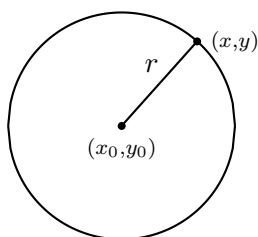


Ympyrä

Hannu Lehto
Lahden Lyseon lukio

Keskipistemuoto	2
Normaalimuoto	5
Tangentti	7
Suoran ja ympyrän leikkauspisteet	9
Kahden ympyrän leikkauspisteet	10

Keskipistemuoto



$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r$$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

Keskipistemuoto

Esimerkki. Mikä on sen ympyrän yhtälö, jonka keskipiste on $(1, -2)$ ja säde 3?

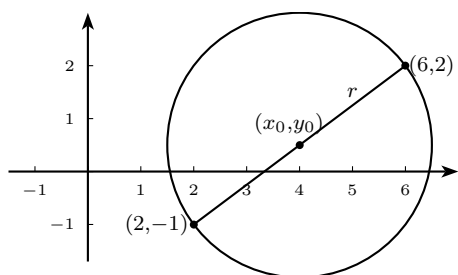
$$(x - 1)^2 + (y - (-2))^2 = 3^2$$

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$$

2 / 10

Esimerkki

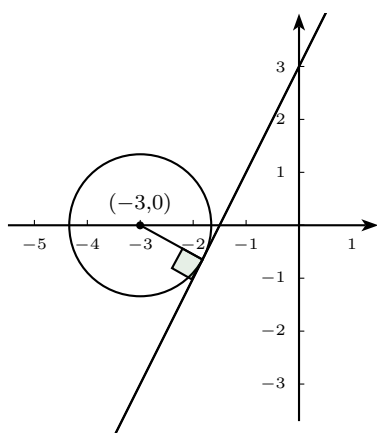
Janan päätepisteet ovat $(2, -1)$ ja $(6, 2)$. Mikä on sen ympyrän yhtälö, jonka halkaisijana jana on?



3 / 10

Esimerkki

Ympyrän keskipiste on $(-3, 0)$ ja se sivuaa suoraa $2x - y + 3 = 0$. Mikä on ympyrän yhtälö?



4 / 10

Normaalimuoto

Ympyrän keskipistemuodossa: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$$

$$x^2 - 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2 + y^2 + 2 \cdot y \cdot 2 + 2^2 = 9$$

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$$

Ympyrän yhtälö normaalimuodossa: $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

$$x^2 + y^2 + 6x - 3y - 5 = 0$$

$$\underbrace{x^2 + 6x + \underbrace{3^2}_{\left(\frac{3}{2}\right)^2}}_{\left(x + \underbrace{3}_{\left(\frac{3}{2}\right)^2}\right)^2} + \underbrace{y^2 - 3y + \underbrace{\left(\frac{3}{2}\right)^2}_{\left(\frac{3}{2}\right)^2}}_{\left(y - \frac{3}{2}\right)^2} = 5 + \underbrace{3^2}_{\left(\frac{3}{2}\right)^2} + \underbrace{\left(\frac{3}{2}\right)^2}_{\left(\frac{3}{2}\right)^2}$$

$$(x + 3)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = 16\frac{1}{4}$$

Keskipiste on $(-3, \frac{3}{2})$ ja säde $\sqrt{16\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{65}{4}} = \frac{\sqrt{65}}{2}$.

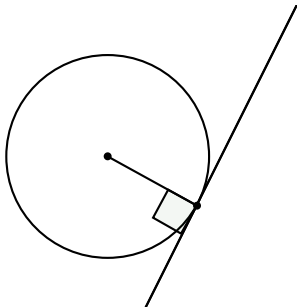
5 / 10

Esimerkki

Millä parametrin a arvoilla yhtälö $x^2 + y^2 - 4x + 10y + a + 1 = 0$ esittää ympyrää?

6 / 10

Tangentti



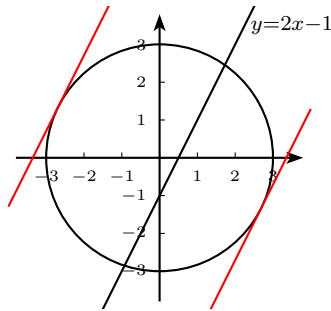
1. Keskipisteen etäisyys tangentista on säde.
2. Ympyrällä ja tangentilla on yksi yhteinen piste.
3. Tangentti on kohtisuorassa sivuamispisteesen piirrettyä sädettä vastaan.

Esimerkki. Onko suora $y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$ ympyrän $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$ tangentti?

7 / 10

Esimerkki

Määritä niiden ympyrän $x^2 + y^2 = 9$ tangenttien yhtälöt, jotka ovat suoran $y = 2x - 1$ suuntaiset.



Tapa 1. Keskipisteen etäisyys tangentista on säde.

Tapa 2. Tangentilla ja ympyrällä on täsmälleen yksi yhteinen piste.

8 / 10

Suoran ja ympyrän leikkauspisteet

Suoralla ja ympyrällä voi olla kaksi, yksi tai ei yhtään leikkauspistettä.

Esimerkki. Määritä suoran $x - y = -2$ ja ympyrän $x^2 + y^2 = 9$ leikkauspisteet.

$$\begin{cases} x - y = -2 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$$

Ratkaisuperiaate: Ratkaise suoran yhtälöstä toinen muuttuja ja sijoita se ympyrän yhtälöön.

9 / 10

Kahden ympyrän leikkauspisteet

Esimerkki. Määritä ympyröiden $x^2 + y^2 + 2x - 5 = 0$ ja $x^2 + y^2 + x + y - 4 = 0$ leikkauspisteet.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 5 = 0 \\ x^2 + y^2 + x + y - 4 = 0 \end{cases}$$

Ratkaisuperiaate: Eliminoidaan muuttujien toisen asteen termit yhteenlaskukeinolla.

10 / 10