Itseisarvo

Hannu Lehto
Lahden Lyseon lukio

Osa I: Itseisarvon määritelmä

Itseisarvo

Esimerkki.

$$|5| \quad =$$

Itseisarvo

Esimerkki.

$$|5| = 5$$

Itseisarvo

Esimerkki.

$$\begin{aligned} |5| &= 5 \\ |-5| &= \end{aligned}$$

Itseisarvo

Esimerkki.

$$\begin{aligned} |5| &= 5 \\ |-5| &= 5 \end{aligned}$$

Itseisarvo

Esimerkki.

$$
\begin{aligned}
|5| &= 5 \\
|-5| &= 5
\end{aligned}
$$

$$|2-\sqrt{5}| =$$

Itseisarvo

Esimerkki.

$$\begin{aligned} |5| &= 5 \\ |-5| &= 5 \end{aligned}$$

$$|\underbrace{2-\sqrt{5}}_{<0}| =$$

Itseisarvo

Esimerkki.

$$\begin{aligned} |5| &= 5 \\ |-5| &= 5 \end{aligned}$$

$$|\underbrace{2-\sqrt{5}}_{<0}| = -(2-\sqrt{5})$$

Itseisarvo

Esimerkki.

$$
\begin{aligned}
|5| &= 5 \\
|-5| &= 5
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|\underbrace{2-\sqrt{5}}_{<0}| &= -(2-\sqrt{5}) \\
&= -2+\sqrt{5}
\end{aligned}
$$

Itseisarvo

Esimerkki.

$$
\begin{aligned}
|5| &= 5 \\
|-5| &= 5
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|\underbrace{2-\sqrt{5}}_{<0}| &= -(2-\sqrt{5}) \\
&= -2+\sqrt{5}
\end{aligned}
$$

Määritelmä 1.

$$
|x| = \begin{cases} x & \text{, kun } x \geq 0 \\ -x & \text{, kun } x < 0 \end{cases}
$$

Esimerkki

Olkoon $f(x) = |2x - 1|$. Poista itseisarvomerkit ja piirrä funktion kuvaaja.

Esimerkki

Olkoon $f(x) = |2x - 1|$. Poista itseisarvomerkit ja piirrä funktion kuvaaja.

$2x - 1 = 0$

Esimerkki

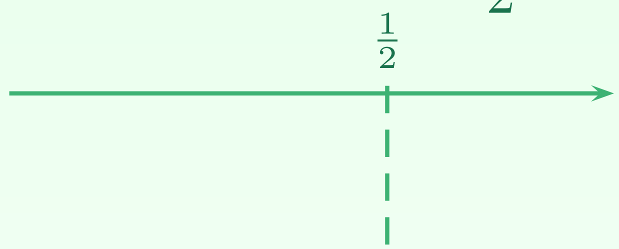
Olkoon $f(x) = |2x - 1|$. Poista itseisarvomerkit ja piirrä funktion kuvaaja.

$2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$

Esimerkki

Olkoon $f(x) = |2x - 1|$. Poista itseisarvomerkit ja piirrä funktion kuvaaja.

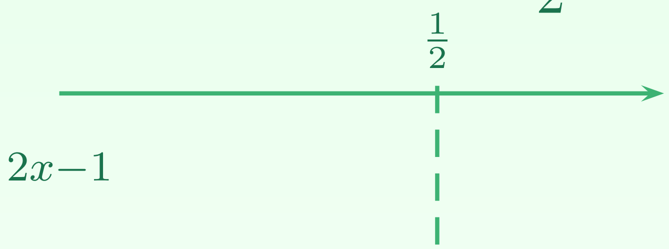
$$2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$



Esimerkki

Olkoon $f(x) = |2x - 1|$. Poista itseisarvomerkit ja piirrä funktion kuvaaja.

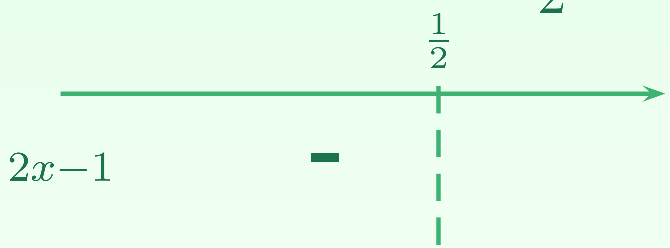
$$2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$



Esimerkki

Olkoon $f(x) = |2x - 1|$. Poista itseisarvomerkit ja piirrä funktion kuvaaja.

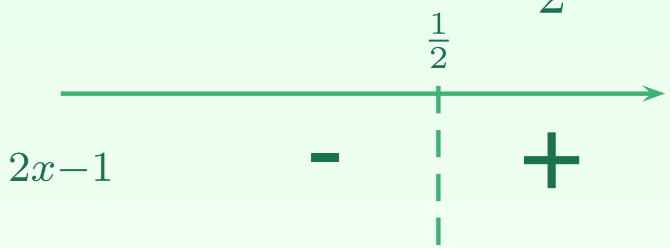
$$2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$



Esimerkki

Olkoon $f(x) = |2x - 1|$. Poista itseisarvomerkit ja piirrä funktion kuvaaja.

$$2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$



Esimerkki

Olkoon $f(x) = |2x - 1|$. Poista itseisarvomerkit ja piirrä funktion kuvaaja.

$$2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

		$\frac{1}{2}$	
$2x-1$	-		+
$\lvert 2x-1 \rvert$			

Esimerkki

Olkoon $f(x) = |2x - 1|$. Poista itseisarvomerkit ja piirrä funktion kuvaaja.

$$2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

		$\frac{1}{2}$	
$2x-1$	-		+
$\|2x-1\|$	$-2x+1$		

Esimerkki

Olkoon $f(x) = |2x - 1|$. Poista itseisarvomerkit ja piirrä funktion kuvaaja.

$$2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

		$\frac{1}{2}$	
$2x-1$	-		+
$\|2x-1\|$	$-2x+1$		$2x-1$

Esimerkki

Olkoon $f(x) = |2x - 1|$. Poista itseisarvomerkit ja piirrä funktion kuvaaja.

$$2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

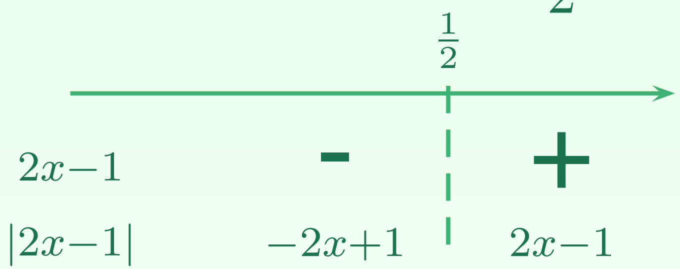
		$\frac{1}{2}$	
$2x-1$	-		+
$\lvert 2x-1 \rvert$	$-2x+1$		$2x-1$

$$f(x) = |2x - 1| = \begin{cases} -2x + 1 & \text{, kun } x \leq \frac{1}{2} \\ 2x - 1 & \text{, kun } x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

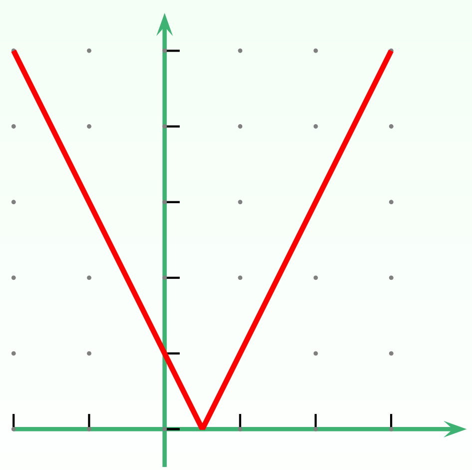
Esimerkki

Olkoon $f(x) = |2x - 1|$. Poista itseisarvomerkit ja piirrä funktion kuvaaja.

$$2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$



$$f(x) = |2x - 1| = \begin{cases} -2x + 1 & \text{, kun } x \leq \frac{1}{2} \\ 2x - 1 & \text{, kun } x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

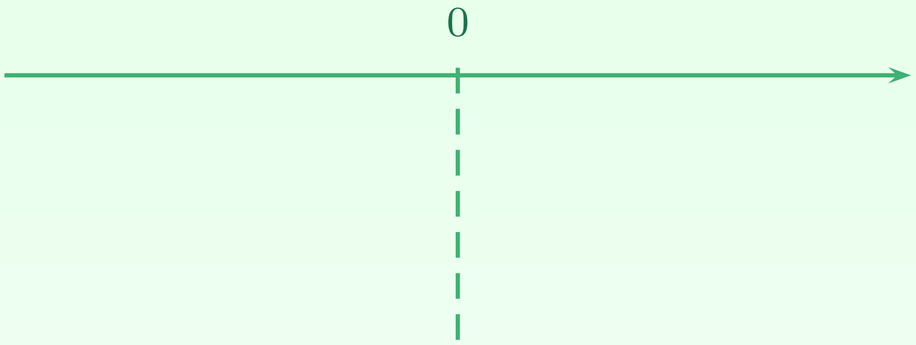


Esimerkki

Olkoon $f(x) = 2x + |x| - |2 - x|$. Poista itseisarvomerkit.

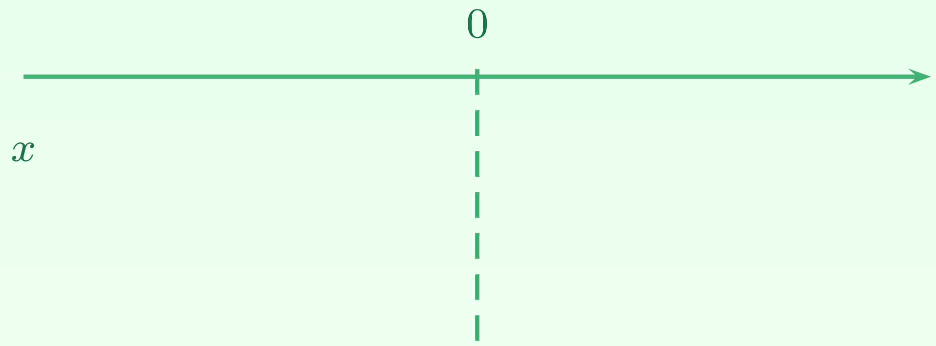
Esimerkki

Olkoon $f(x) = 2x + |x| - |2 - x|$. Poista itseisarvomerkit.



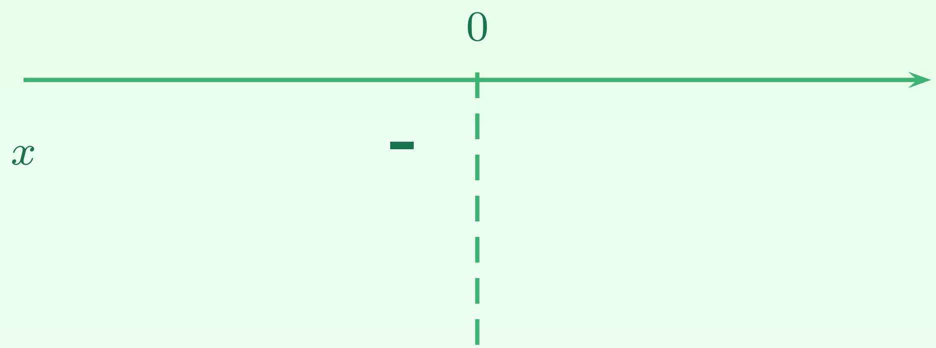
Esimerkki

Olkoon $f(x) = 2x + |x| - |2 - x|$. Poista itseisarvomerkit.



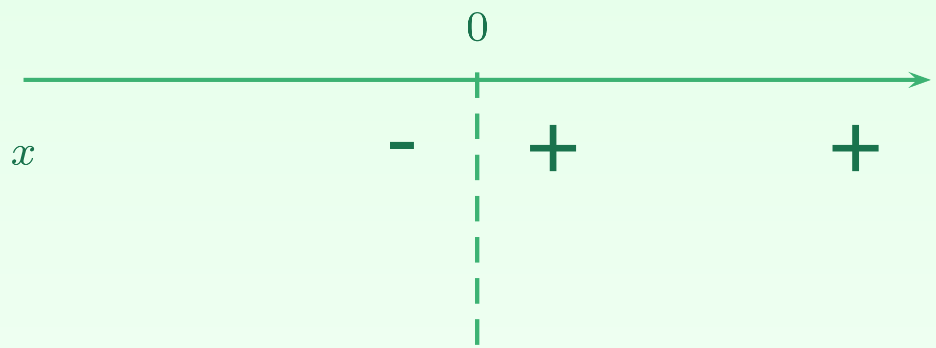
Esimerkki

Olkoon $f(x) = 2x + |x| - |2 - x|$. Poista itseisarvomerkit.



Esimerkki

Olkoon $f(x) = 2x + |x| - |2 - x|$. Poista itseisarvomerkit.



Esimerkki

Olkoon $f(x) = 2x + |x| - |2 - x|$. Poista itseisarvomerkit.

		0		2	
x	-		+		+

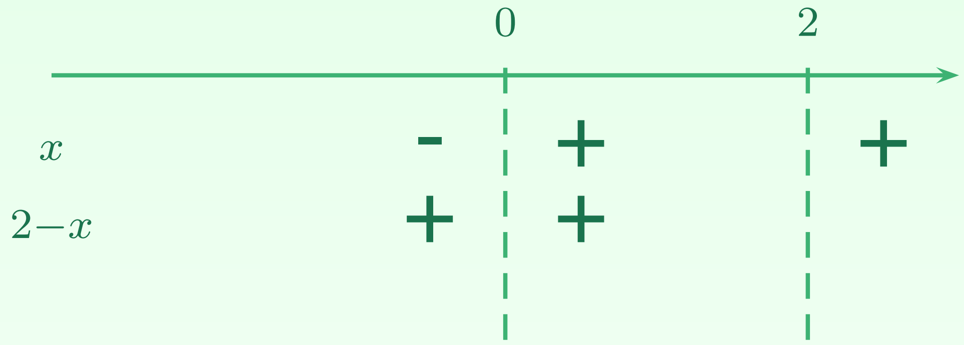
Esimerkki

Olkoon $f(x) = 2x + |x| - |2 - x|$. Poista itseisarvomerkit.

		0		2	
x	-		+		+
$2-x$					

Esimerkki

Olkoon $f(x) = 2x + |x| - |2 - x|$. Poista itseisarvomerkit.



Esimerkki

Olkoon $f(x) = 2x + |x| - |2 - x|$. Poista itseisarvomerkit.

		0		2	
x	-		+		+
$2-x$	+		+		-

Esimerkki

Olkoon $f(x) = 2x + |x| - |2 - x|$. Poista itseisarvomerkit.

		0		2	
x	-		+		+
$2-x$	+		+		-
$2x+\lvert x\rvert-\lvert 2-x\rvert$					

Esimerkki

Olkoon $f(x) = 2x + |x| - |2 - x|$. Poista itseisarvomerkit.

		0		2	
x	-		+		+
$2-x$	+		+		-
$2x+\|x\|-\|2-x\|$	$2x-x-(2-x)$				

Esimerkki

Olkoon $f(x) = 2x + |x| - |2 - x|$. Poista itseisarvomerkit.

$0 \qquad\qquad 2$

x	-	+	+
$2-x$	+	+	-
$2x+\lvert x\rvert-\lvert 2-x\rvert$	$2x-x-(2-x)$	$2x+x-(2-x)$	

Esimerkki

Olkoon $f(x) = 2x + |x| - |2-x|$. Poista itseisarvomerkit.

	$x<0$ (0)	$0<x<2$ (2)	$x>2$
x	-	+	+
$2-x$	+	+	-
$2x+\|x\|-\|2-x\|$	$2x-x-(2-x)$	$2x+x-(2-x)$	$2x+x+(2-x)$

Esimerkki

Olkoon $f(x) = 2x + |x| - |2 - x|$. Poista itseisarvomerkit.

	$x < 0$	0	$0 < x < 2$	2	$x > 2$
x	-		+		+
$2-x$	+		+		-
$2x+\lvert x\rvert-\lvert 2-x\rvert$	$2x-x-(2-x)$		$2x+x-(2-x)$		$2x+x+(2-x)$

$$f(x) = 2x + |x| - |2 - x| =$$

Esimerkki

Olkoon $f(x) = 2x + |x| - |2-x|$. Poista itseisarvomerkit.

	$x < 0$	$0 < x < 2$	$x > 2$
x	-	+	+
$2-x$	+	+	-
$2x+\lvert x\rvert-\lvert 2-x\rvert$	$2x-x-(2-x)$	$2x+x-(2-x)$	$2x+x+(2-x)$

$$f(x) = 2x + |x| - |2-x| = \begin{cases} 2x-2 & \text{, kun } x \leq 0 \\ & \\ & \end{cases}$$

Esimerkki

Olkoon $f(x) = 2x + |x| - |2 - x|$. Poista itseisarvomerkit.

	$x < 0$	$0 < x < 2$	$x > 2$
x	-	+	+
$2-x$	+	+	-
$2x+\|x\|-\|2-x\|$	$2x-x-(2-x)$	$2x+x-(2-x)$	$2x+x+(2-x)$

$$f(x) = 2x + |x| - |2 - x| = \begin{cases} 2x - 2 & \text{, kun } x \leq 0 \\ 4x - 2 & \text{, kun } 0 < x < 2 \\ & \end{cases}$$

Esimerkki

Olkoon $f(x) = 2x + |x| - |2 - x|$. Poista itseisarvomerkit.

		0		2	
x	-		+		+
$2-x$	+		+		-
$2x+\lvert x\rvert-\lvert 2-x\rvert$	$2x-x-(2-x)$		$2x+x-(2-x)$		$2x+x+(2-x)$

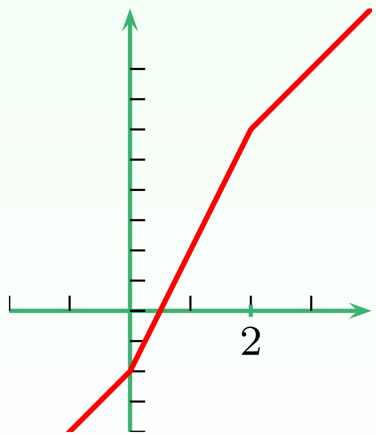
$$f(x) = 2x + |x| - |2 - x| = \begin{cases} 2x - 2 & \text{, kun } x \leq 0 \\ 4x - 2 & \text{, kun } 0 < x < 2 \\ 2x + 2 & \text{, kun } x \geq 2 \end{cases}$$

Esimerkki

Olkoon $f(x) = 2x + |x| - |2 - x|$. Poista itseisarvomerkit.

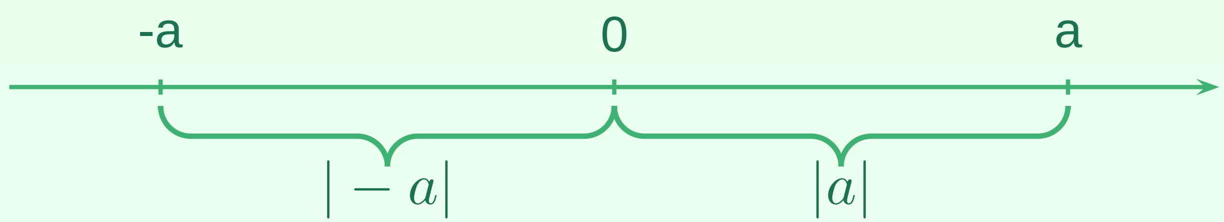
	$x < 0$	0	$0 < x < 2$	2	$x > 2$
x	-		+		+
$2-x$	+		+		-
$2x+\|x\|-\|2-x\|$	$2x-x-(2-x)$		$2x+x-(2-x)$		$2x+x+(2-x)$

$$f(x) = 2x + |x| - |2 - x| = \begin{cases} 2x - 2 & \text{, kun } x \leq 0 \\ 4x - 2 & \text{, kun } 0 < x < 2 \\ 2x + 2 & \text{, kun } x \geq 2 \end{cases}$$



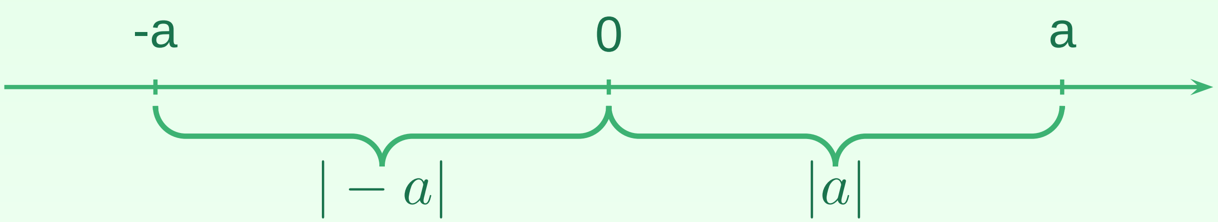
Itseisarvon geometrinen tulkinta

Luvun itseisarvo on luvun etäisyys origosta.

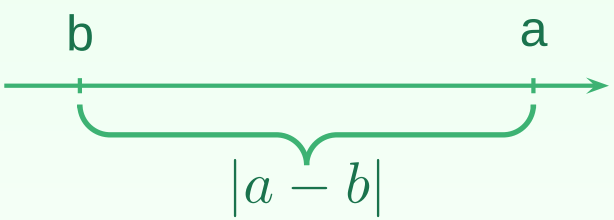


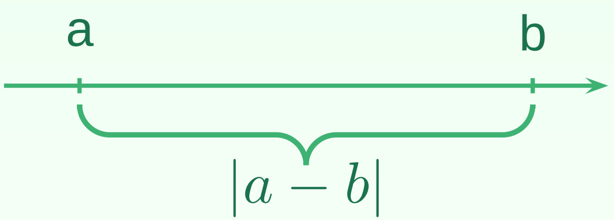
Itseisarvon geometrinen tulkinta

Luvun itseisarvo on luvun etäisyys origosta.



Lukujen a ja b etäisyys





Laskusäännöt

Katso oppikirjasta sivu 8.

Osa II: Itseisarvoyhtälöt

$|f(x)| = a$

Jos vakio a<0, niin

$|f(x)| = a$

Jos vakio a<0, niin ei ratkaisuja.

$|f(x)| = a$

Jos vakio a<0, niin ei ratkaisuja.

Jos vakio $a \geq 0$, niin $f(x) = a \quad \vee f(x) = -a$.

$|f(x)| = |g(x)|$

Yhtälö voidaan ratkaista kahdella vaihtoehtoisella tavalla.

$|f(x)| = |g(x)|$

Yhtälö voidaan ratkaista kahdella vaihtoehtoisella tavalla.

- Tapa 1. $|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow f(x) = g(x) \vee f(x) = -g(x)$

$|f(x)| = |g(x)|$

Yhtälö voidaan ratkaista kahdella vaihtoehtoisella tavalla.

- Tapa 1. $|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow f(x) = g(x) \vee f(x) = -g(x)$
- Tapa 2. $|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow f(x)^2 = g(x)^2$

$|f(x)| = |g(x)|$

Yhtälö voidaan ratkaista kahdella vaihtoehtoisella tavalla.

- Tapa 1. $|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow f(x) = g(x) \vee f(x) = -g(x)$
- Tapa 2. $|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow f(x)^2 = g(x)^2$

Neliöönkorotus tuottaa ekvivalentin yhtälön, koska alkuperäisen yhtälön molemmat puolet ovat epänegatiivisia.

Muut itseisarvoyhtälöt

Ratkaistaan käyttämällä itseisarvon määritelmää.

$$|-x+2| = -3x-2$$

Muut itseisarvoyhtälöt

Ratkaistaan käyttämällä itseisarvon määritelmää.

$$|-x+2| = -3x-2$$

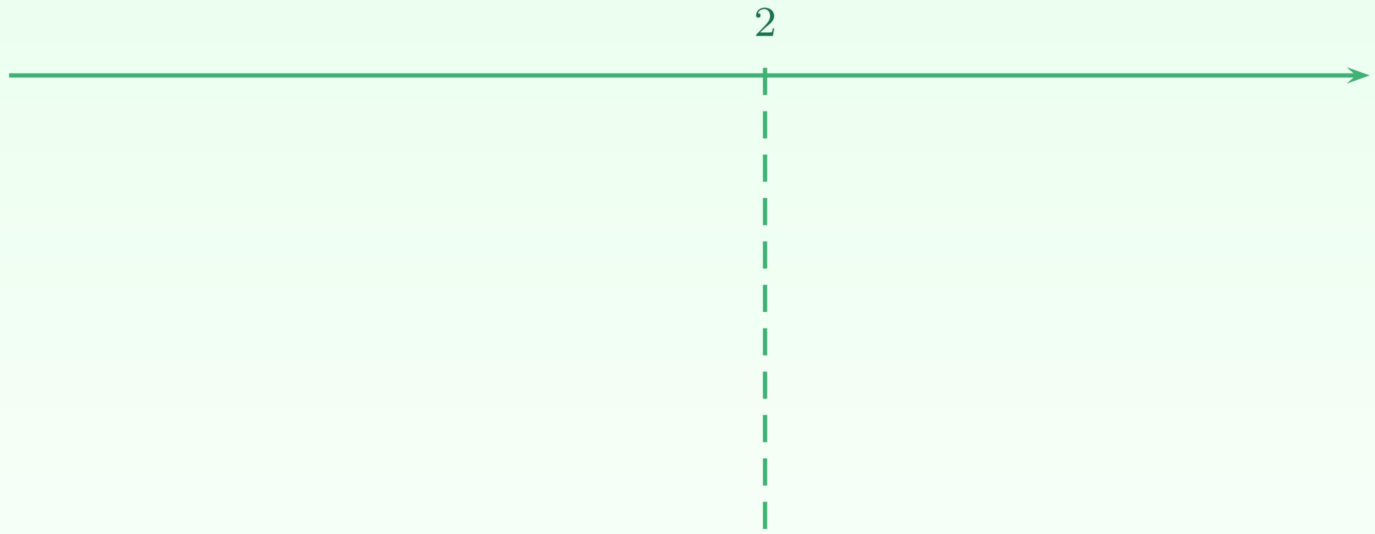
$$-x+2=0 \Leftrightarrow x=2$$

Muut itseisarvoyhtälöt

Ratkaistaan käyttämällä itseisarvon määritelmää.

$$|-x+2| = -3x-2$$

$$-x+2=0 \Leftrightarrow x=2$$



Muut itseisarvoyhtälöt

Ratkaistaan käyttämällä itseisarvon määritelmää.

$$|-x+2| = -3x-2$$

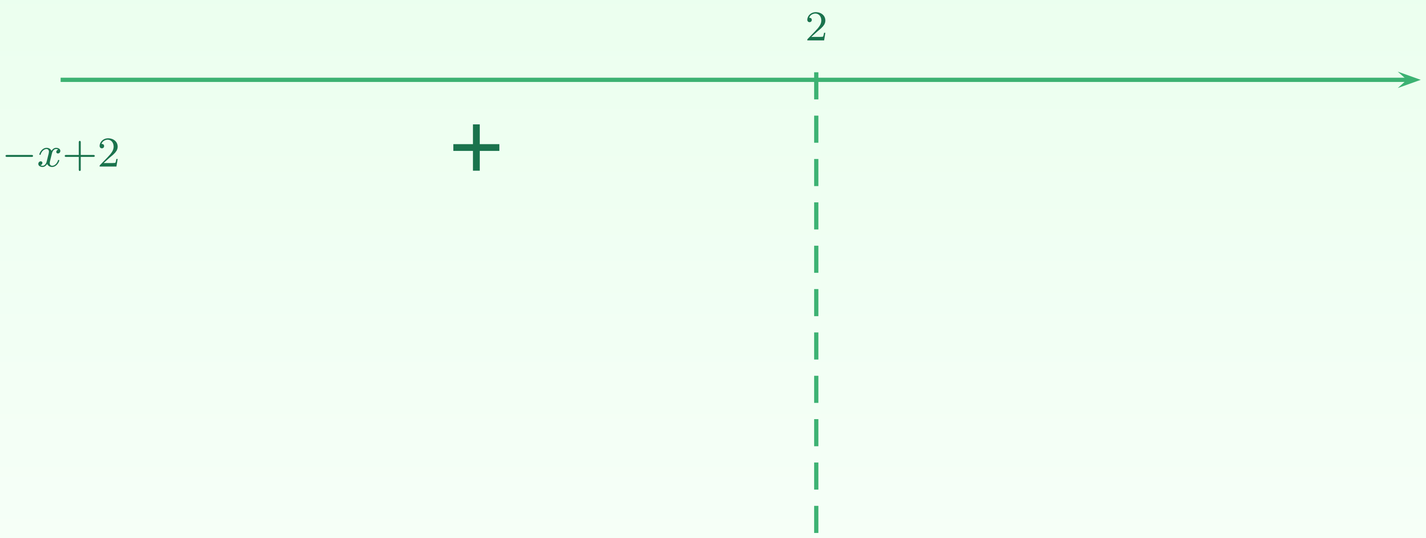
$$-x+2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

Muut itseisarvoyhtälöt

Ratkaistaan käyttämällä itseisarvon määritelmää.

$$|-x+2| = -3x-2$$

$$-x+2=0 \Leftrightarrow x=2$$

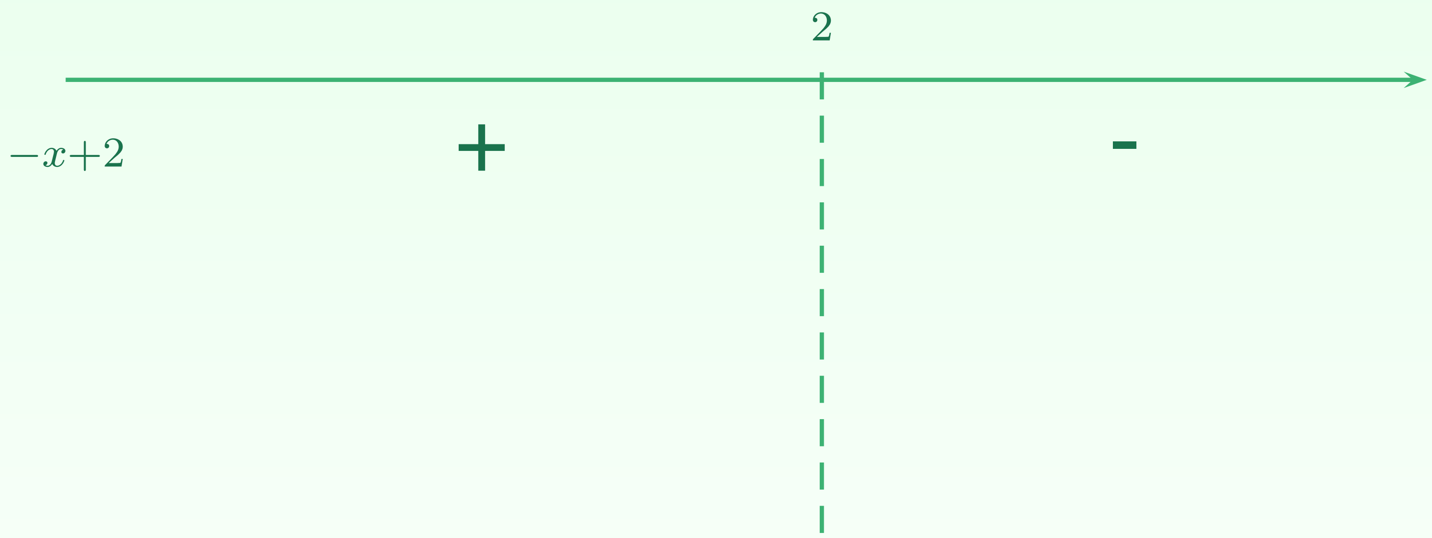


Muut itseisarvoyhtälöt

Ratkaistaan käyttämällä itseisarvon määritelmää.

$$|-x+2| = -3x-2$$

$$-x+2=0 \Leftrightarrow x=2$$



Muut itseisarvoyhtälöt

Ratkaistaan käyttämällä itseisarvon määritelmää.

$$|-x+2| = -3x-2$$

$$-x+2=0 \Leftrightarrow x=2$$

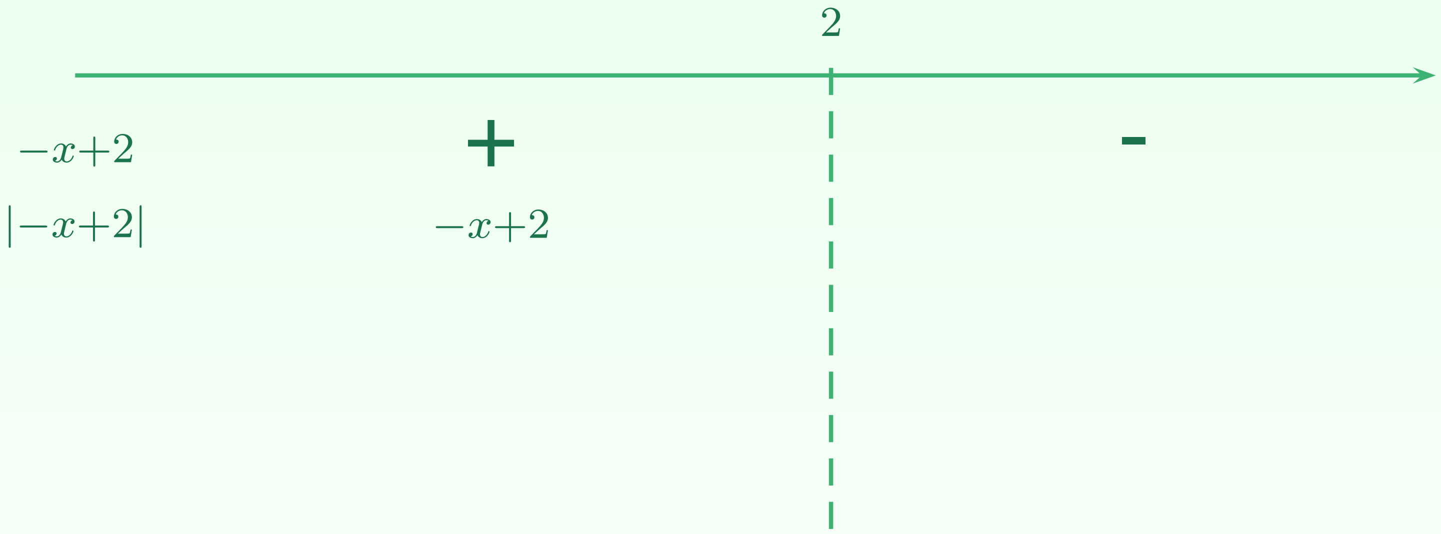
		2	
$-x+2$	+		-
$\lvert -x+2 \rvert$			

Muut itseisarvoyhtälöt

Ratkaistaan käyttämällä itseisarvon määritelmää.

$$|-x+2| = -3x-2$$

$$-x+2=0 \Leftrightarrow x=2$$



Muut itseisarvoyhtälöt

Ratkaistaan käyttämällä itseisarvon määritelmää.

$$|-x+2| = -3x-2$$

$$-x+2=0 \Leftrightarrow x=2$$

		2	
$-x+2$	+		-
$\lvert -x+2 \rvert$	$-x+2$		$x-2$

Muut itseisarvoyhtälöt

Ratkaistaan käyttämällä itseisarvon määritelmää.

$$|-x+2| = -3x-2$$

$$-x+2=0 \Leftrightarrow x=2$$

		2	
$-x+2$	+		-
$\lvert -x+2 \rvert$	$-x+2$		$x-2$
yhtälö			

Muut itseisarvoyhtälöt

Ratkaistaan käyttämällä itseisarvon määritelmää.

$$|-x+2| = -3x-2$$

$$-x+2=0 \Leftrightarrow x=2$$

		2	
$-x+2$	+		-
$\lvert -x+2 \rvert$	$-x+2$		$x-2$
yhtälö	$-x+2=-3x-2$		

Muut itseisarvoyhtälöt

Ratkaistaan käyttämällä itseisarvon määritelmää.

$$|-x+2| = -3x-2$$

$$-x+2=0 \Leftrightarrow x=2$$

		2	
$-x+2$	+		-
$\lvert -x+2 \rvert$	$-x+2$		$x-2$
yhtälö	$-x+2=-3x-2$		$x-2=-3x-2$

Muut itseisarvoyhtälöt

Ratkaistaan käyttämällä itseisarvon määritelmää.

$$|-x+2| = -3x-2$$

$$-x+2=0 \Leftrightarrow x=2$$

		2	
$-x+2$	+		-
$\lvert -x+2 \rvert$	$-x+2$		$x-2$
yhtälö	$-x+2=-3x-2$		$x-2=-3x-2$
	$x=-2<2$		

Muut itseisarvoyhtälöt

Ratkaistaan käyttämällä itseisarvon määritelmää.

$$|-x+2| = -3x-2$$

$$-x+2=0 \Leftrightarrow x=2$$

		2	
$-x+2$	+		-
$\vert -x+2\vert$	$-x+2$		$x-2$
yhtälö	$-x+2=-3x-2$		$x-2=-3x-2$
	$x=-2<2$		
	kelpaa		

Muut itseisarvoyhtälöt

Ratkaistaan käyttämällä itseisarvon määritelmää.

$$|-x+2| = -3x-2$$

$$-x+2=0 \Leftrightarrow x=2$$

		2	
$-x+2$	+		-
$\|-x+2\|$	$-x+2$		$x-2$
yhtälö	$-x+2=-3x-2$		$x-2=-3x-2$
	$x=-2<2$		$x=0<2$
	kelpaa		

Muut itseisarvoyhtälöt

Ratkaistaan käyttämällä itseisarvon määritelmää.

$$|-x+2| = -3x-2$$

$$-x+2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

		2	
$-x+2$	+		-
$\lvert -x+2 \rvert$	$-x+2$		$x-2$
yhtälö	$-x+2=-3x-2$		$x-2=-3x-2$
	$x=-2<2$		$x=0<2$
	kelpaa		ei kelpaa

Osa III: Itseisarvoepäyhtälöt

$|f(x)| \leq a$

Jos vakio $a < 0$, niin

$|f(x)| \leq a$

Jos vakio $a < 0$, niin ei ratkaisuja.

$|f(x)| \leq a$

Jos vakio $a < 0$, niin ei ratkaisuja.

Jos vakio $a \geq 0$,

$|f(x)| \leq a$

Jos vakio $a < 0$, niin ei ratkaisuja.

Jos vakio $a \geq 0$, niin $-a \leq f(x) \leq a$.

$|f(x)| \geq a$

Jos vakio $a < 0$, niin

$|f(x)| \geq a$

Jos vakio $a < 0$, niin ratkaisuina kaikki määrittelyjoukon alkiot.

$|f(x)| \geq a$

Jos vakio $a < 0$, niin ratkaisuina kaikki määrittelyjoukon alkiot.

Jos vakio $a \geq 0$,

$|f(x)| \geq a$

Jos vakio $a < 0$, niin ratkaisuina kaikki määrittelyjoukon alkiot.
Jos vakio $a \geq 0$, niin $f(x) \geq a \vee f(x) \leq -a$.

$|f(x)| \geq |g(x)|$ ja vastaavat

Koska epäyhtälön molemmat puolet ovat epänegatiivisia (≥ 0), niin

$|f(x)| \geq |g(x)|$ ja vastaavat

Koska epäyhtälön molemmat puolet ovat epänegatiivisia (≥ 0), niin
$|f(x)| \geq |g(x)| \Leftrightarrow f(x)^2 \geq g(x)^2$

Muut itseisarvoepäyhtälöt

Ratkaistaan käyttämällä itseisarvon määritelmää.

Muut itseisarvoepäyhtälöt

Ratkaistaan käyttämällä itseisarvon määritelmää.

$|x + 12| \leq 3x$

Muut itseisarvoepäyhtälöt

Ratkaistaan käyttämällä itseisarvon määritelmää.

$|x+12| \leq 3x$

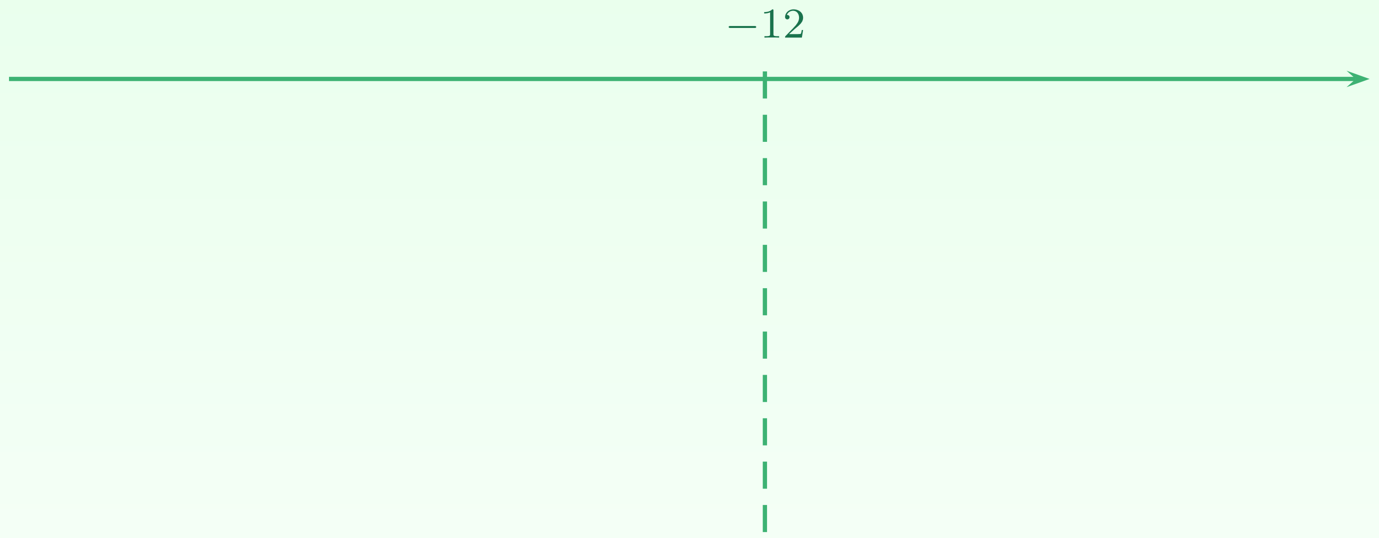
$x+12=0 \Leftrightarrow x=-12$

Muut itseisarvoepäyhtälöt

Ratkaistaan käyttämällä itseisarvon määritelmää.

$$|x + 12| \leq 3x$$

$$x + 12 = 0 \Leftrightarrow x = -12$$

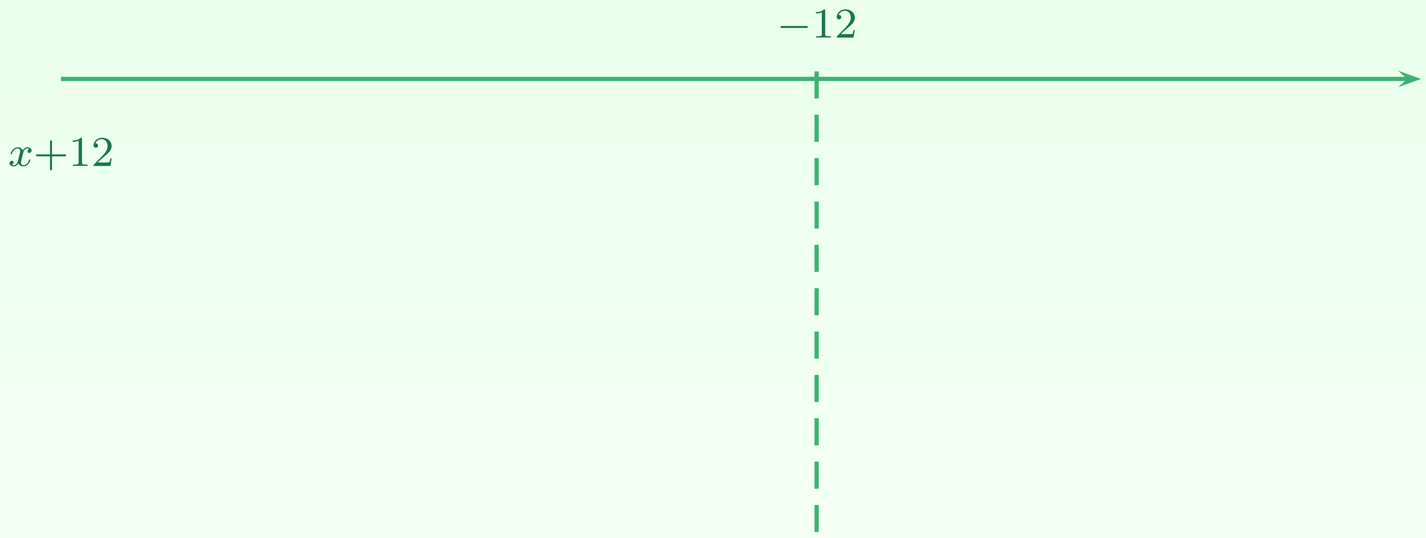


Muut itseisarvoepäyhtälöt

Ratkaistaan käyttämällä itseisarvon määritelmää.

$|x + 12| \leq 3x$

$x + 12 = 0 \Leftrightarrow x = -12$

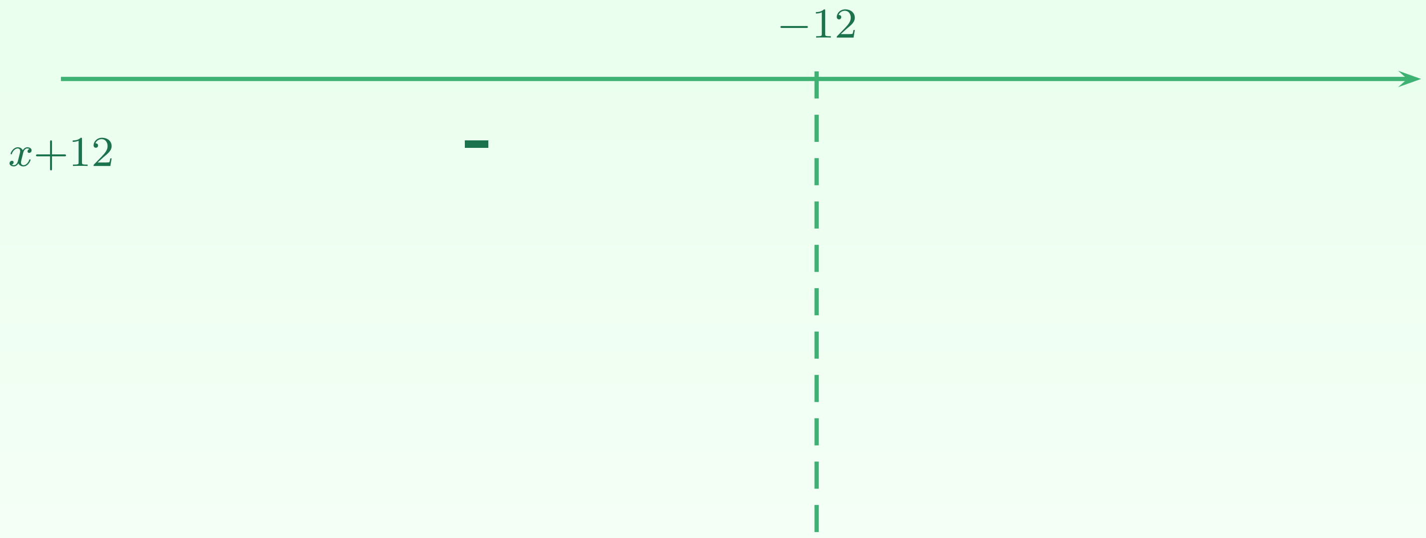


Muut itseisarvoepäyhtälöt

Ratkaistaan käyttämällä itseisarvon määritelmää.

$|x + 12| \leq 3x$

$x + 12 = 0 \Leftrightarrow x = -12$

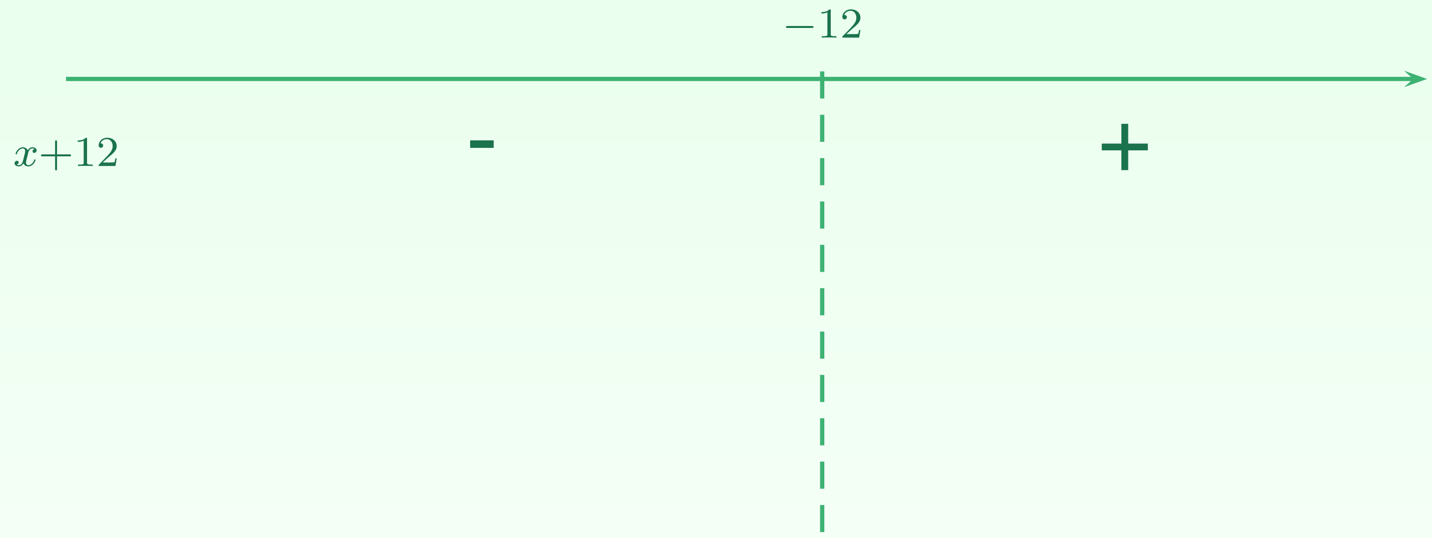


Muut itseisarvoepäyhtälöt

Ratkaistaan käyttämällä itseisarvon määritelmää.

$|x + 12| \leq 3x$

$x + 12 = 0 \Leftrightarrow x = -12$

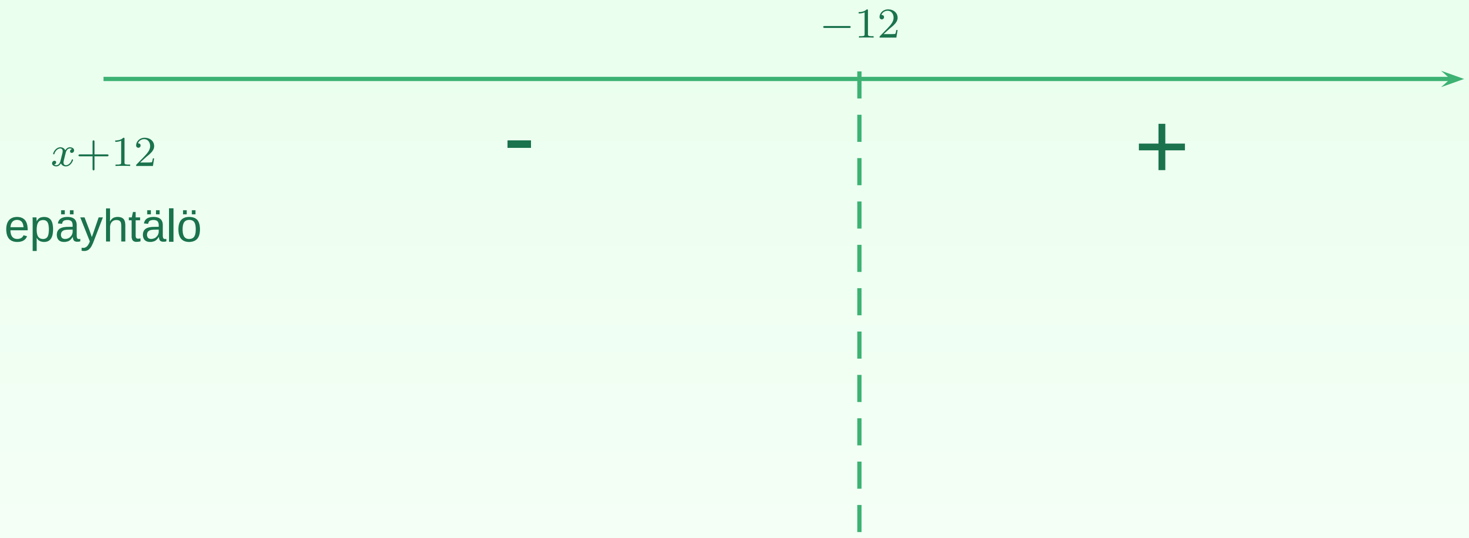


Muut itseisarvoepäyhtälöt

Ratkaistaan käyttämällä itseisarvon määritelmää.

$|x + 12| \leq 3x$

$x + 12 = 0 \Leftrightarrow x = -12$



Muut itseisarvoepäyhtälöt

Ratkaistaan käyttämällä itseisarvon määritelmää.

$|x + 12| \leq 3x$

$x + 12 = 0 \Leftrightarrow x = -12$

		-12	
$x+12$	-		+
epäyhtälö	$-x-12 \leq 3x$		

Muut itseisarvoepäyhtälöt

Ratkaistaan käyttämällä itseisarvon määritelmää.

$|x + 12| \leq 3x$

$x + 12 = 0 \Leftrightarrow x = -12$

-12

$x+12$ - +

epäyhtälö $-x-12 \leq 3x$ $x+12 \leq 3x$

Muut itseisarvoepäyhtälöt

Ratkaistaan käyttämällä itseisarvon määritelmää.

$$|x + 12| \leq 3x$$

$$x + 12 = 0 \Leftrightarrow x = -12$$

-12

$x{+}12$	-	+
epäyhtälö	$-x{-}12{\leq}3x$	$x{+}12{\leq}3x$
	$-4x{\leq}12$	

Muut itseisarvoepäyhtälöt

Ratkaistaan käyttämällä itseisarvon määritelmää.

$|x + 12| \leq 3x$

$x + 12 = 0 \Leftrightarrow x = -12$

		-12	
$x+12$	-		+
epäyhtälö	$-x-12 \leq 3x$ $-4x \leq 12$ $x \geq -3$		$x+12 \leq 3x$

Muut itseisarvoepäyhtälöt

Ratkaistaan käyttämällä itseisarvon määritelmää.

$|x + 12| \leq 3x$

$x + 12 = 0 \Leftrightarrow x = -12$

		-12	
$x+12$	-		+
epäyhtälö	$-x-12 \leq 3x$		$x+12 \leq 3x$
	$-4x \leq 12$		$-2x \leq -12$
	$x \geq -3$		

Muut itseisarvoepäyhtälöt

Ratkaistaan käyttämällä itseisarvon määritelmää.

$|x+12| \leq 3x$

$x + 12 = 0 \Leftrightarrow x = -12$

		-12	
$x+12$	-		+
epäyhtälö	$-x-12 \leq 3x$		$x+12 \leq 3x$
	$-4x \leq 12$		$-2x \leq -12$
	$x \geq -3$		$x \geq 6$

Muut itseisarvoepäyhtälöt

Ratkaistaan käyttämällä itseisarvon määritelmää.

$|x + 12| \leq 3x$

$x + 12 = 0 \Leftrightarrow x = -12$

	$x < -12$	-12	$x > -12$
$x+12$	-		+
epäyhtälö	$-x-12 \leq 3x$		$x+12 \leq 3x$
	$-4x \leq 12$		$-2x \leq -12$
	$x \geq -3$		$x \geq 6$
	Ei ratkaisuja		

Muut itseisarvoepäyhtälöt

Ratkaistaan käyttämällä itseisarvon määritelmää.

$|x + 12| \leq 3x$

$x + 12 = 0 \Leftrightarrow x = -12$

		-12	
$x+12$	-		+
epäyhtälö	$-x-12 \leq 3x$		$x+12 \leq 3x$
	$-4x \leq 12$		$-2x \leq -12$
	$x \geq -3$		$x \geq 6$
	Ei ratkaisuja		

Vastaus: $x \geq 6$