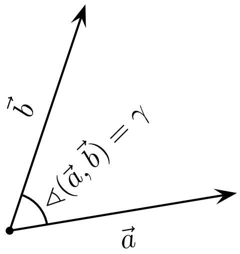
Skalaaritulo

Hannu Lehto
Lahden Lyseon lukio

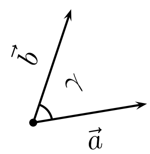
Vektoreiden välinen kulma



- Vektoreilla on oltava sama alkupiste.
- $0^\circ \leq \gamma \leq 180^\circ$

Skalaaritulo (pistetulo)

Määritelmä 1. Vektoreiden $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ $(\neq \vec{0})$ *skalaaritulo* on



$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos \gamma}$$

Jos $\vec{a} = \vec{0}$ tai $\vec{b} = \vec{0}$, niin $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Esimerkki. Olkoon $|\vec{a}| = 2$ ja $|\vec{b}| = 5$. Laske pistetulo $\vec{a} \cdot \vec{b}$, kun

a) $\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = 30^\circ$,
b) $\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = 135^\circ$,
a) $\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = 90^\circ$.

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 5 \cos 30^\circ = 10\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$

b) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 5 \cos 135^\circ = 10\dfrac{-1}{\sqrt{2}} = \dfrac{-10}{\sqrt{2}} = -5\sqrt{2}$

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 5 \cos 90^\circ = 10 \cdot 0 = 0$

Skalaaritulo xyz-koordinaatistossa

Lause 1. *Olkoon* $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ *ja* $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$. *Silloin on*

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}$$

Esimerkki. Olkoon $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$ ja $\vec{b} = \vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$. Laske $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + (-4) \cdot 5 = -9$

Laskulait

Lause 2.

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ *(vaihdantalaki)*
- $\vec{a} \cdot \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ *(osittelulaki)*
- $r(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (r\vec{a})\vec{b} = \vec{a}(r\vec{b})$ *(skalaarin siirto)*

5 / 8

Vektorin pituus

Lause 3. $\boxed{\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 .}$

Todistus. Jos $\vec{a} \neq \vec{0}$, niin $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|\,|\vec{a}| \cos 0° = |\vec{a}|\,|\vec{a}| = |\vec{a}|^2$.
Jos $\vec{a} = \vec{0}$, niin $\vec{a} \cdot \vec{a} = 0$ ja $|\vec{a}| = 0$, joten myös $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$. □

Esimerkki. Olkoon $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 5$ ja $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = 60°$. Laske $\left|\vec{a} + 3\vec{b}\right|$.

$\left|\vec{a} + 3\vec{b}\right|^2 = \left(\vec{a} + 3\vec{b}\right) \cdot \left(\vec{a} + 3\vec{b}\right) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot 3\vec{b} + 3\vec{b} \cdot \vec{a} + 3\vec{b} \cdot 3\vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{a} + 3\vec{a} \cdot \vec{b} + 3\vec{a} \cdot \vec{b} + 9\vec{b} \cdot \vec{b} =$
$\vec{a} \cdot \vec{a} + 6\vec{a} \cdot \vec{b} + 9\vec{b} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 + 6|\vec{a}||\vec{b}| \cos 60° + 9|\vec{b}|^2 = 2^2 + 6 \cdot 2 \cdot 5 \cdot \dfrac{1}{2} + 9 \cdot 5^2 = 259$
Täten $\left|\vec{a} + 3\vec{b}\right| = \sqrt{259}$.

6 / 8

Vektoreiden kohtisuoruus

Lause 4. $\boxed{\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0, \quad (\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0})}$

Todistus.

$$\begin{array}{rrcl} & \vec{a} \cdot \vec{b} & = & 0 \\ \Leftrightarrow & |\vec{a}||\vec{b}| \cos\left(\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})\right) & = & 0 \\ \Leftrightarrow & \cos\left(\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})\right) & = & 0 \\ \Leftrightarrow & \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) & = & 90° \\ \Leftrightarrow & \vec{a} \perp \vec{b} & & \end{array}$$

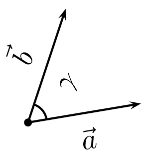
□

Esimerkki. Millä vakion s arvoilla vektorit $\vec{a} = -\vec{i} - s\vec{j} + \vec{k}$ ja $\vec{b} = 3\vec{i} - s\vec{j} - 2s\vec{k}$ ovat kohtisuorassa?

7 / 8

Vektoreiden välinen kulma

$$\boxed{\cos\gamma = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} \qquad (\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0})}$$



Esimerkki. Laske vektoreiden $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ ja $\vec{b} = 5\vec{i} + 7\vec{j}$ välinen kulma. Ilmoita vastaus 0,1°:een tarkkuudella.

8 / 8