja BMP.

- $AM=BM$, keskinormaalिन määritelmän nojalla.
- PM on yhteinen.
- $\sphericalangle AMP = \sphericalangle BMP$ keskinormaalिन määritelmän nojalla.

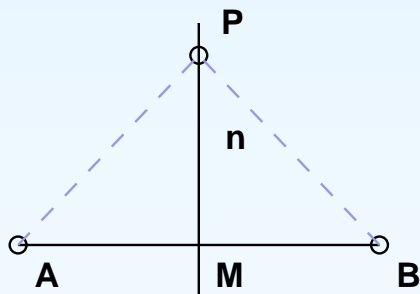
Täten on $\triangle AMP \cong \triangle BMP$ (sks).

Näin on $PA=PB$

Janan keskinormaali

Määritelmä. Janan *keskinormaali* on suora, joka kulkee janan keskipisteen kautta ja on kohtisuorassa janaa vastaan.

Lause 1. Jokainen keskinormaalिन piste on yhtä etäällä janan päätepisteistä.



Oletus. Piste P on janan AB keskinormaalिन n (mielivaltainen) piste.

Väitös. $PA=PB$

Todistus. 1) Olkoon piste P janan AB ulkopuolella ja M keskinormaalिन ja janan AB leikkauspiste.

Tarkastellaan kolmioita AMP ja BMP.

- $AM=BM$, keskinormaalिन määritelmän nojalla.
- PM on yhteinen.
- $\sphericalangle AMP = \sphericalangle BMP$ keskinormaalिन määritelmän nojalla.

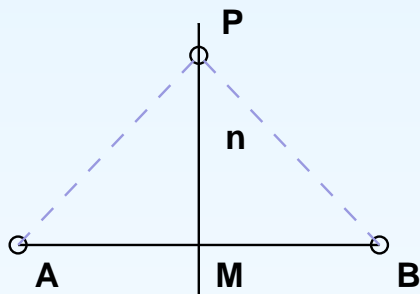
Täten on $\triangle AMP \cong \triangle BMP$ (sks).

Näin on $PA=PB$ yhtenevien kolmioiden vastinsivuina.

Janan keskinormaali

Määritelmä. Janan *keskinormaali* on suora, joka kulkee janan keskipisteen kautta ja on kohtisuorassa janaa vastaan.

Lause 1. Jokainen keskinormaalिन piste on yhtä etäällä janan päätepisteistä.



Oletus. Piste P on janan AB keskinormaalिन n (mielivaltainen) piste.

Väitös. $PA=PB$

Todistus. 1) Olkoon piste P janan AB ulkopuolella ja M keskinormaalिन ja janan AB leikkauspiste.

Tarkastellaan kolmioita AMP ja BMP.

- $AM=BM$, keskinormaalिन määritelmän nojalla.
- PM on yhteinen.
- $\sphericalangle AMP = \sphericalangle BMP$ keskinormaalिन määritelmän nojalla.

Täten on $\triangle AMP \cong \triangle BMP$ (sks).

Näin on $PA=PB$ yhtenevien kolmioiden vastinsivuina.

2) Jos P on janalla AB, P on AB:n keskipiste. \square

Janan keskinormaali

Lause 2. Jokainen piste, joka on yhtä etäällä janan päätepisteistä, on janan keskinormaalilla.

Janan keskinormaali

Lause 2. Jokainen piste, joka on yhtä etäällä janan päätepisteistä, on janan keskinormaalilla.

Lauseiden 1 ja 2 mukaan janan keskinormaali on kaikkien niiden pisteiden *ura*, jotka ovat yhtä täällä janan päätepisteistä.

Kulman puolittaja

Määritelmä. Kulman puolittaja on kulman kärjestä alkava puolisuora, joka jakaa kulman kahdeksi yhtä suureksi kulmaksi.

Kulman puolittaja

Määritelmä. Kulman puolittaja on kulman kärjestä alkava puolisuora, joka jakaa kulman kahdeksi yhtä suureksi kulmaksi.

Lause. Kulman puolittaja on niiden pisteiden ura, jotka ovat yhtä etäällä kulman kyljistä tai niiden jatkeista.

Kulman puolittaja

Määritelmä. Kulman puolittaja on kulman kärjestä alkava puolisuora, joka jakaa kulman kahdeksi yhtä suureksi kulmaksi.

Lause. Kulman puolittaja on niiden pisteiden ura, jotka ovat yhtä etäällä kulman kyljistä tai niiden jatkeista.

On todistettava kaksi asiaa:

Kulman puolittaja

Määritelmä. Kulman puolittaja on kulman kärjestä alkava puolisuora, joka jakaa kulman kahdeksi yhtä suureksi kulmaksi.

Lause. Kulman puolittaja on niiden pisteiden ura, jotka ovat yhtä etäällä kulman kyljistä tai niiden jatkeista.

On todistettava kaksi asiaa:

1. Jokainen kulman puolittajan piste on yhtä etäällä kulman kyljistä tai niiden jatkeista.

Kulman puolittaja

Määritelmä. Kulman puolittaja on kulman kärjestä alkava puolisuora, joka jakaa kulman kahdeksi yhtä suureksi kulmaksi.

Lause. Kulman puolittaja on niiden pisteiden ura, jotka ovat yhtä etäällä kulman kyljistä tai niiden jatkeista.

On todistettava kaksi asiaa:

1. Jokainen kulman puolittajan piste on yhtä etäällä kulman kyljistä tai niiden jatkeista.
2. Jokainen piste, joka on yhtä etäällä kulman kyljistä tai niiden jatkeista, on kulman puolittajalla.

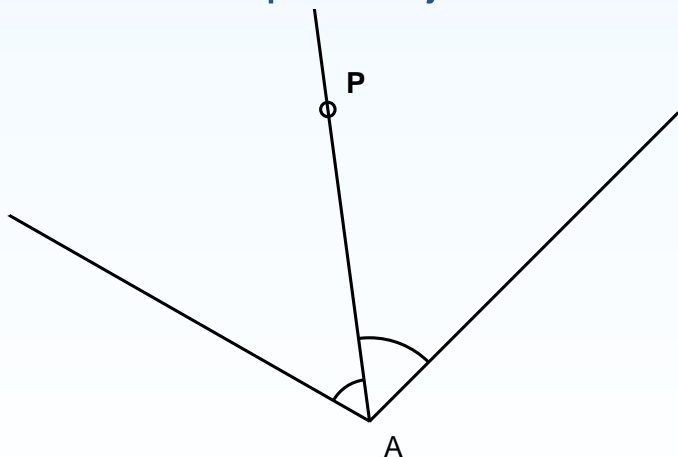
Kulman puolittaja

Määritelmä. Kulman puolittaja on kulman kärjestä alkava puolisuora, joka jakaa kulman kahdeksi yhtä suureksi kulmaksi.

Lause. Kulman puolittaja on niiden pisteiden ura, jotka ovat yhtä etäällä kulman kyljistä tai niiden jatkeista.

On todistettava kaksi asiaa:

1. Jokainen kulman puolittajan piste on yhtä etäällä kulman kyljistä tai niiden jatkeista.
2. Jokainen piste, joka on yhtä etäällä kulman kyljistä tai niiden jatkeista, on kulman puolittajalla.



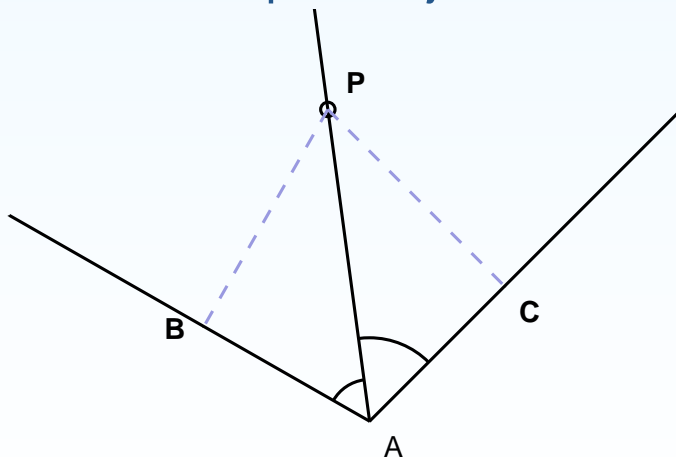
Kulman puolittaja

Määritelmä. Kulman puolittaja on kulman kärjestä alkava puolisuora, joka jakaa kulman kahdeksi yhtä suureksi kulmaksi.

Lause. Kulman puolittaja on niiden pisteiden ura, jotka ovat yhtä etäällä kulman kyljistä tai niiden jatkeista.

On todistettava kaksi asiaa:

1. Jokainen kulman puolittajan piste on yhtä etäällä kulman kyljistä tai niiden jatkeista.
2. Jokainen piste, joka on yhtä etäällä kulman kyljistä tai niiden jatkeista, on kulman puolittajalla.



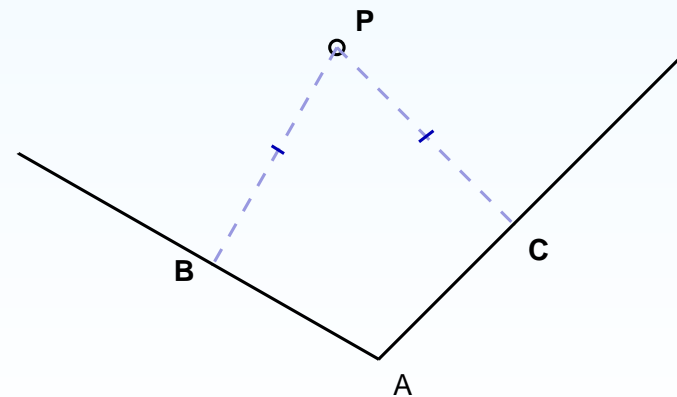
Kulman puolittaja

Määritelmä. Kulman puolittaja on kulman kärjestä alkava puolisuora, joka jakaa kulman kahdeksi yhtä suureksi kulmaksi.

Lause. Kulman puolittaja on niiden pisteiden ura, jotka ovat yhtä etäällä kulman kyljistä tai niiden jatkeista.

On todistettava kaksi asiaa:

1. Jokainen kulman puolittajan piste on yhtä etäällä kulman kyljistä tai niiden jatkeista.
2. Jokainen piste, joka on yhtä etäällä kulman kyljistä tai niiden jatkeista, on kulman puolittajalla.



Kulman puolittaja

Määritelmä. Kulman puolittaja on kulman kärjestä alkava puolisuora, joka jakaa kulman kahdeksi yhtä suureksi kulmaksi.

Lause. Kulman puolittaja on niiden pisteiden ura, jotka ovat yhtä etäällä kulman kyljistä tai niiden jatkeista.

On todistettava kaksi asiaa:

1. Jokainen kulman puolittajan piste on yhtä etäällä kulman kyljistä tai niiden jatkeista.
2. Jokainen piste, joka on yhtä etäällä kulman kyljistä tai niiden jatkeista, on kulman puolittajalla.

