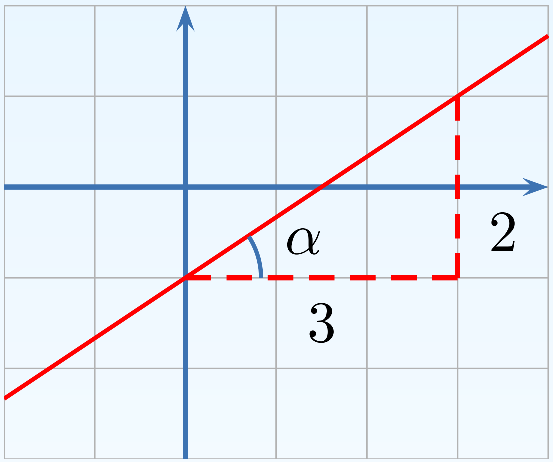
Suora

Hannu Lehto
Lahden Lyseon lukio

I: Suora tasossa

Esimerkki

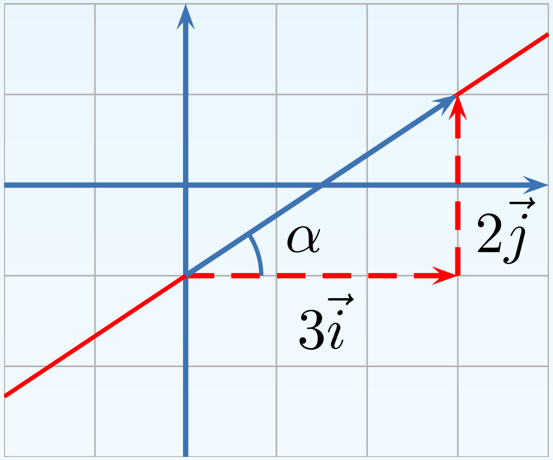
Tarkastellaan suoraa $y = \frac{2}{3}x - 1$.



- kulmakerroin $k = \frac{2}{3}$
- $\tan\alpha = \frac{2}{3}$, α suuntakulma

Esimerkki

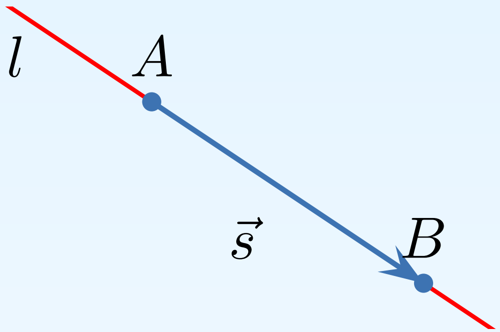
Tarkastellaan suoraa $y = \frac{2}{3}x - 1$.



- kulmakerroin $k = \frac{2}{3}$
- $\tan\alpha = \frac{2}{3}$, α suuntakulma
- eräs *suuntavektori* $\vec{s} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$

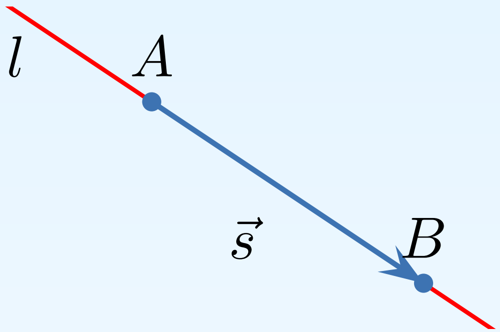
Suuntavektori

Määritelmä 1. Olkoot pisteet A ja B kaksi suoran l eri pistettä. Silloin $\vec{s} = \overrightarrow{AB}$ on suoran l eräs suuntavektori.



Suuntavektori

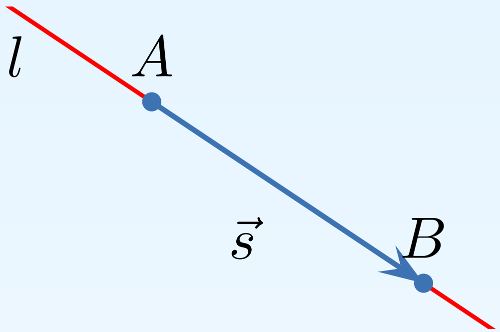
Määritelmä 1. Olkoot pisteet A ja B kaksi suoran l eri pistettä. Silloin $\vec{s} = \overrightarrow{AB}$ on suoran l eräs suuntavektori.



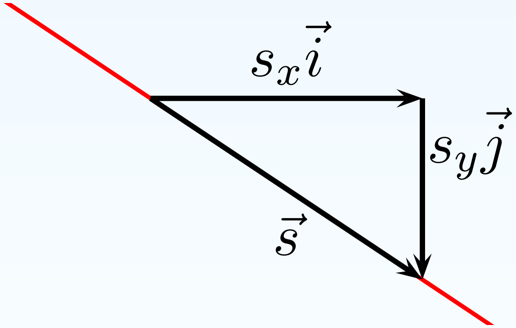
Lause 1. *Jos $\vec{s} = s_x\vec{i} + s_y\vec{j},\ s_x \neq \vec{0}$ on eräs suoran suuntavektori, niin suoran kulmakerroin on $k = \dfrac{s_y}{s_x}$.*

Suuntavektori

Määritelmä 1. Olkoot pisteet A ja B kaksi suoran l eri pistettä. Silloin $\vec{s} = \overrightarrow{AB}$ on suoran l eräs suuntavektori.

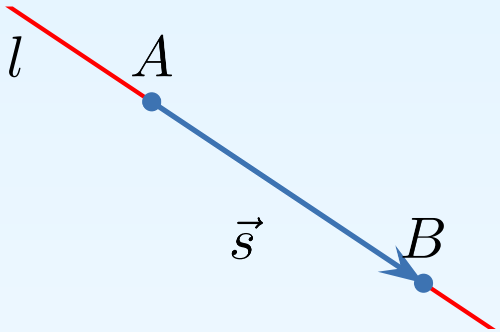


Lause 1. *Jos $\vec{s} = s_x\vec{i} + s_y\vec{j},\ s_x \neq \vec{0}$ on eräs suoran suuntavektori, niin suoran kulmakerroin on $k = \dfrac{s_y}{s_x}$.*

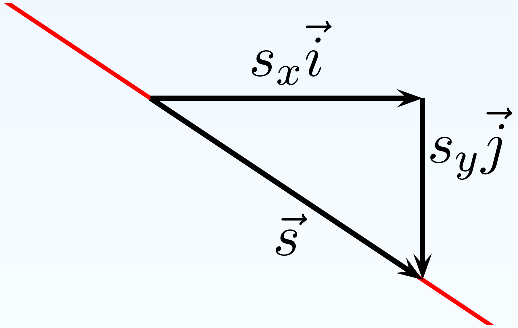


Suuntavektori

Määritelmä 1. Olkoot pisteet A ja B kaksi suoran l eri pistettä. Silloin $\vec{s} = \overrightarrow{AB}$ on suoran l eräs suuntavektori.



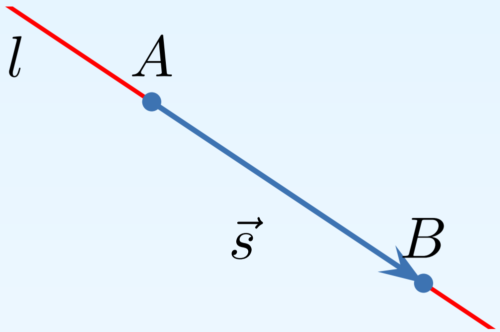
Lause 1. *Jos $\vec{s} = s_x\vec{i} + s_y\vec{j},\ s_x \neq \vec{0}$ on eräs suoran suuntavektori, niin suoran kulmakerroin on $k = \dfrac{s_y}{s_x}$.*



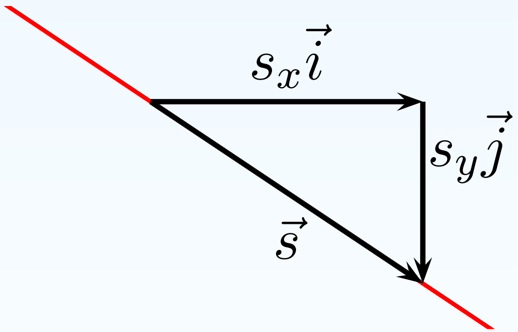
Lause 2. $l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \vec{s_1} \parallel \vec{s_2} \Leftrightarrow \vec{s_1} = t\vec{s_2}$

Suuntavektori

Määritelmä 1. Olkoot pisteet A ja B kaksi suoran l eri pistettä. Silloin $\vec{s} = \overrightarrow{AB}$ on suoran l eräs suuntavektori.



Lause 1. *Jos $\vec{s} = s_x\vec{i} + s_y\vec{j}$, $s_x \neq \vec{0}$ on eräs suoran suuntavektori, niin suoran kulmakerroin on $k = \dfrac{s_y}{s_x}$.*



Lause 2. $l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \vec{s_1} \parallel \vec{s_2} \Leftrightarrow \vec{s_1} = t\vec{s_2}$

Lause 3. $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \vec{s_1} \perp \vec{s_2} \Leftrightarrow \vec{s_1} \cdot \vec{s_2} = 0$

Suuntavektori

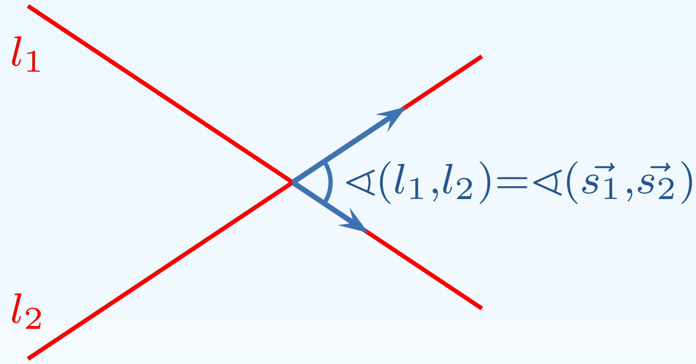
Lause 4.

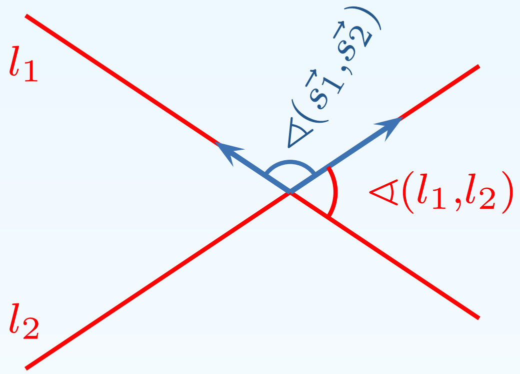
$$\sphericalangle\left(l_1, l_2\right)=\begin{cases}\sphericalangle\left(\vec{s_1}, \vec{s_2}\right) & , \textit{jos} \quad \sphericalangle\left(\vec{s_1}, \vec{s_2}\right) \leq 90^\circ \\ 180^\circ-\sphericalangle\left(\vec{s_1}, \vec{s_2}\right) & , \textit{jos} \quad \sphericalangle\left(\vec{s_1}, \vec{s_2}\right) > 90^\circ\end{cases}$$

Suuntavektori

Lause 4.

$$\sphericalangle(l_1, l_2) = \begin{cases} \sphericalangle(\vec{s_1}, \vec{s_2}) & , \textit{jos} \quad \sphericalangle(\vec{s_1}, \vec{s_2}) \leq 90^\circ \\ 180^\circ - \sphericalangle(\vec{s_1}, \vec{s_2}) & , \textit{jos} \quad \sphericalangle(\vec{s_1}, \vec{s_2}) > 90^\circ \end{cases}$$

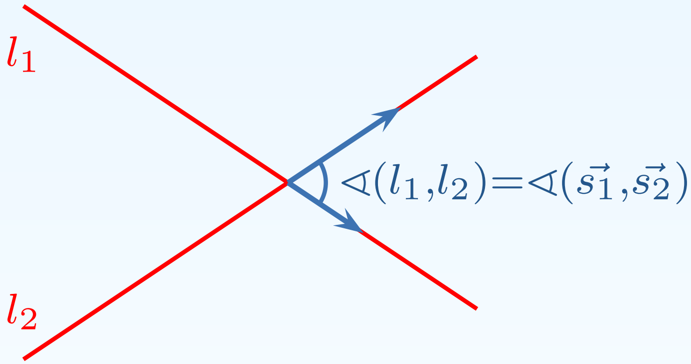


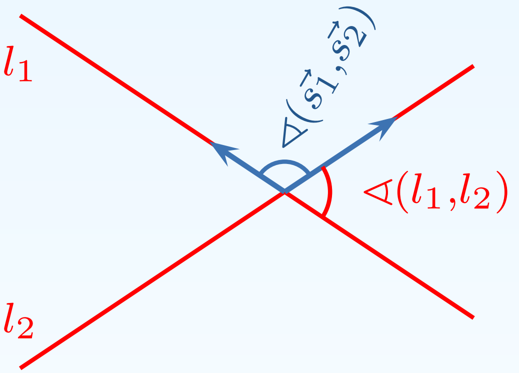


Suuntavektori

Lause 4.

$$\sphericalangle(l_1, l_2) = \begin{cases} \sphericalangle(\vec{s_1}, \vec{s_2}) & , \textit{jos} \quad \sphericalangle(\vec{s_1}, \vec{s_2}) \leq 90^\circ \\ 180^\circ - \sphericalangle(\vec{s_1}, \vec{s_2}) & , \textit{jos} \quad \sphericalangle(\vec{s_1}, \vec{s_2}) > 90^\circ \end{cases}$$





$$\cos\left(\sphericalangle(\vec{s_1}, \vec{s_2})\right) = \frac{\vec{s_1} \cdot \vec{s_2}}{|\vec{s_1}|\,|\vec{s_1}|}$$

Esimerkki

$3x - 5y + 10 = 0$ (suoran normaalimuoto)

Esimerkki

$3x - 5y + 10 = 0$ (suoran normaalimuoto)

$y = \frac{3}{5}x + 2$ (ratkaistu muoto)

Esimerkki

$3x - 5y + 10 = 0$ (suoran normaalimuoto)

$y = \frac{3}{5}x + 2$ (ratkaistu muoto)

Eräs suoran *suuntavektori* on

Esimerkki

$3x - 5y + 10 = 0$ (suoran normaalimuoto)

$y = \frac{3}{5}x + 2$ (ratkaistu muoto)

Eräs suoran *suuntavektori* on $\vec{s} = 5\vec{i} + 3\vec{j}$.

Esimerkki

$3x - 5y + 10 = 0$ (suoran normaalimuoto)

$y = \frac{3}{5}x + 2$ (ratkaistu muoto)

Eräs suoran *suuntavektori* on $\vec{s} = 5\vec{i} + 3\vec{j}$.

Eräs suoran *normaalivektori* on

Esimerkki

$3x - 5y + 10 = 0$ (suoran normaalimuoto)

$y = \frac{3}{5}x + 2$ (ratkaistu muoto)

Eräs suoran *suuntavektori* on $\vec{s} = 5\vec{i} + 3\vec{j}$.

Eräs suoran *normaalivektori* on $\vec{n} = 3\vec{i} - 5\vec{j}$, koska

$\vec{s} \cdot \vec{n} = 5 \cdot 3 + 3 \cdot (-5) = 0$.

Esimerkki

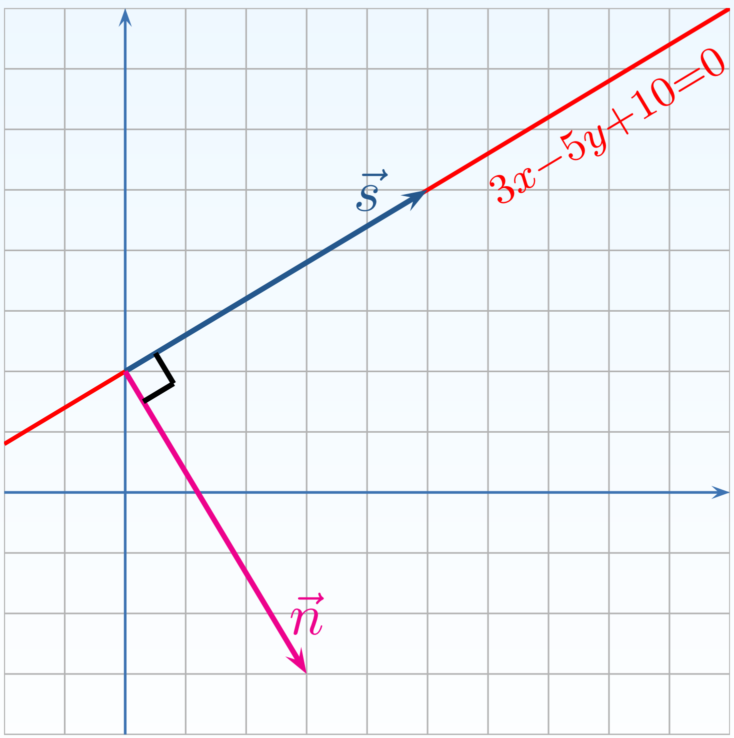
$3x - 5y + 10 = 0$ (suoran normaalimuoto)

$y = \frac{3}{5}x + 2$ (ratkaistu muoto)

Eräs suoran *suuntavektori* on $\vec{s} = 5\vec{i} + 3\vec{j}$.

Eräs suoran *normaalivektori* on $\vec{n} = 3\vec{i} - 5\vec{j}$, koska

$\vec{s} \cdot \vec{n} = 5 \cdot 3 + 3 \cdot (-5) = 0$.



Normaalivektori

Lause 5. *Suoran $ax + by + c = 0$ eräs normaalivektori on $\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j}$.*

Normaalivektori

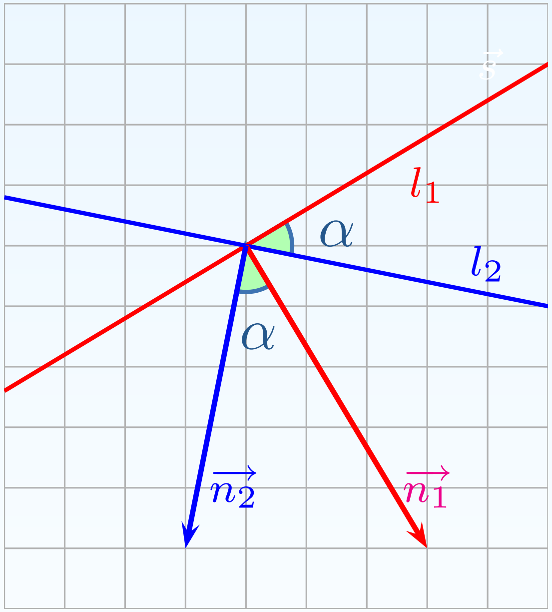
Lause 5. *Suoran* $ax + by + c = 0$ *eräs normaalivektori on* $\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j}$*.*

Suorien välinen kulma on normaalivektoreiden välinen kulma tai sen suplementtikulma.

Normaalivektori

Lause 5. *Suoran $ax + by + c = 0$ eräs normaalivektori on $\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j}$.*

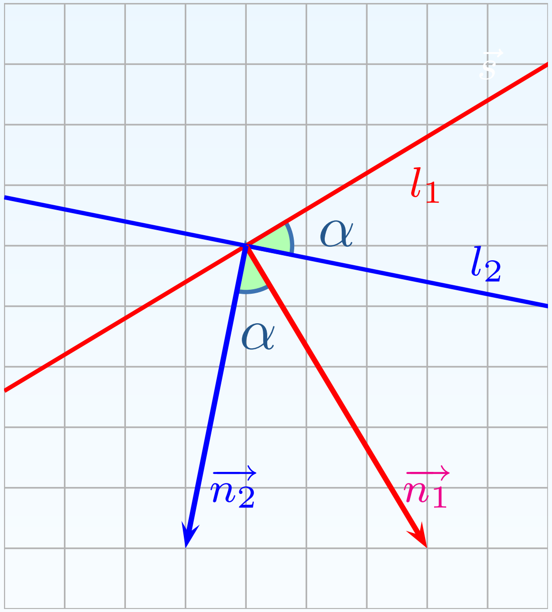
Suorien välinen kulma on normaalivektoreiden välinen kulma tai sen suplementtikulma.



Normaalivektori

Lause 5. *Suoran $ax + by + c = 0$ eräs normaalivektori on $\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j}$.*

Suorien välinen kulma on normaalivektoreiden välinen kulma tai sen suplementtikulma.

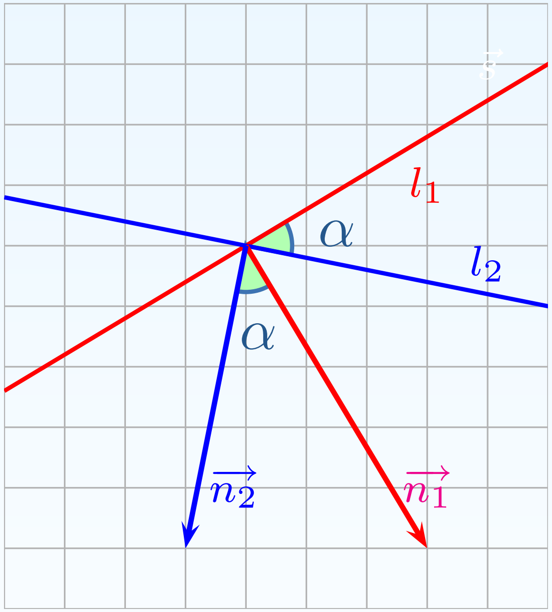


$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1} \perp \overrightarrow{n_2}$$

Normaalivektori

Lause 5. *Suoran $ax + by + c = 0$ eräs normaalivektori on $\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j}$.*

Suorien välinen kulma on normaalivektoreiden välinen kulma tai sen suplementtikulma.



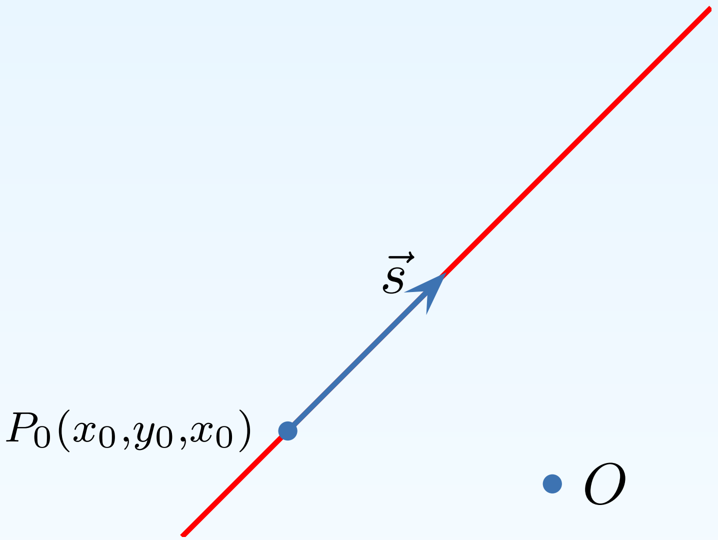
$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1} \perp \overrightarrow{n_2}$

$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1} \parallel \overrightarrow{n_2}$

II: Suora avaruudessa

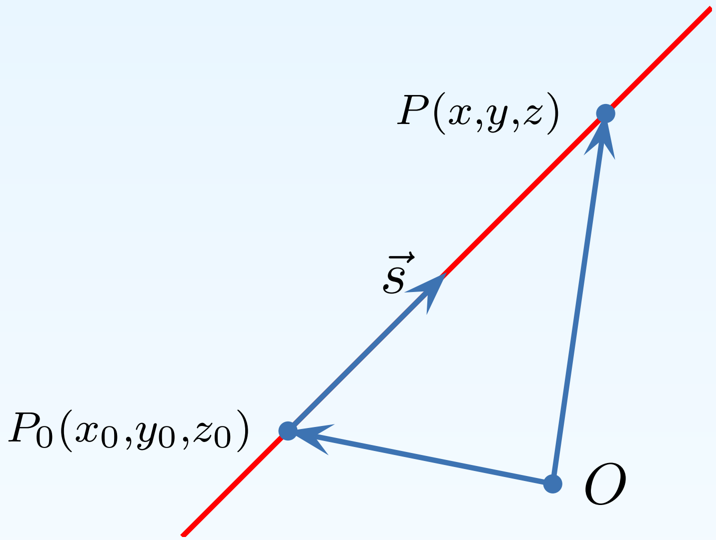
Suoran yhtälö: vektorimuoto

Suuntavektori s ja piste P_0 määräävät suoran.



Suoran yhtälö: vektorimuoto

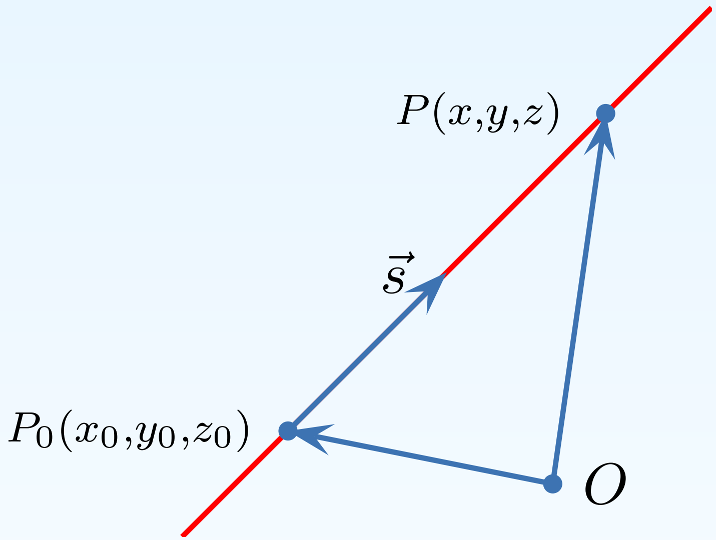
Suuntavektori s ja piste P_0 määräävät suoran.



Piste P on suoralla, joss

Suoran yhtälö: vektorimuoto

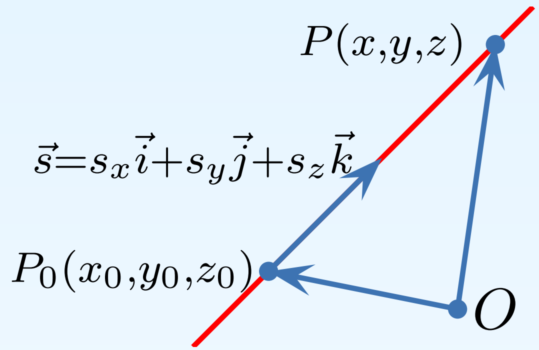
Suuntavektori s ja piste P_0 määräävät suoran.



Piste P on suoralla, joss

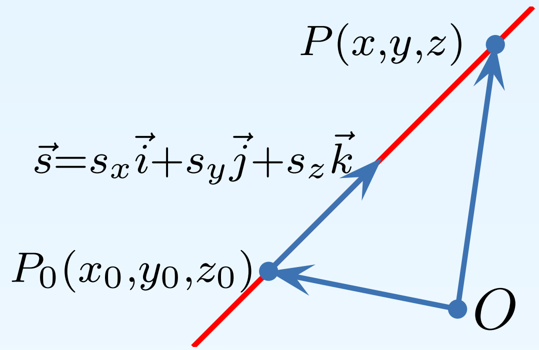
$$\boxed{\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + t\vec{s},\ t \in \mathbb{R}}$$

Suoran yhtälö: parametrimuoto



Piste P on suoralla, joss

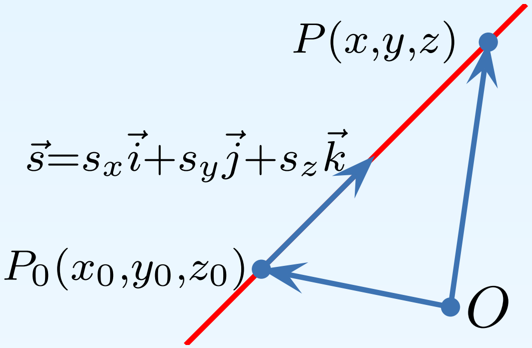
Suoran yhtälö: parametrimuoto



Piste P on suoralla, joss

$$x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}=x_0\vec{i}+y_0\vec{j}+z_0\vec{k}+t\left(s_x\vec{i}+s_y\vec{j}+s_z\vec{k}\right),\ t\in\mathbb{R}$$

Suoran yhtälö: parametrimuoto

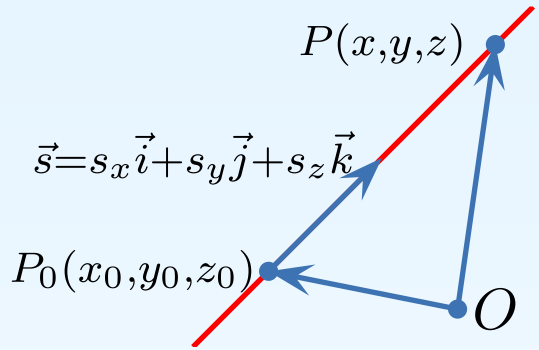


Piste P on suoralla, joss

$$x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}=x_0\vec{i}+y_0\vec{j}+z_0\vec{k}+t\left(s_x\vec{i}+s_y\vec{j}+s_z\vec{k}\right),\ t\in\mathbb{R}$$

$$\boxed{\begin{cases} x &= x_0+ts_x \\ y &= y_0+ts_y \\ z &= z_0+ts_z \end{cases}}$$

Suoran yhtälö: parametrimuoto



Piste P on suoralla, joss

$$x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}=x_0\vec{i}+y_0\vec{j}+z_0\vec{k}+t\left(s_x\vec{i}+s_y\vec{j}+s_z\vec{k}\right),\ t\in\mathbb{R}$$

$$\boxed{\begin{cases} x &= x_0+ts_x \\ y &= y_0+ts_y \\ z &= z_0+ts_z \end{cases}}$$

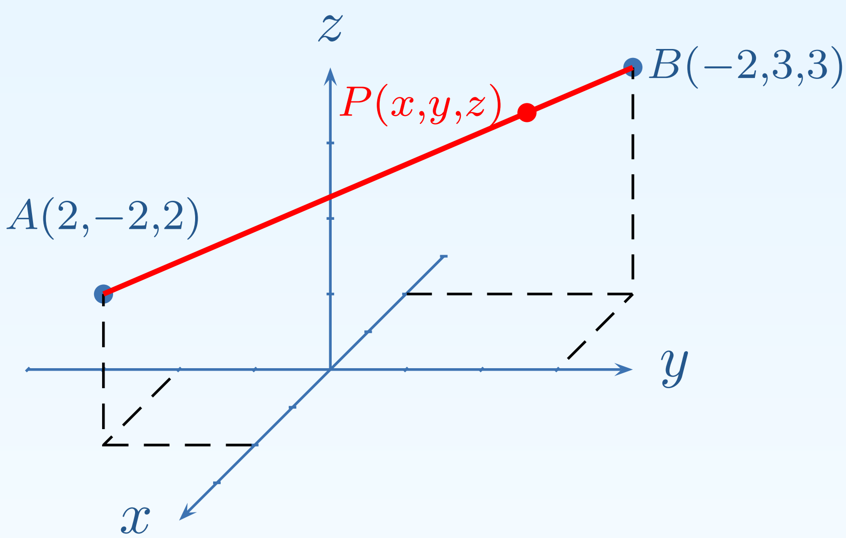
$$\boxed{\frac{x-x_0}{s_x}=\frac{y-y_0}{s_y}=\frac{z-z_0}{s_z}},\quad s_x,s_y,s_z\neq 0$$

Esimerkki

Suora kulkee pisteiden $A(2, -2, 2)$ ja $B(-2, 3, 3)$ kautta. Määritä suoran yhtälö sekä vektorimuodossa että parametrimuodossa.

Esimerkki

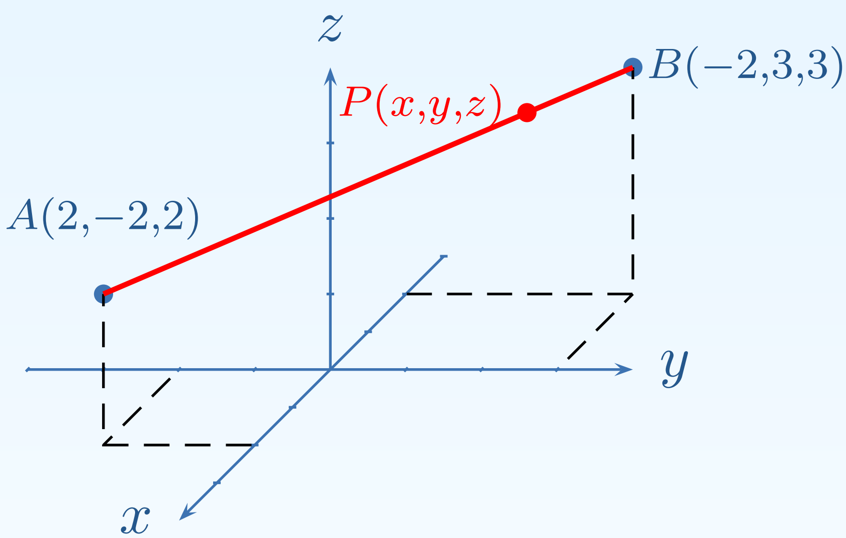
Suora kulkee pisteiden $A(2,-2,2)$ ja $B(-2,3,3)$ kautta. Määritä suoran yhtälö sekä vektorimuodossa että parametrimuodossa.



Suoran suuntavektori $s =$

Esimerkki

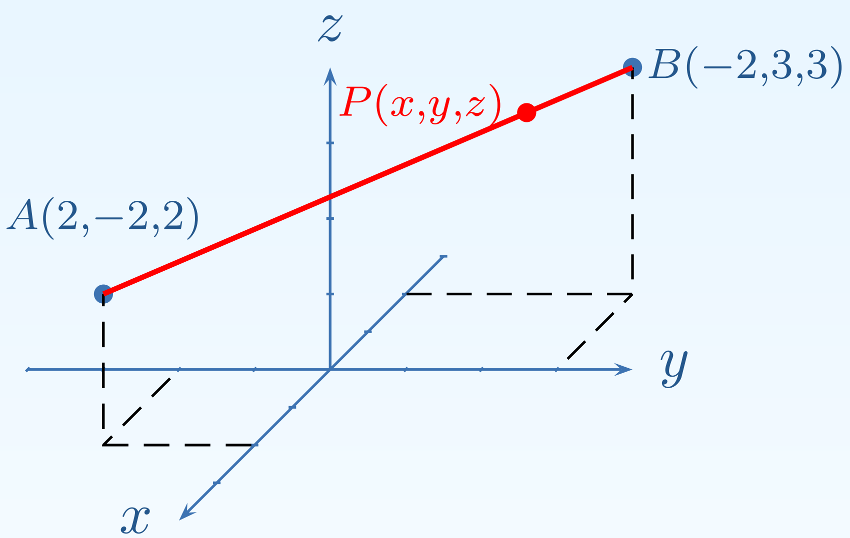
Suora kulkee pisteiden $A(2,-2,2)$ ja $B(-2,3,3)$ kautta. Määritä suoran yhtälö sekä vektorimuodossa että parametrimuodossa.



Suoran suuntavektori $s = \overrightarrow{AB} =$

Esimerkki

Suora kulkee pisteiden $A(2,-2,2)$ ja $B(-2,3,3)$ kautta. Määritä suoran yhtälö sekä vektorimuodossa että parametrimuodossa.



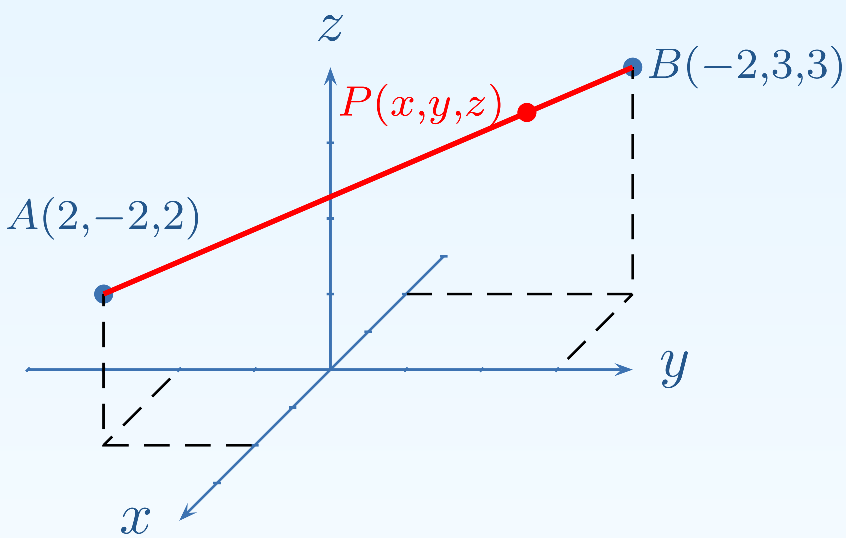
Suoran suuntavektori $s = \overrightarrow{AB} = -4\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}$

Vektorimuoto:

$\overrightarrow{OP} =$

Esimerkki

Suora kulkee pisteiden $A(2,-2,2)$ ja $B(-2,3,3)$ kautta. Määritä suoran yhtälö sekä vektorimuodossa että parametrimuodossa.



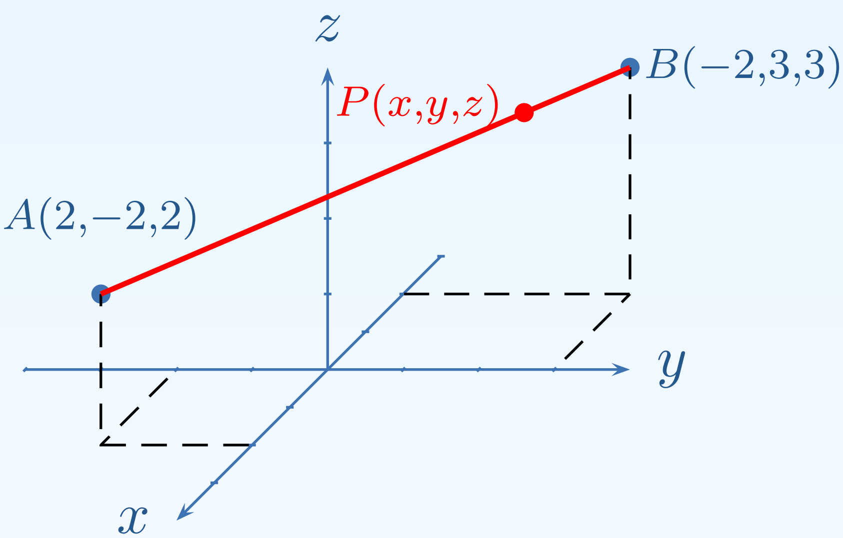
Suoran suuntavektori $s = \overrightarrow{AB} = -4\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}$

Vektorimuoto:

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\,\overrightarrow{s} =$

Esimerkki

Suora kulkee pisteiden $A(2,-2,2)$ ja $B(-2,3,3)$ kautta. Määritä suoran yhtälö sekä vektorimuodossa että parametrimuodossa.



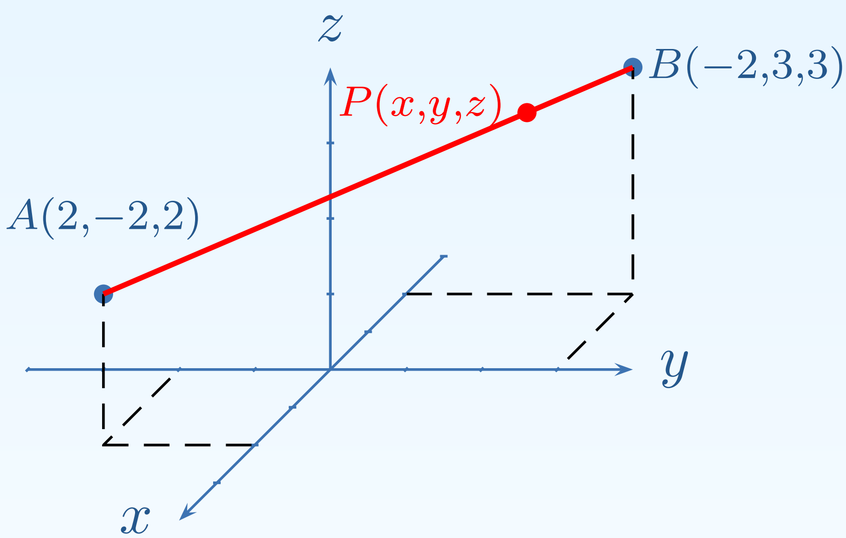
Suoran suuntavektori $s = \overrightarrow{AB} = -4\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}$

Vektorimuoto:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\,\vec{s} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k} + t\left(-4\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}\right)$$

Esimerkki

Suora kulkee pisteiden $A(2,-2,2)$ ja $B(-2,3,3)$ kautta. Määritä suoran yhtälö sekä vektorimuodossa että parametrimuodossa.



Suoran suuntavektori $s = \overrightarrow{AB} = -4\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}$

Vektorimuoto:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\,\vec{s} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k} + t\left(-4\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}\right)$$

Parametrimuoto: $\begin{cases} x = 2 - 4t \\ y = -2 + 5t \\ z = 2 + t \end{cases}$

Suorien keskinäinen asema

- yhdensuuntaiset
  $l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{s_1} \parallel \overrightarrow{s_2} \Leftrightarrow \overrightarrow{s_1} = t\overrightarrow{s_2}, t \in \mathbb{R}$
- ritikkäiset
- leikkaavat

Suorien keskinäinen asema

- yhdensuuntaiset
  $l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{s_1} \parallel \overrightarrow{s_2} \Leftrightarrow \overrightarrow{s_1} = t\overrightarrow{s_2}, t \in \mathbb{R}$
- ritikkäiset
- leikkaavat

Esimerkki. Ovatko suorat

$$\begin{cases} x &= 1+2t \\ y &= -2-3t \\ z &= 3+t \end{cases}, \; t \in \mathbb{R} \text{ ja } \begin{cases} x &= 7-6s \\ y &= 2+9s \\ z &= 1-3s \end{cases}, \; s \in \mathbb{R}$$

yhdensuuntaiset?

Suorien keskinäinen asema

- yhdensuuntaiset
  $l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{s_1} \parallel \overrightarrow{s_2} \Leftrightarrow \overrightarrow{s_1} = t\overrightarrow{s_2}, t \in \mathbb{R}$
- ritikkäiset
- leikkaavat

Esimerkki. Ovatko suorat

$$\begin{cases} x &= 1+2t \\ y &= -2-3t \\ z &= 3+t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \text{ ja } \begin{cases} x &= 7-6s \\ y &= 2+9s \\ z &= 1-3s \end{cases}, s \in \mathbb{R}$$

yhdensuuntaiset?

Suuntavektorit ovat $\vec{s_1} =$

Suorien keskinäinen asema

- yhdensuuntaiset
  $l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{s_1} \parallel \overrightarrow{s_2} \Leftrightarrow \overrightarrow{s_1} = t\overrightarrow{s_2}, t \in \mathbb{R}$
- ritikkäiset
- leikkaavat

Esimerkki. Ovatko suorat

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1+2t \\ y & = & -2-3t \\ z & = & 3+t \end{array}\right., \ t \in \mathbb{R} \text{ ja } \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 7-6s \\ y & = & 2+9s \\ z & = & 1-3s \end{array}\right., \ s \in \mathbb{R}$$

yhdensuuntaiset?

Suuntavektorit ovat $\vec{s_1} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ ja $\vec{s_2} =$

Suorien keskinäinen asema

- yhdensuuntaiset
  $l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{s_1} \parallel \overrightarrow{s_2} \Leftrightarrow \overrightarrow{s_1} = t\overrightarrow{s_2}, t \in \mathbb{R}$
- ritikkäiset
- leikkaavat

Esimerkki. Ovatko suorat

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - 3t \\ z = 3 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \text{ ja } \begin{cases} x = 7 - 6s \\ y = 2 + 9s \\ z = 1 - 3s \end{cases}, s \in \mathbb{R}$$

yhdensuuntaiset?

Suuntavektorit ovat $\vec{s_1} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ ja $\vec{s_2} = -6\vec{i} + 9\vec{j} - 3\vec{k}$.

Suorien keskinäinen asema

- yhdensuuntaiset
  $l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{s_1} \parallel \overrightarrow{s_2} \Leftrightarrow \overrightarrow{s_1} = t\overrightarrow{s_2}, t \in \mathbb{R}$
- ritikkäiset
- leikkaavat

Esimerkki. Ovatko suorat

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - 3t \\ z = 3 + t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R} \text{ ja } \begin{cases} x = 7 - 6s \\ y = 2 + 9s \\ z = 1 - 3s \end{cases}, \ s \in \mathbb{R}$$

yhdensuuntaiset?

Suuntavektorit ovat $\vec{s_1} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ ja $\vec{s_2} = -6\vec{i} + 9\vec{j} - 3\vec{k}$.
Koska $\vec{s_2} = -6\vec{i} + 9\vec{j} - 3\vec{k} = -3\left(2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}\right) = -3\vec{s_1}$, niin

Suorien keskinäinen asema

- yhdensuuntaiset
  $l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{s_1} \parallel \overrightarrow{s_2} \Leftrightarrow \overrightarrow{s_1} = t\overrightarrow{s_2}, t \in \mathbb{R}$
- ritikkäiset
- leikkaavat

Esimerkki. Ovatko suorat

$$\begin{cases} x &= 1+2t \\ y &= -2-3t \\ z &= 3+t \end{cases}, \; t \in \mathbb{R} \text{ ja } \begin{cases} x &= 7-6s \\ y &= 2+9s \\ z &= 1-3s \end{cases}, \; s \in \mathbb{R}$$

yhdensuuntaiset?

Suuntavektorit ovat $\vec{s_1} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ ja $\vec{s_2} = -6\vec{i} + 9\vec{j} - 3\vec{k}$.
Koska $\vec{s_2} = -6\vec{i} + 9\vec{j} - 3\vec{k} = -3\left(2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}\right) = -3\vec{s_1}$, niin $\overrightarrow{s_1} \parallel \overrightarrow{s_2}$

Suorien keskinäinen asema

- yhdensuuntaiset
  $l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{s_1} \parallel \overrightarrow{s_2} \Leftrightarrow \overrightarrow{s_1} = t\overrightarrow{s_2}, t \in \mathbb{R}$
- ritikkäiset
- leikkaavat

Esimerkki. Ovatko suorat

$$\begin{cases} x &= 1+2t \\ y &= -2-3t \\ z &= 3+t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R} \text{ ja } \begin{cases} x &= 7-6s \\ y &= 2+9s \\ z &= 1-3s \end{cases}, \ s \in \mathbb{R}$$

yhdensuuntaiset?

Suuntavektorit ovat $\vec{s_1} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ ja $\vec{s_2} = -6\vec{i} + 9\vec{j} - 3\vec{k}$.
Koska $\vec{s_2} = -6\vec{i} + 9\vec{j} - 3\vec{k} = -3\left(2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}\right) = -3\vec{s_1}$, niin $\overrightarrow{s_1} \parallel \overrightarrow{s_2}$ ja suorat ovat yhdensuuntaiset.