

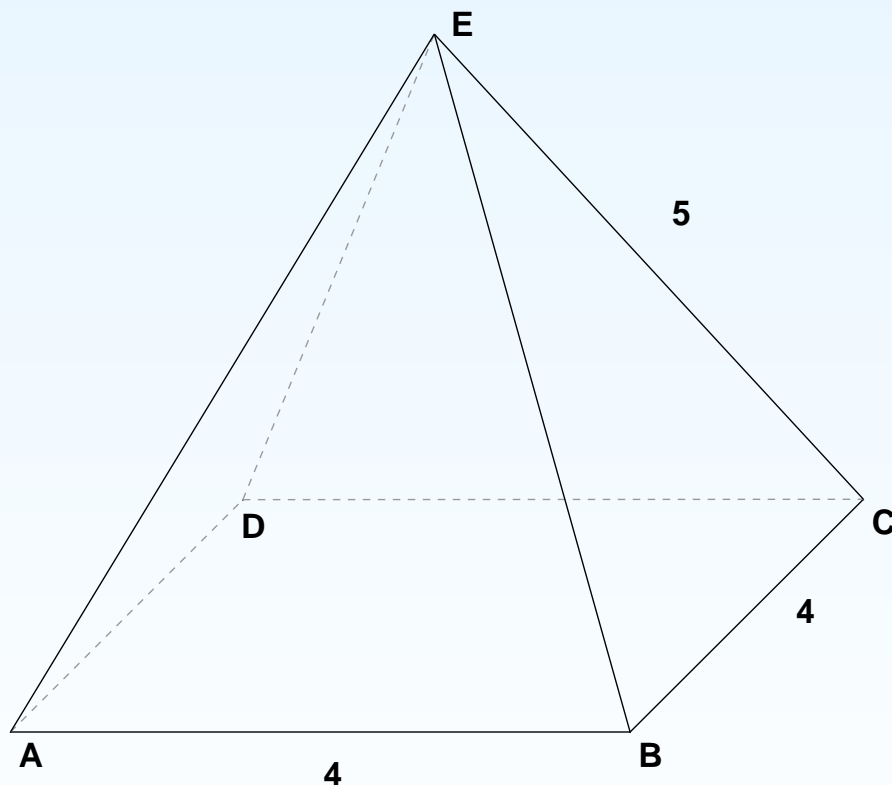
Kulma avaruudessa

Hannu Lehto
Lahden Lyseon lukio



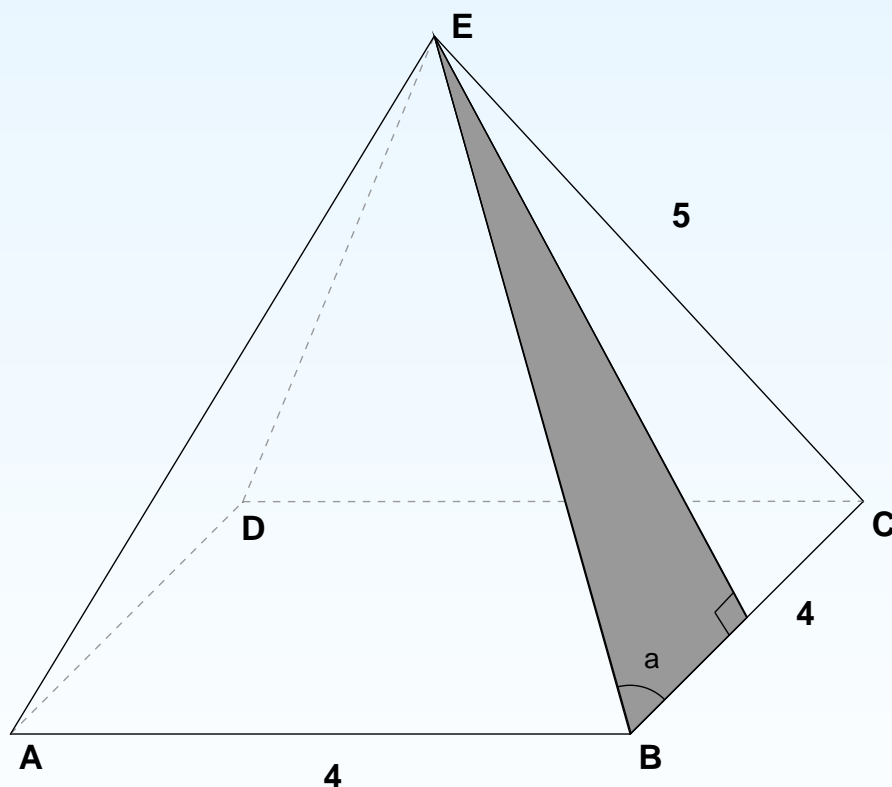
Kahden suoran välinen kulma

Esimerkki. Säännöllisen nelisivuisen pyramidin pohjasärmän pituus on 4 ja sivusärmän pituus on 5. Laske sivu- ja pohjasärmän välinen kulma $0,1^\circ$:een tarkkuudella.



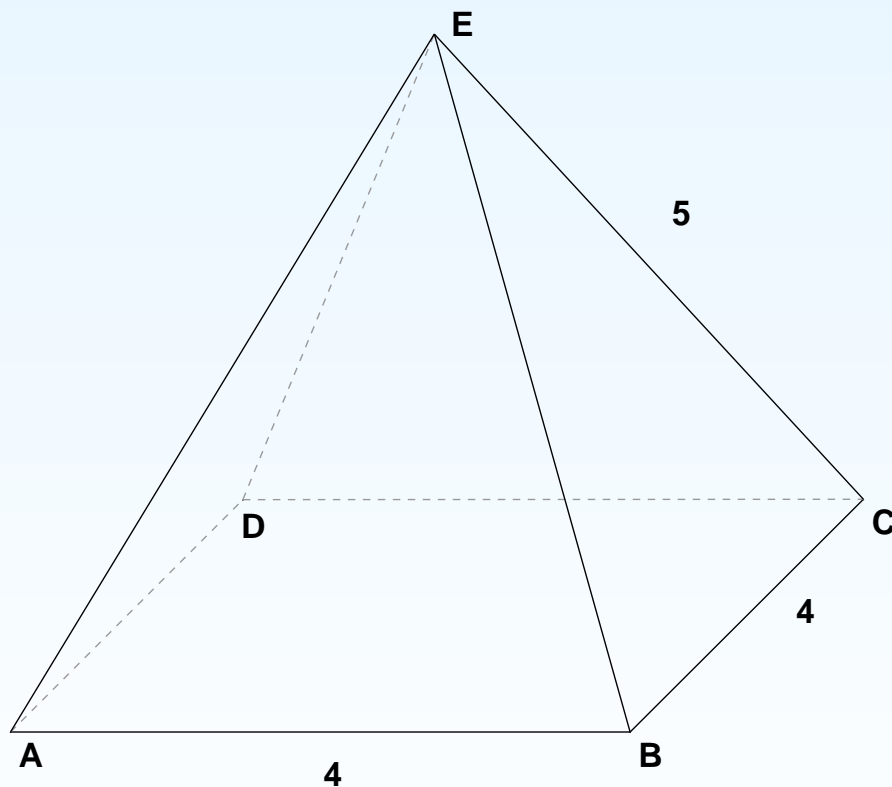
Kahden suoran välinen kulma

Esimerkki. Säännöllisen nelisivuisen pyramidin pohjasärmän pituus on 4 ja sivusärmän pituus on 5. Laske sivu- ja pohjasärmän välinen kulma $0,1^\circ$:een tarkkuudella.



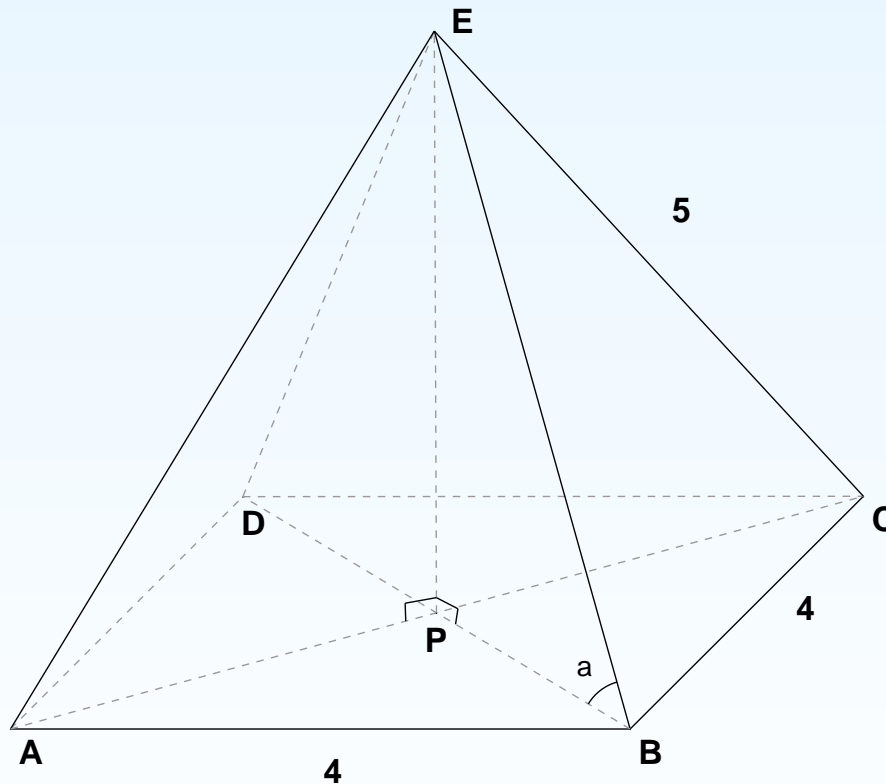
Suoran ja tason välinen kulma

Esimerkki. Säännöllisen nelisivuisen pyramidin pohjasärmän pituus on 4 ja sivusärmän pituus on 5. Laske sivusärmän ja pohjan välinen kulma $0,1^\circ$:een tarkkuudella.



Suoran ja tason välinen kulma

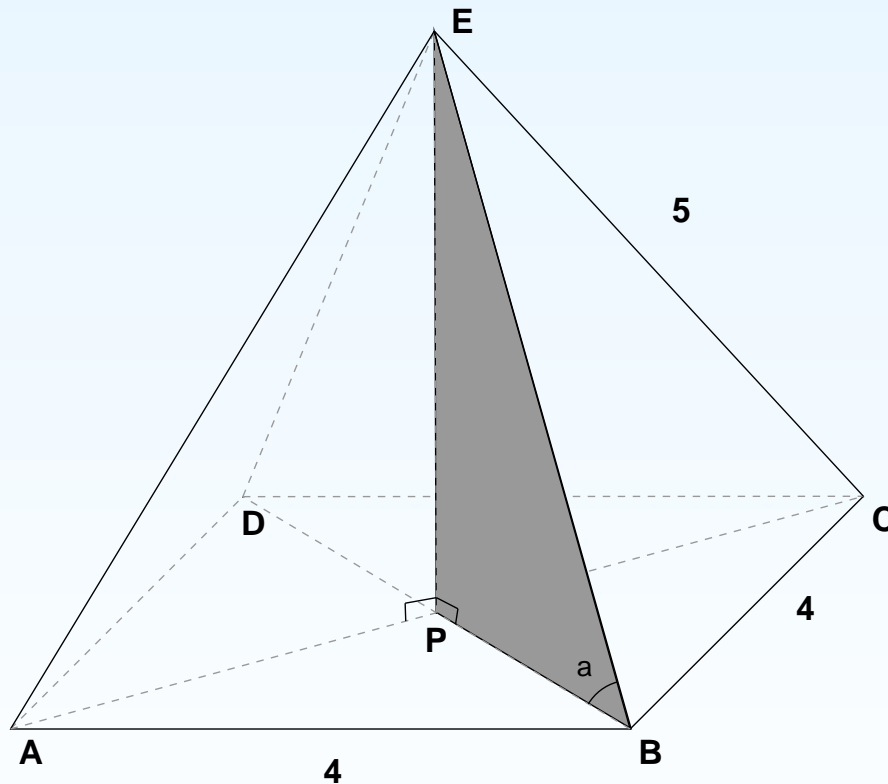
Esimerkki. Säännöllisen nelisivuisen pyramidin pohjasärmän pituus on 4 ja sivusärmän pituus on 5. Laske sivusärmän ja pohjan välinen kulma $0,1^\circ$:een tarkkuudella.



Särmän BE ja sen tasolla olevan *projektion* BP välinen kulma

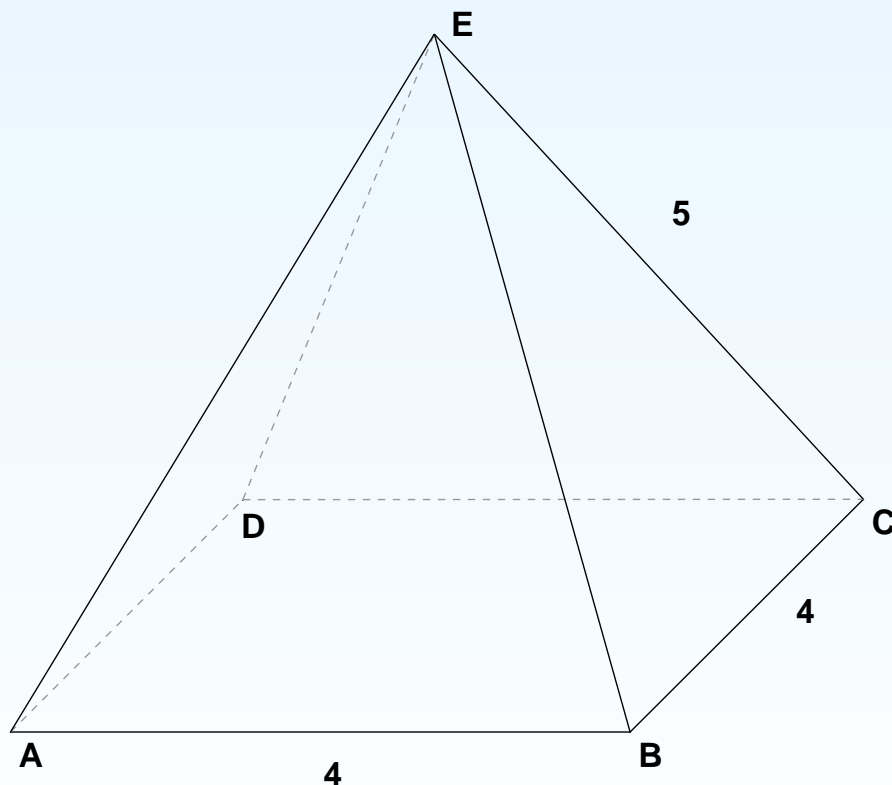
Suoran ja tason välinen kulma

Esimerkki. Säännöllisen nelisivuisen pyramidin pohjasärmän pituus on 4 ja sivusärmän pituus on 5. Laske sivusärmän ja pohjan välinen kulma $0,1^\circ$:een tarkkuudella.



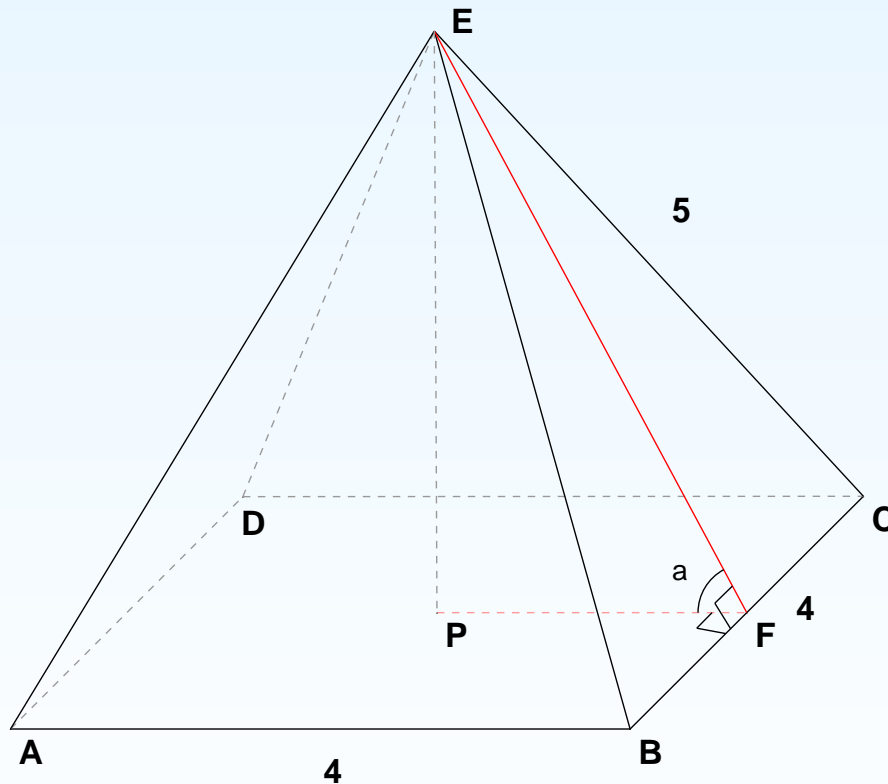
Kahden tason välinen kulma

Esimerkki. Säännöllisen nelisivuisen pyramidin pohjasärmän pituus on 4 ja sivusärmän pituus on 5. Laske sivutahkon ja pohjan välinen kulma $0,1^\circ$:een tarkkuudella.



Kahden tason välinen kulma

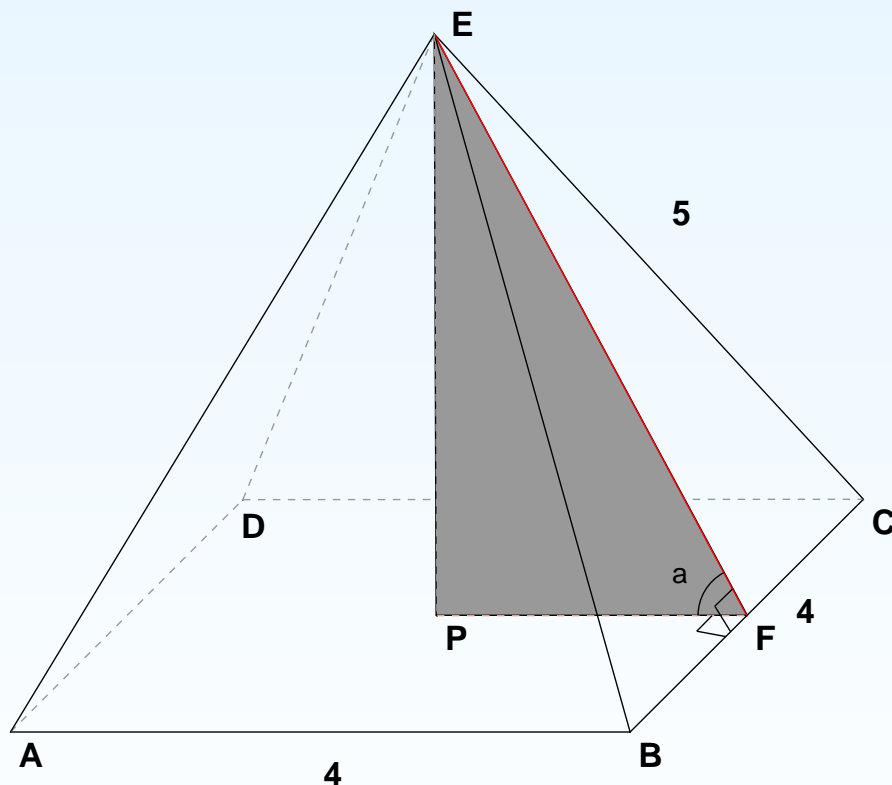
Esimerkki. Säännöllisen nelisivuisen pyramidin pohjasärmän pituus on 4 ja sivusärmän pituus on 5. Laske sivutahkon ja pohjan välinen kulma $0,1^\circ$:een tarkkuudella.



Tasojen leikkaussuoran BC normaalien FP ja FE välinen kulma

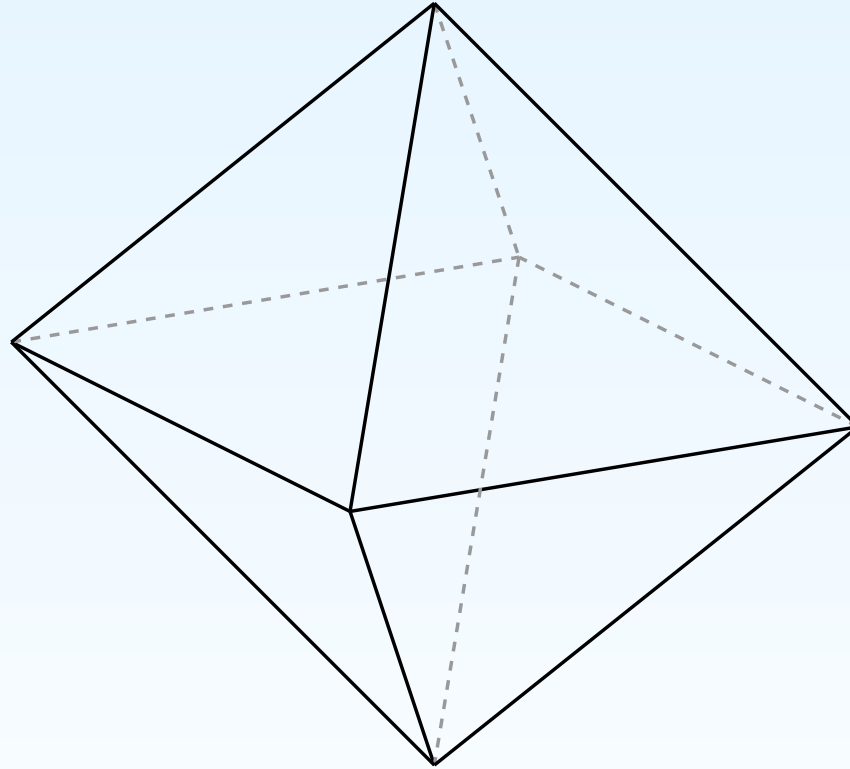
Kahden tason välinen kulma

Esimerkki. Säännöllisen nelisivuisen pyramidin pohjasärmän pituus on 4 ja sivusärmän pituus on 5. Laske sivutahkon ja pohjan välinen kulma $0,1^\circ$:een tarkkuudella.



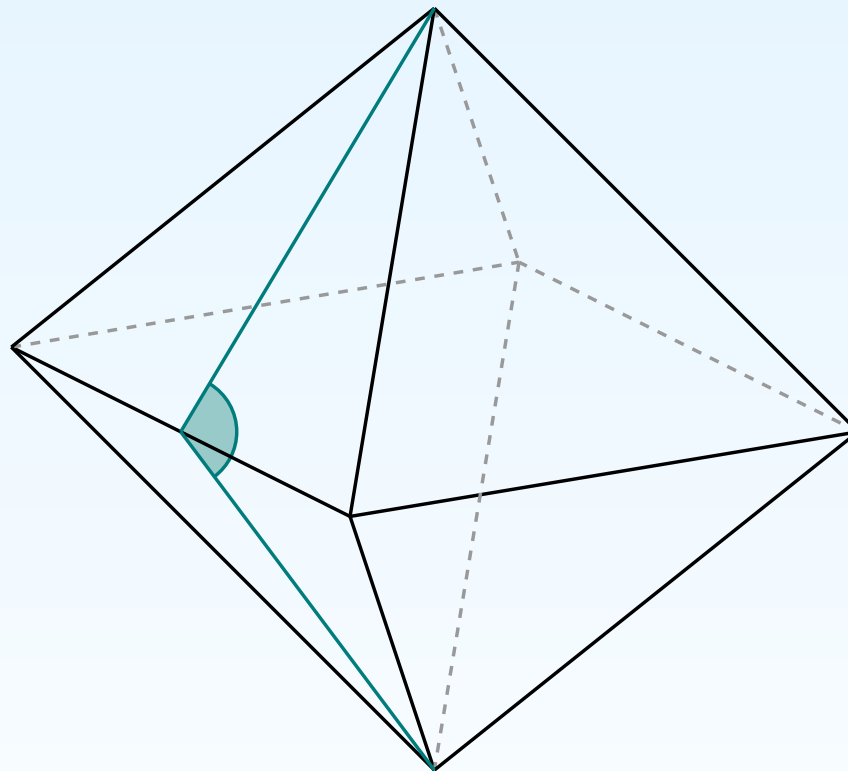
Esimerkki

Säännöllisen oktaedrin kahden tahkon välinen kulma.



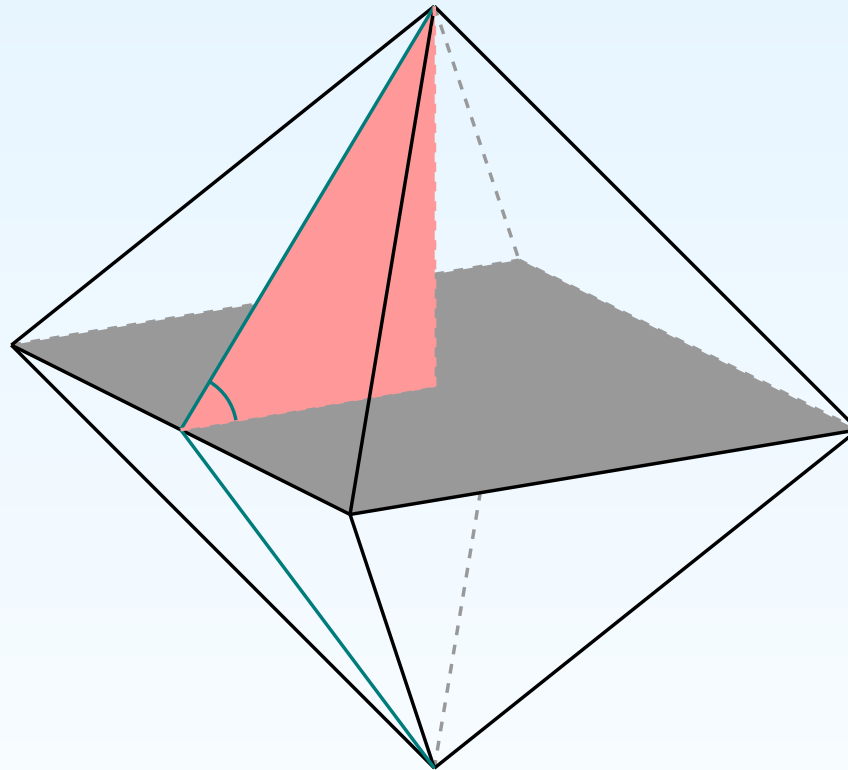
Esimerkki

Säännöllisen oktaedrin kahden tahkon välinen kulma.



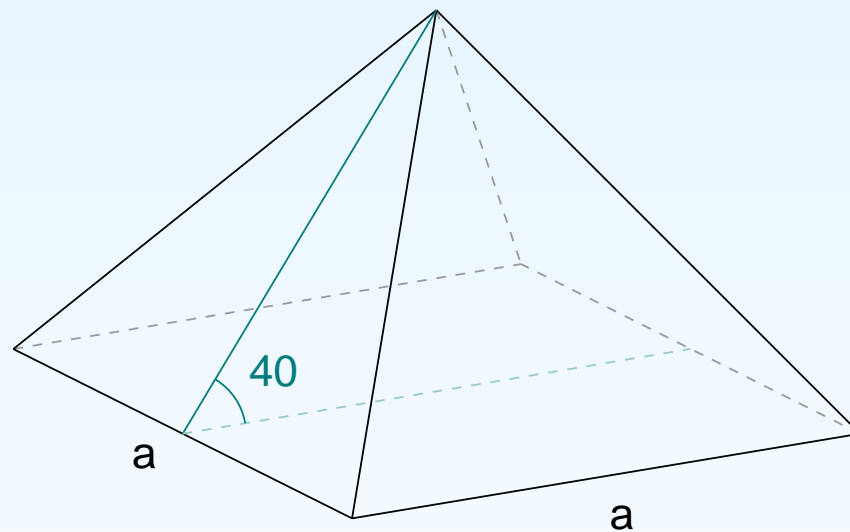
Esimerkki

Säännöllisen oktaedrin kahden tahkon välinen kulma.



Esimerkki

Laske kuvassa olevan neliöpohjaisen pyramidin sivutahkojen välinen kulma.

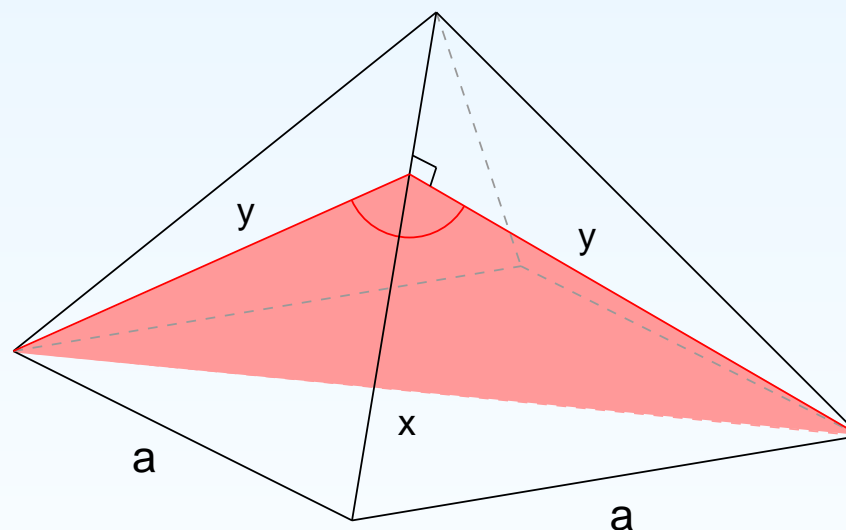


Esimerkki

Laske kuvassa olevan neliöpohjaisen pyramidin sivutahkojen välinen kulma.

Lasketaan ensin x ja y ja sitten kysytty kulma kosinilauseella.

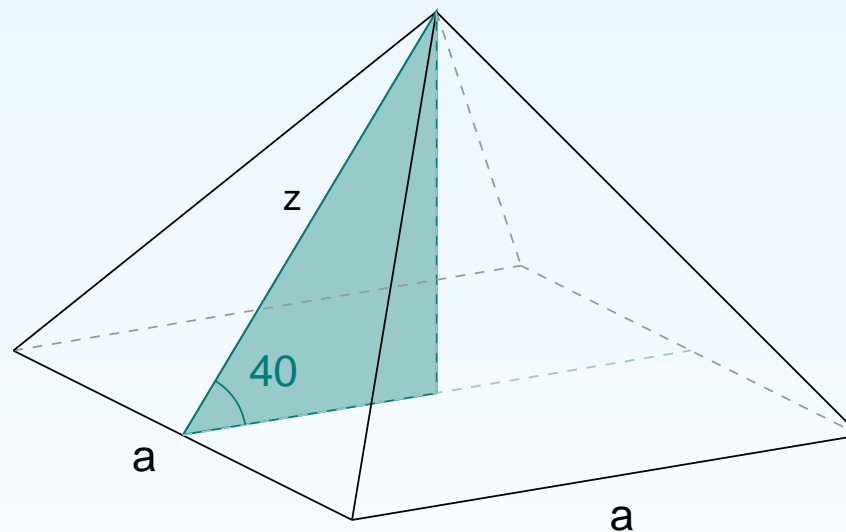
$$x = \sqrt{2}a$$



Esimerkki

Laske kuvassa olevan neliöpohjaisen pyramidin sivutahkojen välinen kulma.

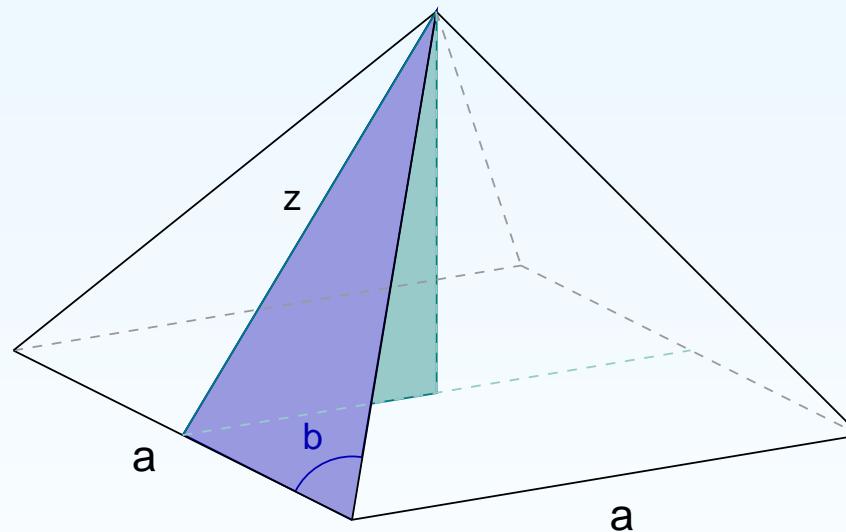
$$z = \frac{a/2}{\cos 40^\circ}$$



Esimerkki

Laske kuvassa olevan neliöpohjaisen pyramidin sivutahkojen välinen kulma.

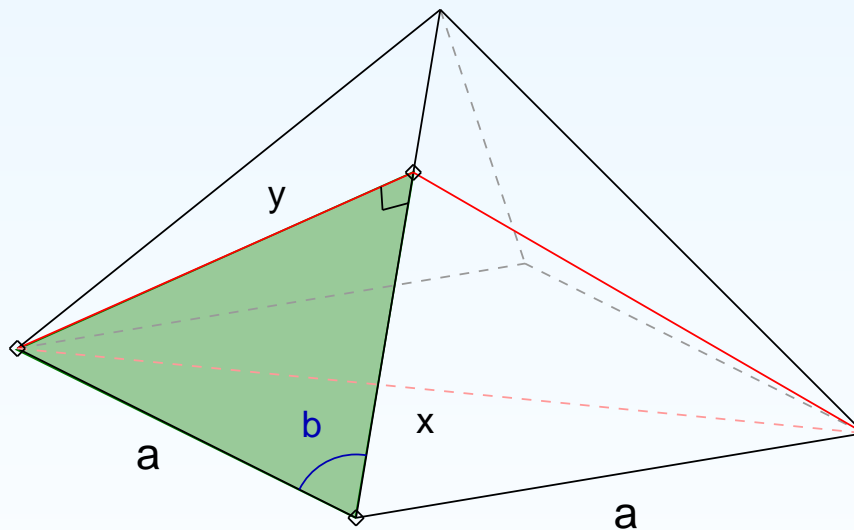
$$z = \frac{a/2}{\cos 40^\circ} \text{ ja } \tan \beta = \frac{\frac{a/2}{\cos 40^\circ}}{a/2} = \frac{1}{\cos 40^\circ} \Rightarrow \beta = 52,54628 \dots^\circ$$



Esimerkki

Laske kuvassa olevan neliöpohjaisen pyramidin sivutahkojen välinen kulma.

$$z = \frac{a/2}{\cos 40^\circ} \text{ ja } \tan \beta = \frac{\frac{a/2}{\cos 40^\circ}}{a/2} = \frac{1}{\cos 40^\circ} \Rightarrow \beta = 52,54628 \dots^\circ$$
$$y = a \sin \beta = 0,7938448 \dots a$$



Esimerkki

Laske kuvassa olevan neliöpohjaisen pyramidin sivutahkojen välinen kulma.

$$z = \frac{a/2}{\cos 40^\circ} \text{ ja } \tan \beta = \frac{\frac{a/2}{\cos 40^\circ}}{a/2} = \frac{1}{\cos 40^\circ} \Rightarrow \beta = 52,54628 \dots^\circ$$

$$y = a \sin \beta = 0,7938448 \dots a \text{ ja } x = a\sqrt{2}$$

Kysytty kulma saadaan kosinilauseesta: $x^2 = y^2 + y^2 - 2y^2 \cos \alpha$, josta $\alpha \approx 125,9^\circ$

