

Taso

Hannu Lehto
Lahden Lyseon lukio

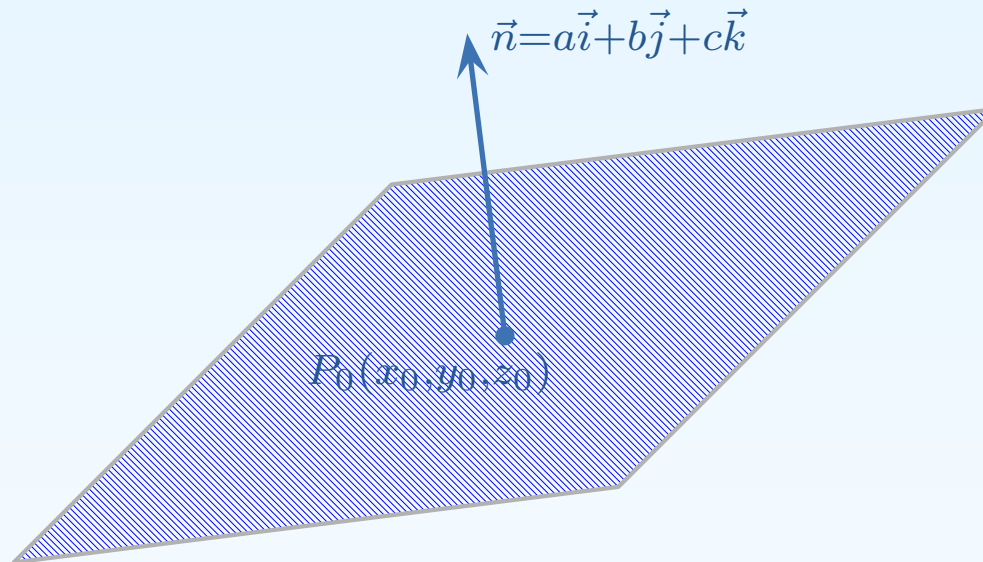


Taso avaruudessa

- Taso avaruudessa

- Suora ja taso
- Suoran ja tason välinen kulma
- Kaksi tasoa

Piste P_0 ja tason normaalivektori n määräävät tason.

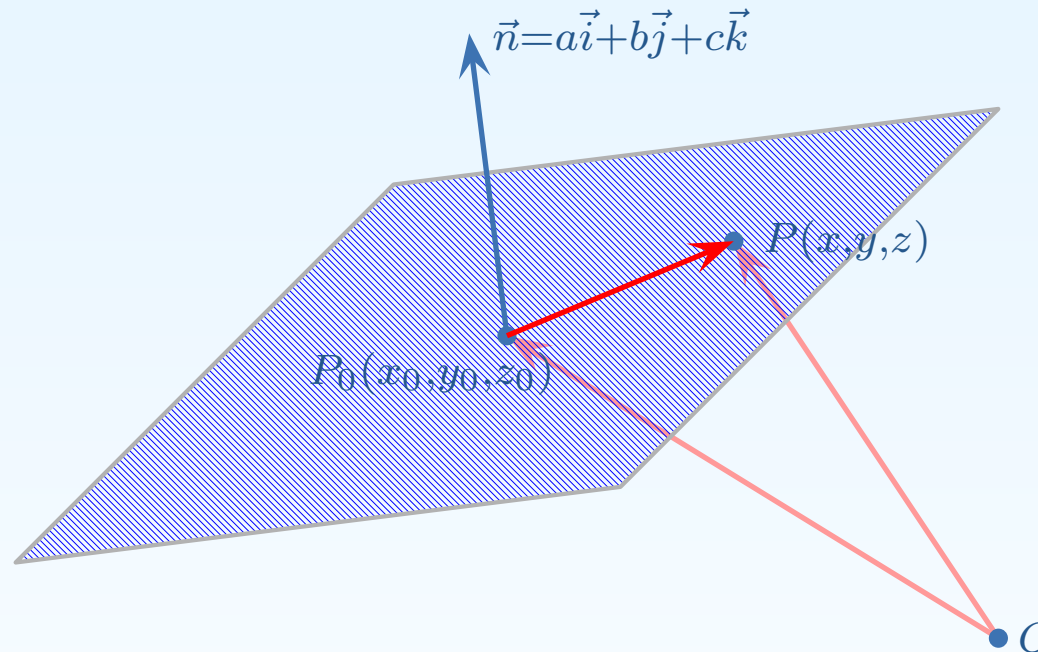


Taso avaruudessa

- Taso avaruudessa

- Suora ja taso
- Suoran ja tason välinen kulma
- Kaksi tasoa

Piste P_0 ja tason normaalivektori n määräävät tason.



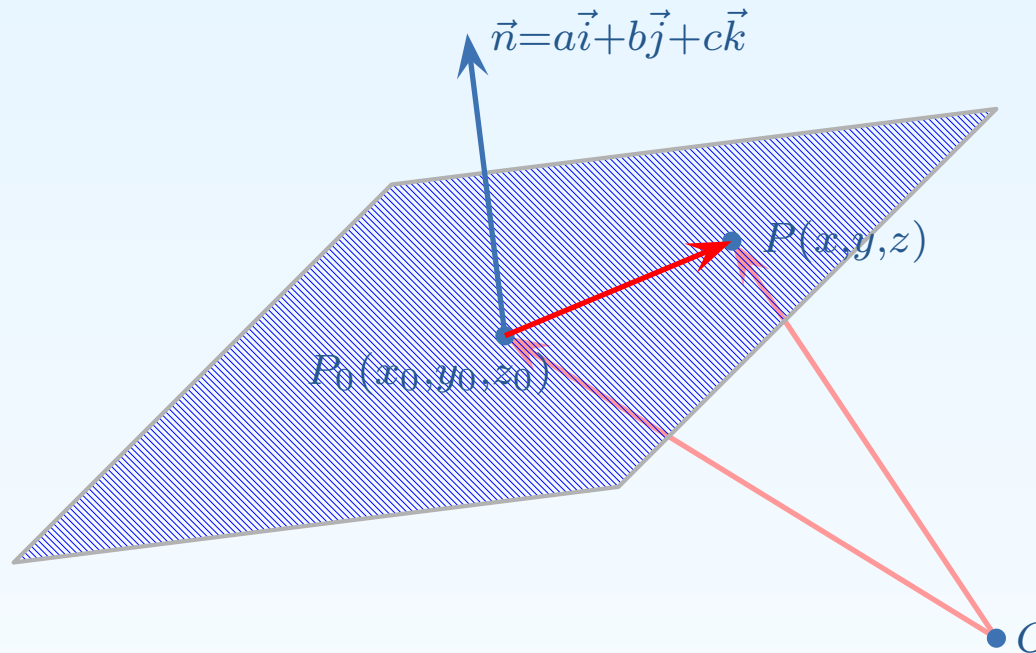
Olkoon P tason mielivaltainen piste.

Taso avaruudessa

- Taso avaruudessa

- Suora ja taso
- Suoran ja tason välinen kulma
- Kaksi tasoa

Piste P_0 ja tason normaalivektori n määräävät tason.



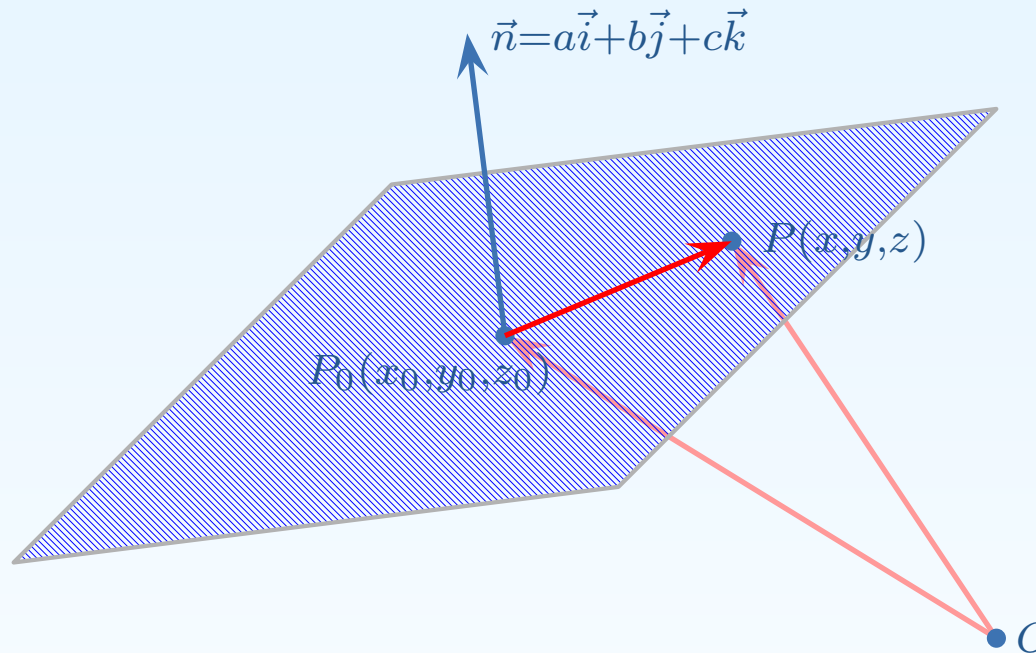
Olkoon P tason mielivaltainen piste. P on tasossa, joss

Taso avaruudessa

- Taso avaruudessa

- Suora ja taso
- Suoran ja tason välinen kulma
- Kaksi tasoa

Piste P_0 ja tason normaalivektori n määräävät tason.



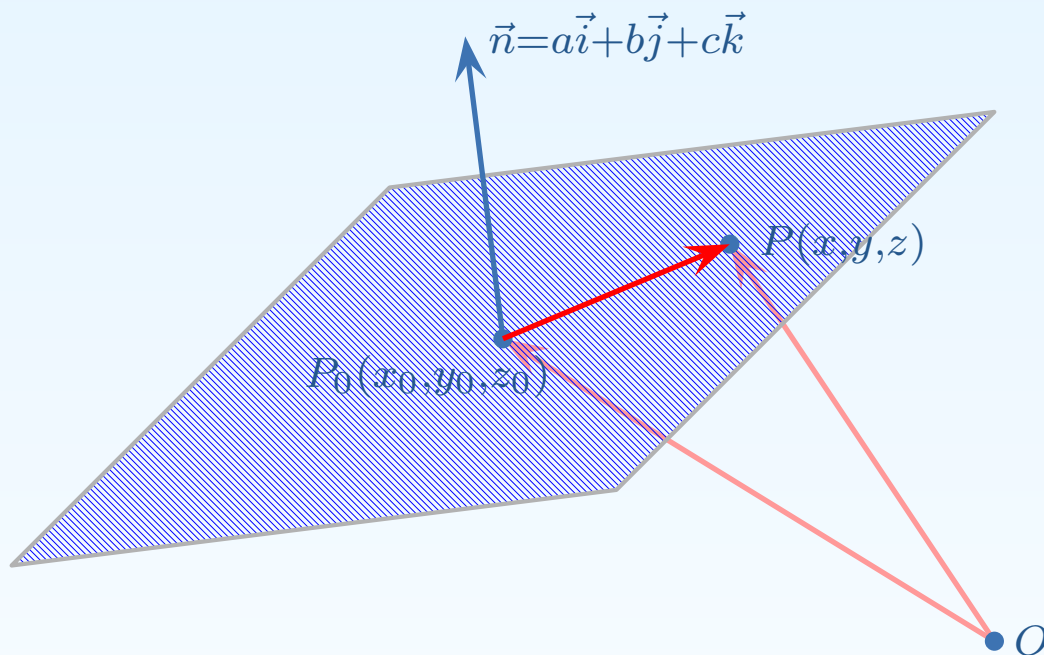
Olkoon P tason mielivaltainen piste. P on tasossa, joss
 $\overrightarrow{P_0P} \perp \vec{n}$

Taso avaruudessa

- Taso avaruudessa

- Suora ja taso
- Suoran ja tason välinen kulma
- Kaksi tasoa

Piste P_0 ja tason normaalivektori n määräävät tason.



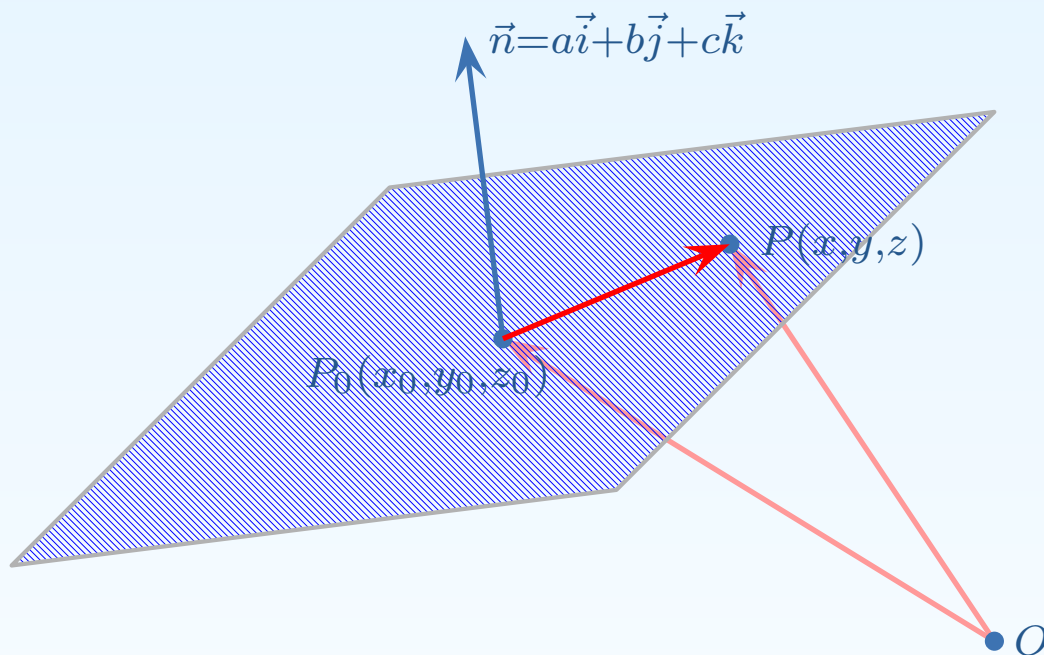
Olkoon P tason mielivaltainen piste. P on tasossa, joss
 $\overrightarrow{P_0P} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{n} = 0$

Taso avaruudessa

- Taso avaruudessa

- Suora ja taso
- Suoran ja tason välinen kulma
- Kaksi tasoa

Piste P_0 ja tason normaalivektori \vec{n} määräävät tason.



Olkoon P tason mielivaltainen piste. P on tasossa, joss

$$\overrightarrow{P_0P} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{n} = 0$$

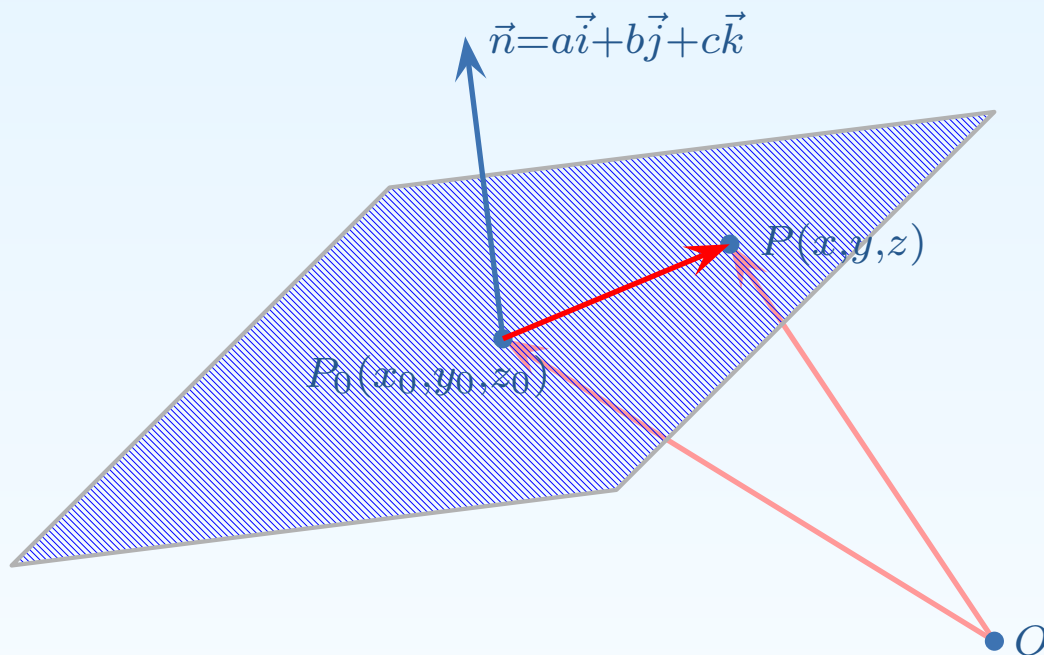
$$\Leftrightarrow \left((x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j} + (z - z_0)\vec{k} \right) \cdot \left(a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} \right)$$

Taso avaruudessa

- Taso avaruudessa

- Suora ja taso
- Suoran ja tason välinen kulma
- Kaksi tasoa

Piste P_0 ja tason normaalivektori \vec{n} määräävät tason.



Olkoon P tason mielivaltainen piste. P on tasossa, joss

$$\overrightarrow{P_0P} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{n} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left((x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j} + (z - z_0)\vec{k} \right) \cdot \left(a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} \right)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0}$$

Taso avaruudessa

- Taso avaruudessa

- Suora ja taso
- Suoran ja tason välinen kulma
- Kaksi tasoa

Tason yhtälö on $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$.

Taso avaruudessa

- Taso avaruudessa

- Suora ja taso
- Suoran ja tason välinen kulma
- Kaksi tasoa

Tason yhtälö on $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$.

$$ax + by + cz - \underbrace{ax_0 - by_0 - cz_0}_{d \text{ vakio}} = 0$$

Taso avaruudessa

- Taso avaruudessa

- Suora ja taso
- Suoran ja tason välinen kulma
- Kaksi tasoa

Tason yhtälö on $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$.

$$ax + by + cz - \underbrace{ax_0 - by_0 - cz_0}_{d \text{ vakio}} = 0$$

$$ax + by + cz + d = 0$$

(normaalimuoto)

Taso avaruudessa

- Taso avaruudessa

- Suora ja taso
- Suoran ja tason välinen kulma
- Kaksi tasoa

Tason yhtälö on $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$.

$$ax + by + cz - \underbrace{ax_0 - by_0 - cz_0}_{d \text{ vakio}} = 0$$

$$ax + by + cz + d = 0$$

(normaalimuoto)

Esimerkki. Taso kulkee pisteen $(1, -3, 2)$ kautta ja sen normaalivektori on $n = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$. Mikä on tason yhtälö? Onko piste $(-2, -1, 1)$ tässä tasossa?

Taso avaruudessa

- Taso avaruudessa

- Suora ja taso
- Suoran ja tason välinen kulma
- Kaksi tasoa

Tason yhtälö on $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$.

$$ax + by + cz - \underbrace{ax_0 - by_0 - cz_0}_{d \text{ vakio}} = 0$$

$$ax + by + cz + d = 0$$

(normaalimuoto)

Esimerkki. Taso kulkee pisteen $(1, -3, 2)$ kautta ja sen normaalivektori on $n = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$. Mikä on tason yhtälö? Onko piste $(-2, -1, 1)$ tässä tasossa?

$$3(x - 1) + 2(y - (-3)) - 4(z - 2) = 0$$

Taso avaruudessa

- Taso avaruudessa

- Suora ja taso
- Suoran ja tason välinen kulma
- Kaksi tasoa

Tason yhtälö on $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$.

$$ax + by + cz - \underbrace{ax_0 - by_0 - cz_0}_{d \text{ vakio}} = 0$$

$$ax + by + cz + d = 0$$

(normaalimuoto)

Esimerkki. Taso kulkee pisteen $(1, -3, 2)$ kautta ja sen normaalivektori on $n = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$. Mikä on tason yhtälö? Onko piste $(-2, -1, 1)$ tässä tasossa?

$$3(x - 1) + 2(y - (-3)) - 4(z - 2) = 0$$

$$3x - 3 + 2y + 6 - 4z + 8 = 0$$

Taso avaruudessa

- Taso avaruudessa

- Suora ja taso
- Suoran ja tason välinen kulma
- Kaksi tasoa

Tason yhtälö on $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$.

$$ax + by + cz - \underbrace{ax_0 - by_0 - cz_0}_{d \text{ vakio}} = 0$$

$$ax + by + cz + d = 0$$

(normaalimuoto)

Esimerkki. Taso kulkee pisteen $(1, -3, 2)$ kautta ja sen normaalivektori on $n = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$. Mikä on tason yhtälö? Onko piste $(-2, -1, 1)$ tässä tasossa?

$$3(x - 1) + 2(y - (-3)) - 4(z - 2) = 0$$

$$3x - 3 + 2y + 6 - 4z + 8 = 0$$

$$3x + 2y - 4z + 11 = 0$$

Taso avaruudessa

- Taso avaruudessa

- Suora ja taso
- Suoran ja tason välinen kulma
- Kaksi tasoa

Tason yhtälö on $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$.

$$ax + by + cz - \underbrace{ax_0 - by_0 - cz_0}_{d \text{ vakio}} = 0$$

$$ax + by + cz + d = 0$$

(normaalimuoto)

Esimerkki. Taso kulkee pisteen $(1, -3, 2)$ kautta ja sen normaalivektori on $n = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$. Mikä on tason yhtälö? Onko piste $(-2, -1, 1)$ tässä tasossa?

$$3(x - 1) + 2(y - (-3)) - 4(z - 2) = 0$$

$$3x - 3 + 2y + 6 - 4z + 8 = 0$$

$$3x + 2y - 4z + 11 = 0$$

Piste on tasossa, joss se toteuttaa tason yhtälön.

Taso avaruudessa

- Taso avaruudessa

- Suora ja taso
- Suoran ja tason välinen kulma
- Kaksi tasoa

Tason yhtälö on $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$.

$$ax + by + cz - \underbrace{ax_0 - by_0 - cz_0}_{d \text{ vakio}} = 0$$

$$ax + by + cz + d = 0$$

(normaalimuoto)

Esimerkki. Taso kulkee pisteen $(1, -3, 2)$ kautta ja sen normaalivektori on $n = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$. Mikä on tason yhtälö? Onko piste $(-2, -1, 1)$ tässä tasossa?

$$3(x - 1) + 2(y - (-3)) - 4(z - 2) = 0$$

$$3x - 3 + 2y + 6 - 4z + 8 = 0$$

$$3x + 2y - 4z + 11 = 0$$

Piste on tasossa, joss se toteuttaa tason yhtälön.

$$3 \cdot (-2) + 2 \cdot (-1) - 4 \cdot 1 + 11 = -1 \neq 0, \text{ joten ei ole.}$$

Suora ja taso

- Taso avaruudessa
- **Suora ja taso**
- Suoran ja tason välinen kulma
- Kaksi tasoa

- Suora on tasossa.

Suora ja taso

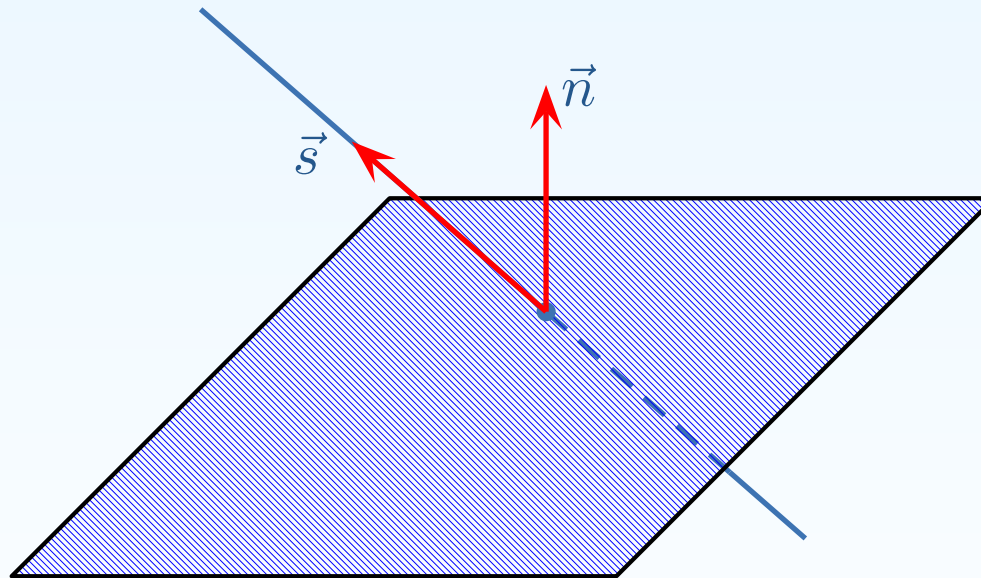
- Taso avaruudessa
- **Suora ja taso**
- Suoran ja tason välinen kulma
- Kaksi tasoa

- Suora on tasossa.
- Suora on tason suuntainen

Suora ja taso

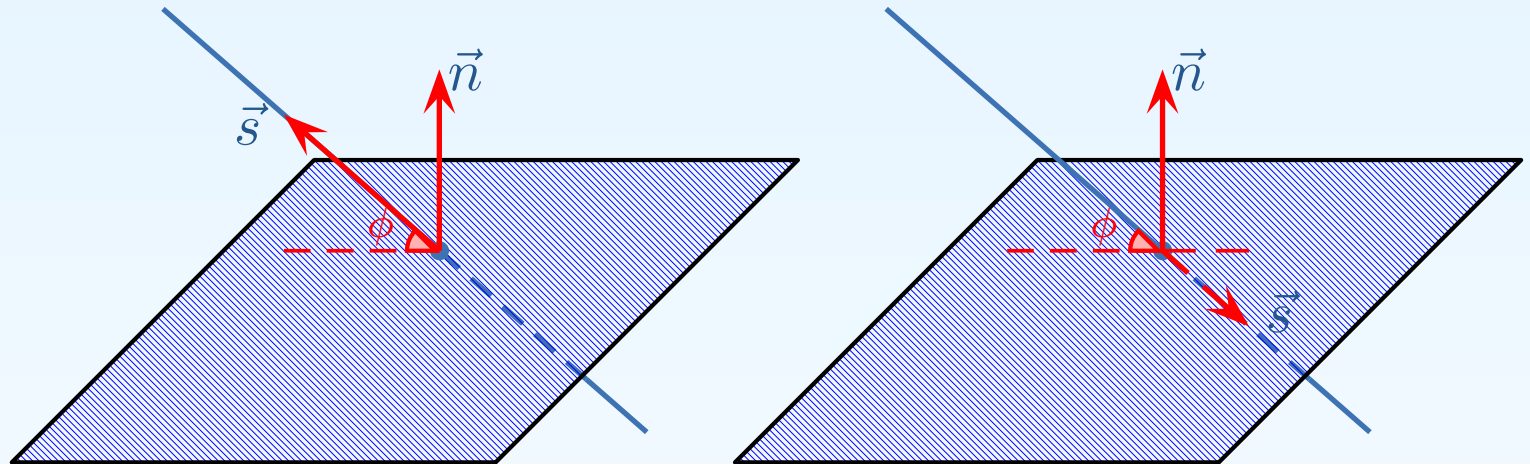
- Taso avaruudessa
- **Suora ja taso**
- Suoran ja tason välinen kulma
- Kaksi tasoa

- Suora on tasossa.
- Suora on tason suuntainen, jos $\vec{n} \perp \vec{s}$, missä \vec{n} on tason normaalivektori ja \vec{s} suoran suuntavektori.
- Suora leikkaa tason.



Suoran ja tason välinen kulma

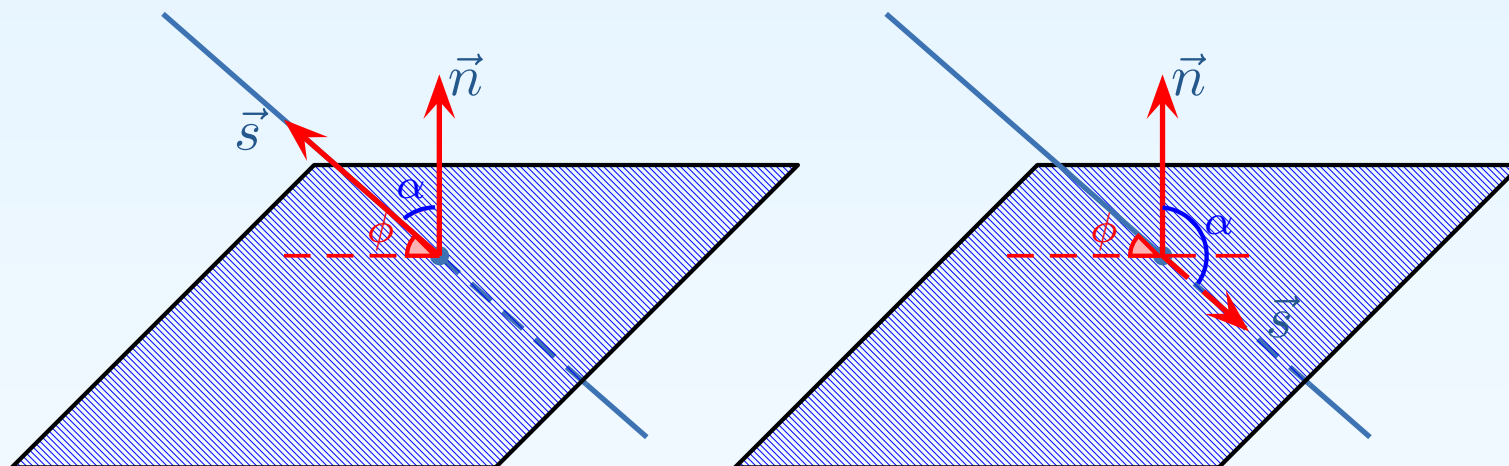
- Taso avaruudessa
- Suora ja taso
- Suoran ja tason välinen kulma
- Kaksi tasoa



Suoran ja tason välinen kulma (suuntavektorin ja sen tasolla olevan projektion) ϕ

Suoran ja tason välinen kulma

- Taso avaruudessa
- Suora ja taso
- Suoran ja tason välinen kulma
- Kaksi tasoa



Suoran ja tason välinen kulma (suuntavektorin ja sen tasolla olevan projektion) ϕ

$$\phi = \begin{cases} 90^\circ - \alpha, & \text{kun } \alpha \leq 90^\circ \\ \alpha - 90^\circ, & \text{kun } 90^\circ < \alpha \leq 180^\circ \end{cases},$$

missä $\alpha = \sphericalangle(\vec{s}, \vec{n})$.

Esimerkki

- Taso avaruudessa
- Suora ja taso
- Suoran ja tason välinen kulma
- Kaksi tasoa

Määritä tason $4x - 2y + 3z - 17 = 0$ ja suoran $\begin{cases} x = t \\ y = 1 - 2t \\ z = 1 \end{cases}$

- leikkauspiste
- välinen kulma $0,1^\circ$:een tarkkuudella.

Kaksi tasoa

- Taso avaruudessa
- Suora ja taso
- Suoran ja tason välinen kulma
- **Kaksi tasoa**

- $T_1 \parallel T_2 \Leftrightarrow$

Kaksi tasoa

- Taso avaruudessa
- Suora ja taso
- Suoran ja tason välinen kulma
- **Kaksi tasoa**

- $T_1 \parallel T_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2 \Leftrightarrow$

Kaksi tasoa

- Taso avaruudessa
- Suora ja taso
- Suoran ja tason välinen kulma
- **Kaksi tasoa**

$$\bullet T_1 \parallel T_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 = t\vec{n}_2$$

Kaksi tasoa

- Taso avaruudessa
- Suora ja taso
- Suoran ja tason välinen kulma
- **Kaksi tasoa**

- $T_1 \parallel T_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 = t\vec{n}_2$
- $T_1 \perp T_2 \Leftrightarrow$

Kaksi tasoa

- Taso avaruudessa
- Suora ja taso
- Suoran ja tason välinen kulma
- **Kaksi tasoa**

- $T_1 \parallel T_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 = t\vec{n}_2$
- $T_1 \perp T_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Leftrightarrow$

Kaksi tasoa

- Taso avaruudessa
- Suora ja taso
- Suoran ja tason välinen kulma
- **Kaksi tasoa**

- $T_1 \parallel T_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 = t\vec{n}_2$
- $T_1 \perp T_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$

Kaksi tasoa

- Taso avaruudessa
- Suora ja taso
- Suoran ja tason välinen kulma
- **Kaksi tasoa**

- $T_1 \parallel T_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 = t\vec{n}_2$
- $T_1 \perp T_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$
- $T_1 \not\parallel T_2 \Leftrightarrow$

Kaksi tasoa

- Taso avaruudessa
- Suora ja taso
- Suoran ja tason välinen kulma
- **Kaksi tasoa**

- $T_1 \parallel T_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 = t\vec{n}_2$
- $T_1 \perp T_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$
- $T_1 \not\parallel T_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \not\parallel \vec{n}_2$

Kaksi tasoa

- Taso avaruudessa
- Suora ja taso
- Suoran ja tason välinen kulma
- **Kaksi tasoa**

- $T_1 \parallel T_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 = t\vec{n}_2$
- $T_1 \perp T_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$
- $T_1 \nparallel T_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \nparallel \vec{n}_2$

Jos tasot ovat erisuuntaiset, niin ne leikkaavat pitkin suoraa.

Kaksi tasoa

- Taso avaruudessa
- Suora ja taso
- Suoran ja tason välinen kulma
- **Kaksi tasoa**

- $T_1 \parallel T_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 = t\vec{n}_2$
- $T_1 \perp T_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$
- $T_1 \not\parallel T_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \not\parallel \vec{n}_2$

Jos tasot ovat erisuuntaiset, niin ne leikkaavat pitkin suoraa.

Esimerkki. Leikkaavatko tasot $-x + y - z = 0$ ja $2x - y - z = -1$? Myönteisessä tapauksessa määritä leikkaussuoran yhtälö.

Kaksi tasoa

- Taso avaruudessa
- Suora ja taso
- Suoran ja tason välinen kulma
- **Kaksi tasoa**

- $T_1 \parallel T_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 = t\vec{n}_2$
- $T_1 \perp T_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$
- $T_1 \not\parallel T_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \not\parallel \vec{n}_2$

Jos tasot ovat erisuuntaiset, niin ne leikkaavat pitkin suoraa.

Esimerkki. Leikkaavatko tasot $-x + y - z = 0$ ja $2x - y - z = -1$? Myönteisessä tapauksessa määritä leikkaussuoran yhtälö.

Kahden tason välinen kulma on niiden normaalien välinen kulma.

Kaksi tasoa

- Taso avaruudessa
- Suora ja taso
- Suoran ja tason välinen kulma
- **Kaksi tasoa**

- $T_1 \parallel T_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 = t\vec{n}_2$
- $T_1 \perp T_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$
- $T_1 \nparallel T_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \nparallel \vec{n}_2$

Jos tasot ovat erisuuntaiset, niin ne leikkaavat pitkin suoraa.

Esimerkki. Leikkaavatko tasot $-x + y - z = 0$ ja $2x - y - z = -1$? Myönteisessä tapauksessa määritä leikkaussuoran yhtälö.

Kahden tason välinen kulma on niiden normaalien välinen kulma.

Esimerkki. Laske tasojen $-x + y - z = 0$ ja $2x - y - z = -1$ välinen kulma $0,1^\circ$:een tarkkuudella.