

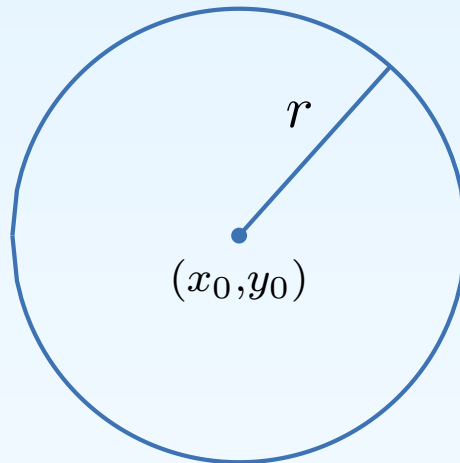
Ympyrä

Hannu Lehto
Lahden Lyseon lukio



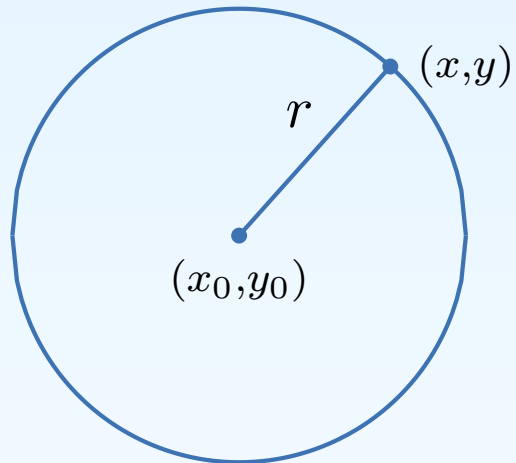
Keskipistemuoto

- Keskipistemuoto
- Normaalimuoto
- Tangentti
- Suoran ja ympyrän leikkauspisteet
- Kahden ympyrän leikkauspisteet



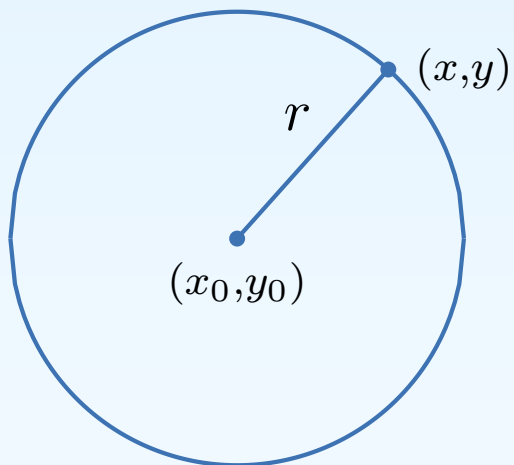
Keskipistemuoto

- Keskipistemuoto
- Normaalimuoto
- Tangentti
- Suoran ja ympyrän leikkauspisteet
- Kahden ympyrän leikkauspisteet



Keskipistemuoto

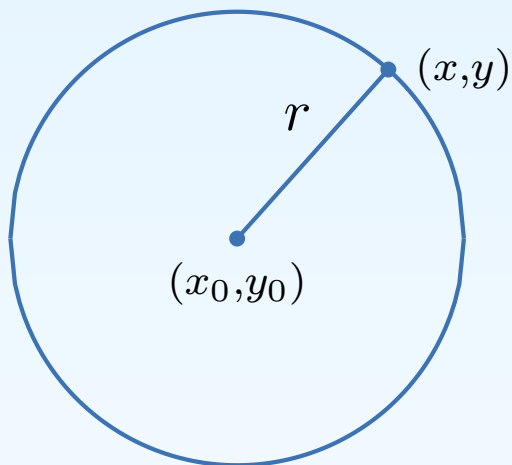
- Keskipistemuoto
- Normaalimuoto
- Tangentti
- Suoran ja ympyrän leikkauspisteet
- Kahden ympyrän leikkauspisteet



$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r$$

Keskipistemuoto

- Keskipistemuoto
- Normaalimuoto
- Tangentti
- Suoran ja ympyrän leikkauspisteet
- Kahden ympyrän leikkauspisteet



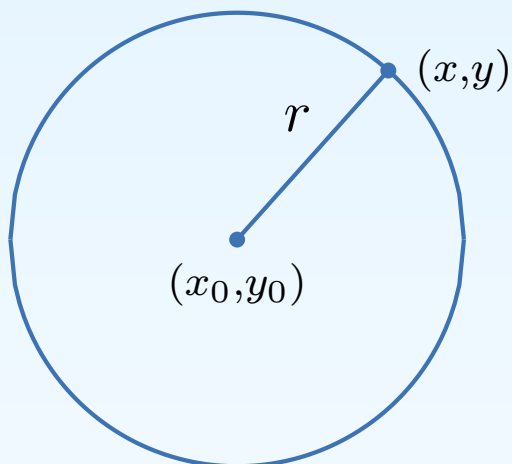
$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r$$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

Keskipistemuoto

Keskipistemuoto

- Keskipistemuoto
- Normaalimuoto
- Tangentti
- Suoran ja ympyrän leikkauspisteet
- Kahden ympyrän leikkauspisteet



$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r$$

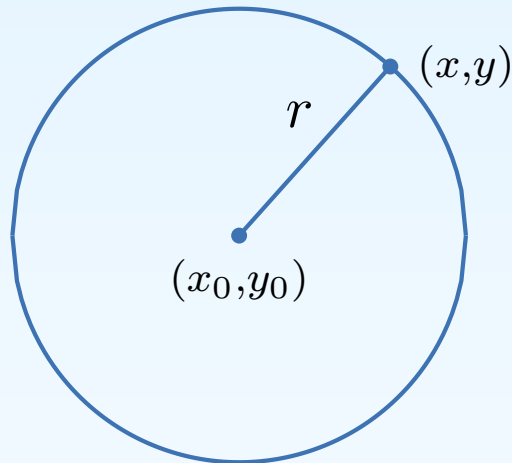
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

Keskipistemuoto

Esimerkki. Mikä on sen ympyrän yhtälö, jonka keskipiste on $(1, -2)$ ja säde 3?

Keskipistemuoto

- Keskipistemuoto
- Normaalimuoto
- Tangentti
- Suoran ja ympyrän leikkauspisteet
- Kahden ympyrän leikkauspisteet



$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r$$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

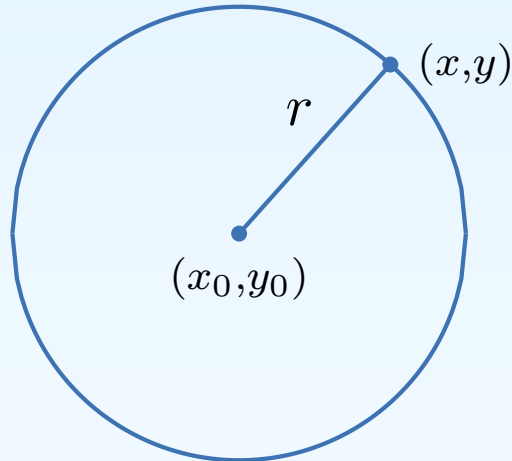
Keskipistemuoto

Esimerkki. Mikä on sen ympyrän yhtälö, jonka keskipiste on $(1, -2)$ ja säde 3?

$$(x - 1)^2 + (y - (-2))^2 = 3^2$$

Keskipistemuoto

- Keskipistemuoto
- Normaalimuoto
- Tangentti
- Suoran ja ympyrän leikkauspisteet
- Kahden ympyrän leikkauspisteet



$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r$$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

Keskipistemuoto

Esimerkki. Mikä on sen ympyrän yhtälö, jonka keskipiste on $(1, -2)$ ja säde 3?

$$(x - 1)^2 + (y - (-2))^2 = 3^2$$

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$$

Esimerkki

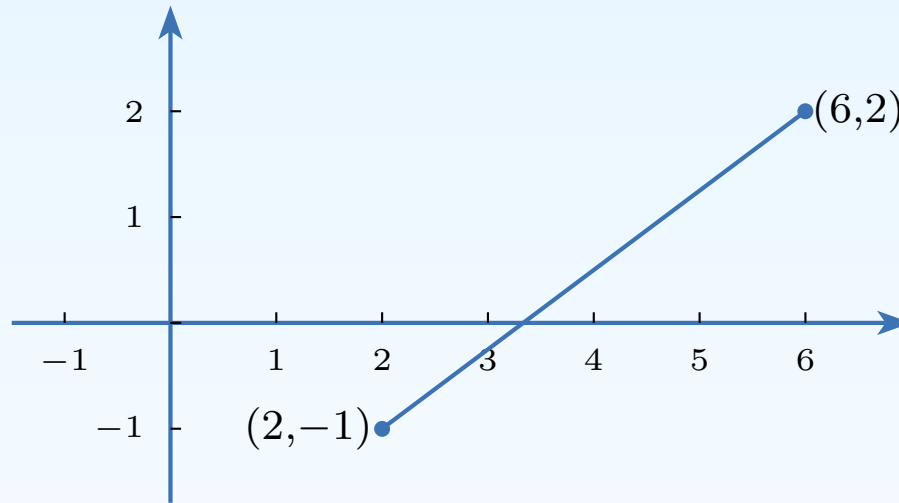
- Keskipistemuoto
- Normaalimuoto
- Tangentti
- Suoran ja ympyrän leikkauspisteet
- Kahden ympyrän leikkauspisteet

Janan päätepisteet ovat $(2, -1)$ ja $(6, 2)$. Mikä on sen ympyrän yhtälö, jonka kalkaisijana jana on?

Esimerkki

- Keskipistemuoto
- Normaalimuoto
- Tangentti
- Suoran ja ympyrän leikkauspisteet
- Kahden ympyrän leikkauspisteet

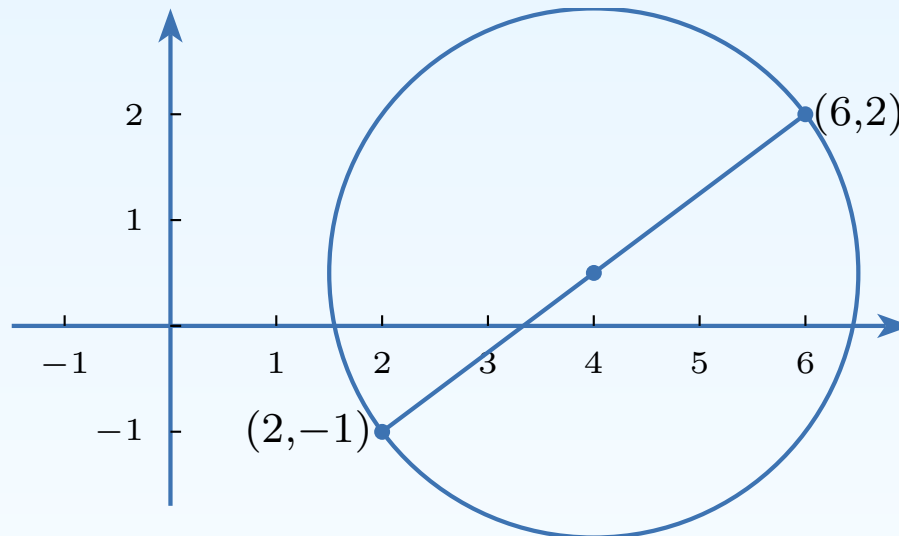
Janan päätepisteet ovat $(2, -1)$ ja $(6, 2)$. Mikä on sen ympyrän yhtälö, jonka kalkaisijana jana on?



Esimerkki

- Keskipistemuoto
- Normaalimuoto
- Tangentti
- Suoran ja ympyrän leikkauspisteet
- Kahden ympyrän leikkauspisteet

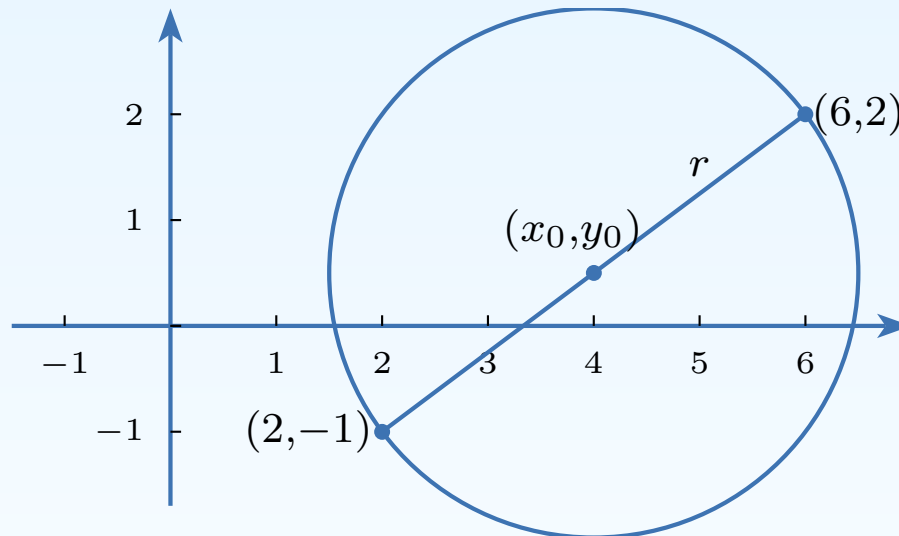
Janan päätepisteet ovat $(2, -1)$ ja $(6, 2)$. Mikä on sen ympyrän yhtälö, jonka kalkaisijana jana on?



Esimerkki

- Keskipistemuoto
- Normaalimuoto
- Tangentti
- Suoran ja ympyrän leikkauspisteet
- Kahden ympyrän leikkauspisteet

Janan päätepisteet ovat $(2, -1)$ ja $(6, 2)$. Mikä on sen ympyrän yhtälö, jonka kalkaisijana jana on?



Esimerkki

- Keskipistemuoto
- Normaalimuoto
- Tangentti
- Suoran ja ympyrän leikkauspisteet
- Kahden ympyrän leikkauspisteet

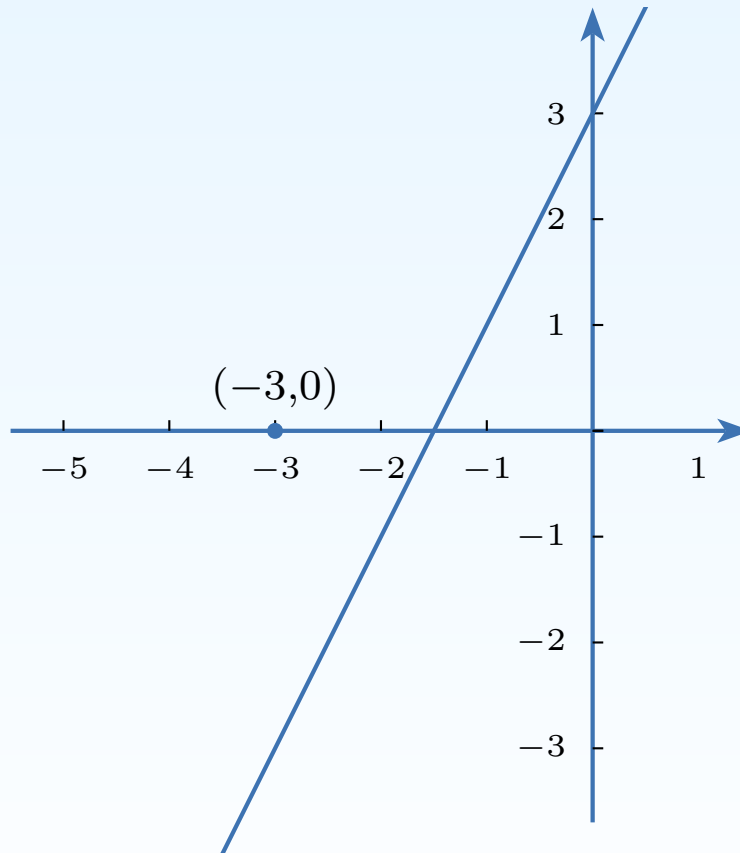
Ympyrän keskipiste on $(-3, 0)$ ja se sivuaa suoraa $2x - y + 3 = 0$.

Mikä on ympyrän yhtälö?

Esimerkki

- Keskipistemuoto
- Normaalimuoto
- Tangentti
- Suoran ja ympyrän leikkauspisteet
- Kahden ympyrän leikkauspisteet

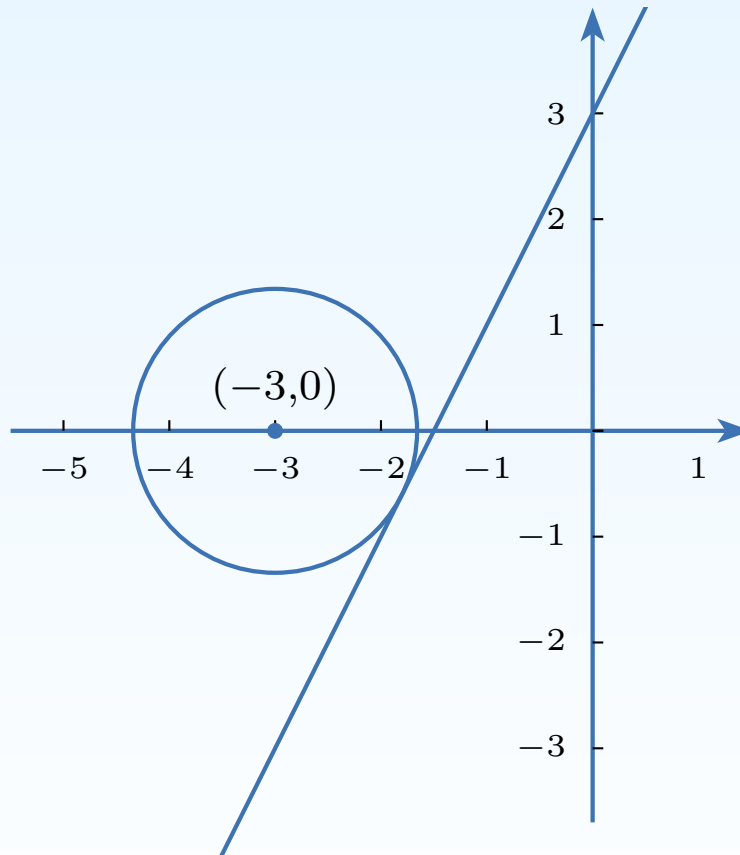
Ympyrän keskipiste on $(-3, 0)$ ja se sivuaa suoraa $2x - y + 3 = 0$.
Mikä on ympyrän yhtälö?



Esimerkki

- Keskipistemuoto
- Normaalimuoto
- Tangentti
- Suoran ja ympyrän leikkauspisteet
- Kahden ympyrän leikkauspisteet

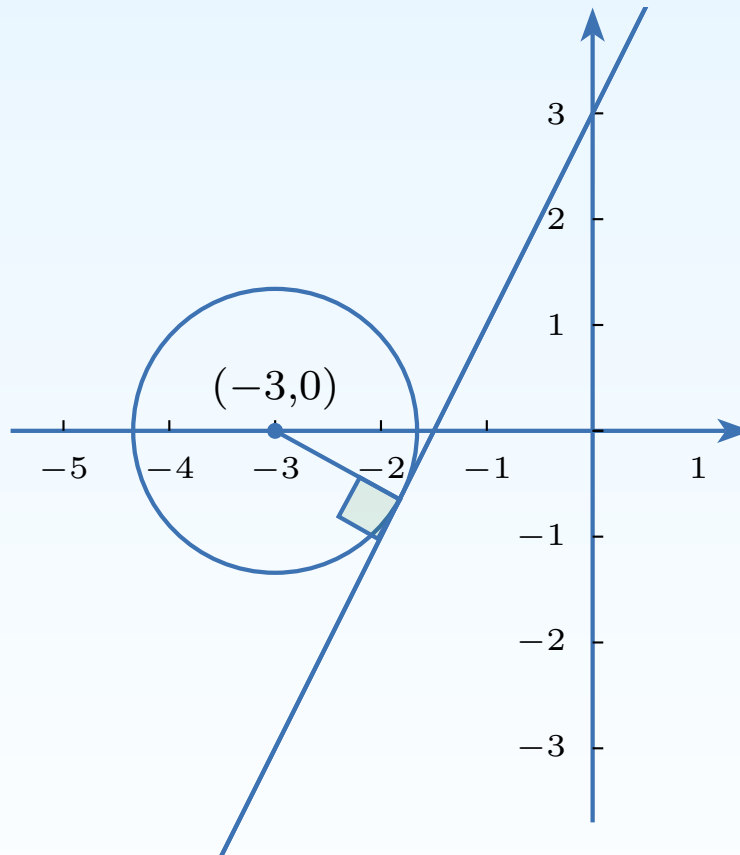
Ympyrän keskipiste on $(-3, 0)$ ja se sivuaa suoraa $2x - y + 3 = 0$.
Mikä on ympyrän yhtälö?



Esimerkki

- Keskipistemuoto
- Normaalimuoto
- Tangentti
- Suoran ja ympyrän leikkauspisteet
- Kahden ympyrän leikkauspisteet

Ympyrän keskipiste on $(-3, 0)$ ja se sivuaa suoraa $2x - y + 3 = 0$.
Mikä on ympyrän yhtälö?



Normaalimuoto

- Keskipistemuoto
- **Normaalimuoto**
- Tangentti
- Suoran ja ympyrän leikkauspisteet
- Kahden ympyrän leikkauspisteet

Ympyrän keskipistemuodossa: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$

Normaalimuoto

- Keskipistemuoto
- **Normaalimuoto**
- Tangentti
- Suoran ja ympyrän leikkauspisteet
- Kahden ympyrän leikkauspisteet

Ympyrän keskipistemuodossa: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$$

Normaalimuoto

- Keskipistemuoto
- **Normaalimuoto**
- Tangentti
- Suoran ja ympyrän leikkauspisteet
- Kahden ympyrän leikkauspisteet

Ympyrän keskipistemuodossa: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$$

$$x^2 - 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2 +$$

Normaalimuoto

- Keskipistemuoto
- **Normaalimuoto**
- Tangentti
- Suoran ja ympyrän leikkauspisteet
- Kahden ympyrän leikkauspisteet

Ympyrän keskipistemuodossa: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$$

$$x^2 - 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2 + y^2 + 2 \cdot y \cdot 2 + 2^2 = 9$$

Normaalimuoto

- Keskipistemuoto
- **Normaalimuoto**
- Tangentti
- Suoran ja ympyrän leikkauspisteet
- Kahden ympyrän leikkauspisteet

Ympyrän keskipistemuodossa: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$$

$$x^2 - 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2 + y^2 + 2 \cdot y \cdot 2 + 2^2 = 9$$

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$$

Normaalimuoto

- Keskipistemuoto
- **Normaalimuoto**
- Tangentti
- Suoran ja ympyrän leikkauspisteet
- Kahden ympyrän leikkauspisteet

Ympyrän keskipistemuodossa: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$$

$$x^2 - 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2 + y^2 + 2 \cdot y \cdot 2 + 2^2 = 9$$

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$$

Ympyrän yhtälö normaalimuodossa: $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

Normaalimuoto

- Keskipistemuoto
- **Normaalimuoto**
- Tangentti
- Suoran ja ympyrän leikkauspisteet
- Kahden ympyrän leikkauspisteet

Ympyrän keskipistemuodossa: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$$

$$x^2 - 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2 + y^2 + 2 \cdot y \cdot 2 + 2^2 = 9$$

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$$

Ympyrän yhtälö normaalimuodossa: $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

$$x^2 + y^2 + 6x - 3y - 5 = 0$$

Normaalimuoto

- Keskipistemuoto
- **Normaalimuoto**
- Tangentti
- Suoran ja ympyrän leikkauspisteet
- Kahden ympyrän leikkauspisteet

Ympyrän keskipistemuodossa: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$$

$$x^2 - 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2 + y^2 + 2 \cdot y \cdot 2 + 2^2 = 9$$

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$$

Ympyrän yhtälö normaalimuodossa: $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

$$x^2 + y^2 + 6x - 3y - 5 = 0$$

$$x^2 + 6x + \bigcirc + y^2 - 3y + \bigcirc = 5$$

Normaalimuoto

- Keskipistemuoto
- **Normaalimuoto**
- Tangentti
- Suoran ja ympyrän leikkauspisteet
- Kahden ympyrän leikkauspisteet

Ympyrän keskipistemuodossa: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$$

$$x^2 - 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2 + y^2 + 2 \cdot y \cdot 2 + 2^2 = 9$$

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$$

Ympyrän yhtälö normaalimuodossa: $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

$$x^2 + y^2 + 6x - 3y - 5 = 0$$

$$\underbrace{x^2 + 6x + \bigcirc}_{(x + \bigcirc)^2} + \underbrace{y^2 - 3y + \bigcirc}_{(y - \bigcirc)^2} = 5$$

Normaalimuoto

- Keskipistemuoto
- **Normaalimuoto**
- Tangentti
- Suoran ja ympyrän leikkauspisteet
- Kahden ympyrän leikkauspisteet

Ympyrän keskipistemuodossa: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$$

$$x^2 - 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2 + y^2 + 2 \cdot y \cdot 2 + 2^2 = 9$$

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$$

Ympyrän yhtälö normaalimuodossa: $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

$$x^2 + y^2 + 6x - 3y - 5 = 0$$

$$\underbrace{x^2 + 6x + \textcircled{3^2}}_{(x + \textcircled{3})^2} + \underbrace{y^2 - 3y + \textcircled{\quad}}_{(y - \textcircled{\quad})^2} = 5$$

Normaalimuoto

- Keskipistemuoto
- **Normaalimuoto**
- Tangentti
- Suoran ja ympyrän leikkauspisteet
- Kahden ympyrän leikkauspisteet

Ympyrän keskipistemuodossa: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$$

$$x^2 - 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2 + y^2 + 2 \cdot y \cdot 2 + 2^2 = 9$$

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$$

Ympyrän yhtälö normaalimuodossa: $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

$$x^2 + y^2 + 6x - 3y - 5 = 0$$

$$\underbrace{x^2 + 6x + \underbrace{3^2}_{\left(x + \underbrace{3}\right)^2}}_{\left(x + \underbrace{3}\right)^2} + \underbrace{y^2 - 3y + \underbrace{\left(\frac{3}{2}\right)^2}_{\left(y - \underbrace{\frac{3}{2}}\right)^2}}_{\left(y - \underbrace{\frac{3}{2}}\right)^2} = 5$$

Normaalimuoto

- Keskipistemuoto
- **Normaalimuoto**
- Tangentti
- Suoran ja ympyrän leikkauspisteet
- Kahden ympyrän leikkauspisteet

Ympyrän keskipistemuodossa: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$$

$$x^2 - 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2 + y^2 + 2 \cdot y \cdot 2 + 2^2 = 9$$

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$$

Ympyrän yhtälö normaalimuodossa: $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

$$x^2 + y^2 + 6x - 3y - 5 = 0$$

$$\underbrace{x^2 + 6x + 3^2}_{\left(x + 3\right)^2} + \underbrace{y^2 - 3y + \left(\frac{3}{2}\right)^2}_{\left(y - \frac{3}{2}\right)^2} = 5 + 3^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

Normaalimuoto

- Keskipistemuoto
- **Normaalimuoto**
- Tangentti
- Suoran ja ympyrän leikkauspisteet
- Kahden ympyrän leikkauspisteet

Ympyrän keskipistemuodossa: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$$

$$x^2 - 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2 + y^2 + 2 \cdot y \cdot 2 + 2^2 = 9$$

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$$

Ympyrän yhtälö normaalimuodossa: $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

$$x^2 + y^2 + 6x - 3y - 5 = 0$$

$$\underbrace{x^2 + 6x + 3^2}_{\left(x + 3\right)^2} + \underbrace{y^2 - 3y + \left(\frac{3}{2}\right)^2}_{\left(y - \frac{3}{2}\right)^2} = 5 + 3^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2$$
$$\left(x + 3\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = 16\frac{1}{4}$$

Normaalimuoto

- Keskipistemuoto
- **Normaalimuoto**
- Tangentti
- Suoran ja ympyrän leikkauspisteet
- Kahden ympyrän leikkauspisteet

Ympyrän keskipistemuodossa: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$$

$$x^2 - 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2 + y^2 + 2 \cdot y \cdot 2 + 2^2 = 9$$

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$$

Ympyrän yhtälö normaalimuodossa: $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

$$x^2 + y^2 + 6x - 3y - 5 = 0$$

$$\underbrace{x^2 + 6x + 3^2}_{\left(x + 3\right)^2} + \underbrace{y^2 - 3y + \left(\frac{3}{2}\right)^2}_{\left(y - \frac{3}{2}\right)^2} = 5 + 3^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$\left(x + 3\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = 16\frac{1}{4}$$

Keskipiste on $\left(-3, \frac{3}{2}\right)$ ja säde $\sqrt{16\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{65}{4}} = \frac{\sqrt{65}}{2}$.

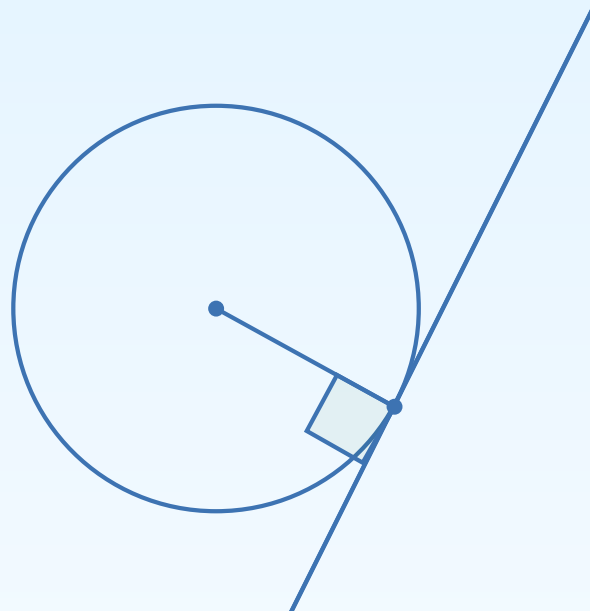
Esimerkki

- Keskipistemuoto
- **Normaalimuoto**
- Tangentti
- Suoran ja ympyrän leikkauspisteet
- Kahden ympyrän leikkauspisteet

Millä parametrin a arvoilla yhtälö $x^2 + y^2 - 4x + 10y + a + 1 = 0$ esittää ympyrää?

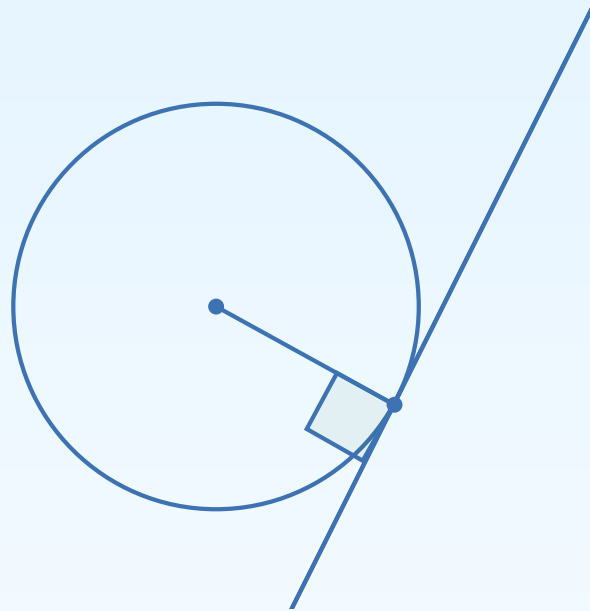
Tangentti

- Keskipistemuoto
- Normaalimuoto
- **Tangentti**
- Suoran ja ympyrän leikkauspisteet
- Kahden ympyrän leikkauspisteet



Tangentti

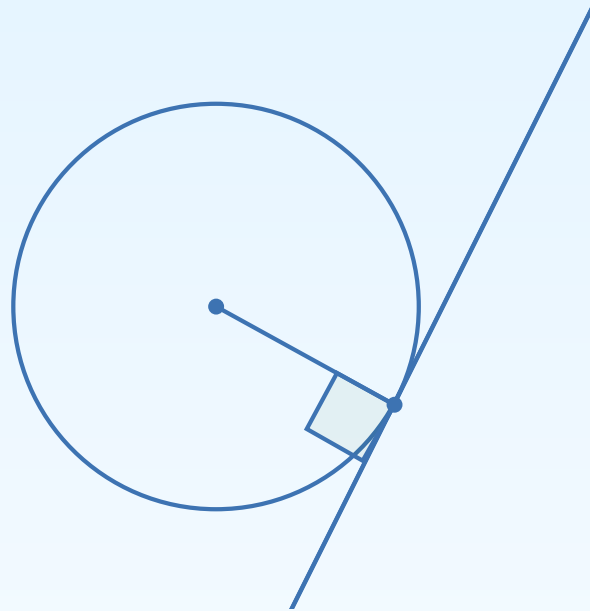
- Keskipistemuoto
- Normaalimuoto
- **Tangentti**
- Suoran ja ympyrän leikkauspisteet
- Kahden ympyrän leikkauspisteet



1. Keskipisteen etäisyys tangentista on säde.

Tangentti

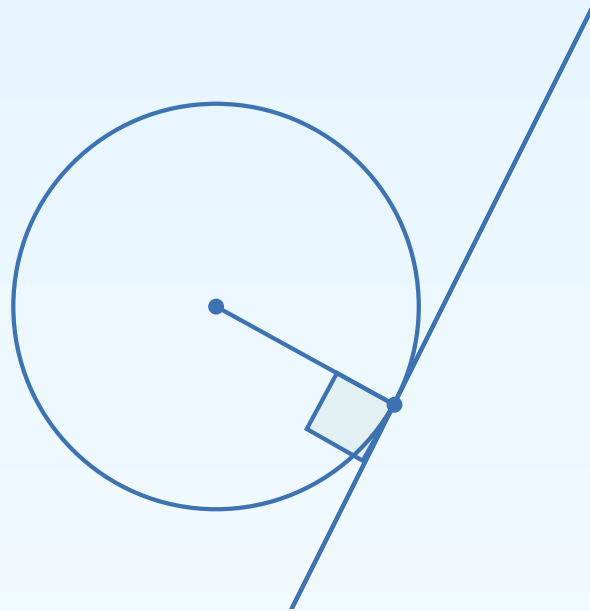
- Keskipistemuoto
- Normaalimuoto
- **Tangentti**
- Suoran ja ympyrän leikkauspisteet
- Kahden ympyrän leikkauspisteet



1. Keskipisteen etäisyys tangentista on säde.
2. Ympyrällä ja tangentilla on yksi yhteinen piste.

Tangentti

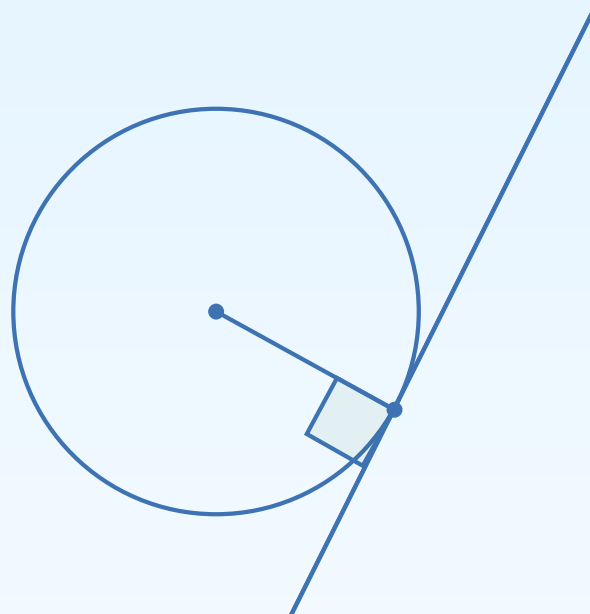
- Keskipistemuoto
- Normaalimuoto
- **Tangentti**
- Suoran ja ympyrän leikkauspisteet
- Kahden ympyrän leikkauspisteet



1. Keskipisteen etäisyys tangentista on säde.
2. Ympyrällä ja tangentilla on yksi yhteinen piste.
3. Tangentti on kohtisuorassa sivuamispisteeseen piirrettyä sädettä vastaan.

Tangentti

- Keskipistemuoto
- Normaalimuoto
- **Tangentti**
- Suoran ja ympyrän leikkauspisteet
- Kahden ympyrän leikkauspisteet



1. Keskipisteen etäisyys tangentista on säde.
2. Ympyrällä ja tangentilla on yksi yhteinen piste.
3. Tangentti on kohtisuorassa sivuamispisteeseen piirrettyä sädettä vastaan.

Esimerkki. Onko suora $y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$ ympyrän $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$ tangentti?

Esimerkki

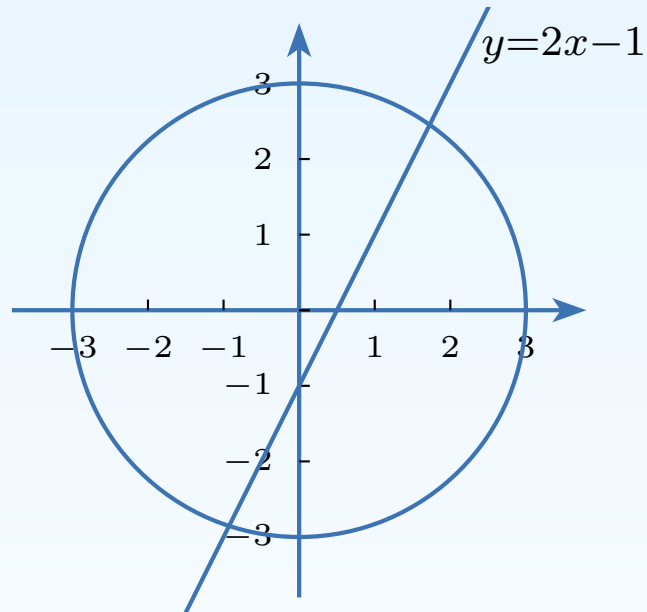
- Keskipistemuoto
- Normaalimuoto
- **Tangentti**
- Suoran ja ympyrän leikkauspisteet
- Kahden ympyrän leikkauspisteet

Määritä niiden ympyrän $x^2 + y^2 = 9$ tangenttien yhtälöt, jotka ovat suoran $y = 2x - 1$ suuntaiset.

Esimerkki

- Keskipistemuoto
- Normaalimuoto
- **Tangentti**
- Suoran ja ympyrän leikkauspisteet
- Kahden ympyrän leikkauspisteet

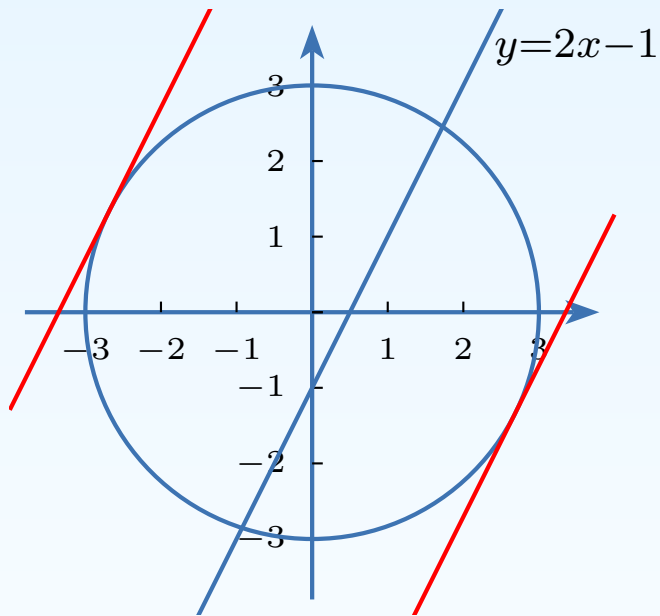
Määritä niiden ympyrän $x^2 + y^2 = 9$ tangenttien yhtälöt, jotka ovat suoran $y = 2x - 1$ suuntaiset.



Esimerkki

- Keskipistemuoto
- Normaalimuoto
- **Tangentti**
- Suoran ja ympyrän leikkauspisteet
- Kahden ympyrän leikkauspisteet

Määritä niiden ympyrän $x^2 + y^2 = 9$ tangenttien yhtälöt, jotka ovat suoran $y = 2x - 1$ suuntaiset.

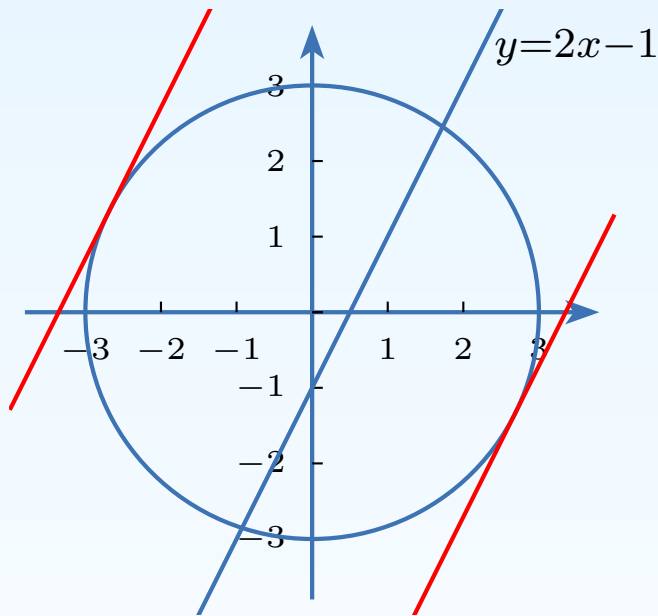


Tapa 1. Keskipisteen etäisyys tangentista on säde.

Esimerkki

- Keskipistemuoto
- Normaalimuoto
- **Tangentti**
- Suoran ja ympyrän leikkauspisteet
- Kahden ympyrän leikkauspisteet

Määritä niiden ympyrän $x^2 + y^2 = 9$ tangenttien yhtälöt, jotka ovat suoran $y = 2x - 1$ suuntaiset.



Tapa 1. Keskipisteen etäisyys tangentista on säde.

Tapa 2. Tangentilla ja ympyrällä on täsmälleen yksi yhteinen piste.

Suoran ja ympyrän leikkauspisteet

- Keskipistemuoto
- Normaalimuoto
- Tangentti
- Suoran ja ympyrän leikkauspisteet
- Kahden ympyrän leikkauspisteet

Suoralla ja ympyrällä voi olla kaksi, yksi tai ei yhtään leikkauspistettä.

Suoran ja ympyrän leikkauspisteet

- Keskipistemuoto
- Normaalimuoto
- Tangentti
- Suoran ja ympyrän leikkauspisteet
- Kahden ympyrän leikkauspisteet

Suoralla ja ympyrällä voi olla kaksi, yksi tai ei yhtään leikkauspistettä.

Esimerkki. Määritä suoran $x - y = -2$ ja ympyrän $x^2 + y^2 = 9$ leikkauspisteet.

Suoran ja ympyrän leikkauspisteet

- Keskipistemuoto
- Normaalimuoto
- Tangentti
- Suoran ja ympyrän leikkauspisteet
- Kahden ympyrän leikkauspisteet

Suoralla ja ympyrällä voi olla kaksi, yksi tai ei yhtään leikkauspistettä.

Esimerkki. Määritä suoran $x - y = -2$ ja ympyrän $x^2 + y^2 = 9$ leikkauspisteet.

$$\begin{cases} x - y = -2 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$$

Suoran ja ympyrän leikkauspisteet

- Keskipistemuoto
- Normaalimuoto
- Tangentti
- Suoran ja ympyrän leikkauspisteet
- Kahden ympyrän leikkauspisteet

Suoralla ja ympyrällä voi olla kaksi, yksi tai ei yhtään leikkauspistettä.

Esimerkki. Määritä suoran $x - y = -2$ ja ympyrän $x^2 + y^2 = 9$ leikkauspisteet.

$$\begin{cases} x - y = -2 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$$

Ratkaisuperiaate: Ratkaise suoran yhtälöstä toinen muuttuja ja sijoita se ympyrän yhtälöön.

Kahden ympyrän leikkauspisteet

- Keskipistemuoto
- Normaalimuoto
- Tangentti
- Suoran ja ympyrän leikkauspisteet
- **Kahden ympyrän leikkauspisteet**

Esimerkki. Määritä ympyröiden $x^2 + y^2 + 2x - 5 = 0$ ja $x^2 + y^2 + x + y - 4 = 0$ leikkauspisteet.

Kahden ympyrän leikkauspisteet

- Keskipistemuoto
- Normaalimuoto
- Tangentti
- Suoran ja ympyrän leikkauspisteet
- **Kahden ympyrän leikkauspisteet**

Esimerkki. Määritä ympyröiden $x^2 + y^2 + 2x - 5 = 0$ ja $x^2 + y^2 + x + y - 4 = 0$ leikkauspisteet.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 5 = 0 \\ x^2 + y^2 + x + y - 4 = 0 \end{cases}$$

Kahden ympyrän leikkauspisteet

- Keskipistemuoto
- Normaalimuoto
- Tangentti
- Suoran ja ympyrän leikkauspisteet
- Kahden ympyrän leikkauspisteet

Esimerkki. Määritä ympyröiden $x^2 + y^2 + 2x - 5 = 0$ ja $x^2 + y^2 + x + y - 4 = 0$ leikkauspisteet.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 5 = 0 \\ x^2 + y^2 + x + y - 4 = 0 \end{cases}$$

Ratkaisuperiaate: Eliminoidaan muuttujien toisen asteen termit yhteenlaskukeinolla.