

Vektoreiden laskutoimitukset

Hannu Lehto
Lahden Lyseon lukio



Yhteenlasku

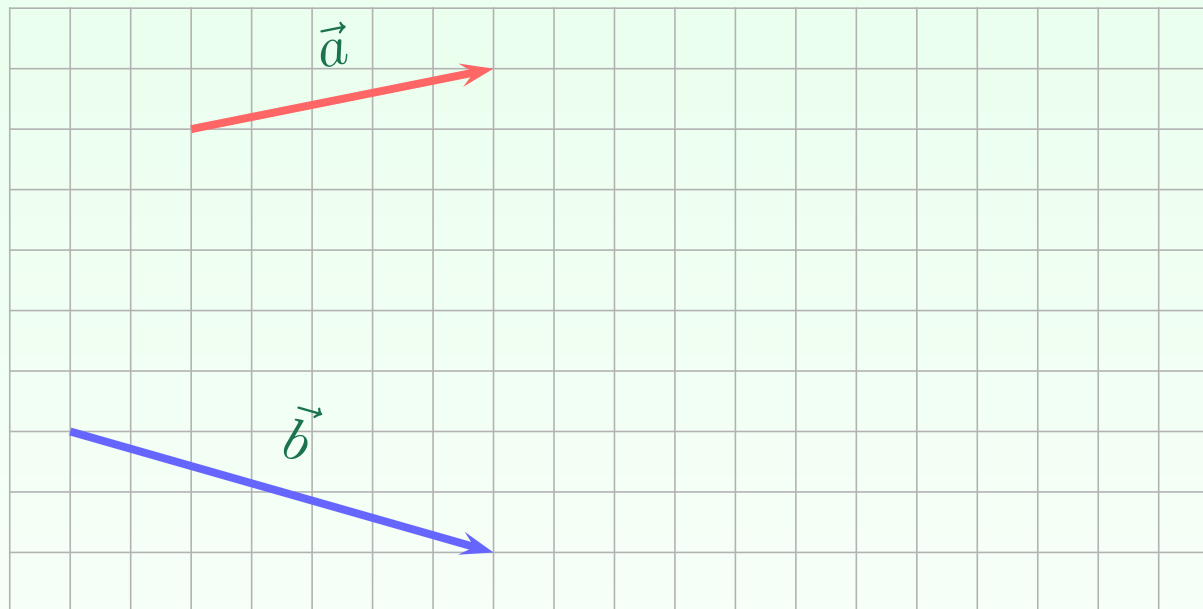
- **Yhteenlasku**
- Yhteenlaskun ominaisuudet
- Vähennyslasku
- Vektorin kertominen skalaarilla
- Yksikkövektori

Vektoreiden \vec{a} ja \vec{b} summa $\vec{a} + \vec{b}$

Yhteenlasku

- **Yhteenlasku**
- Yhteenlaskun ominaisuudet
- Vähennyslasku
- Vektorin kertominen skalaarilla
- Yksikkövektori

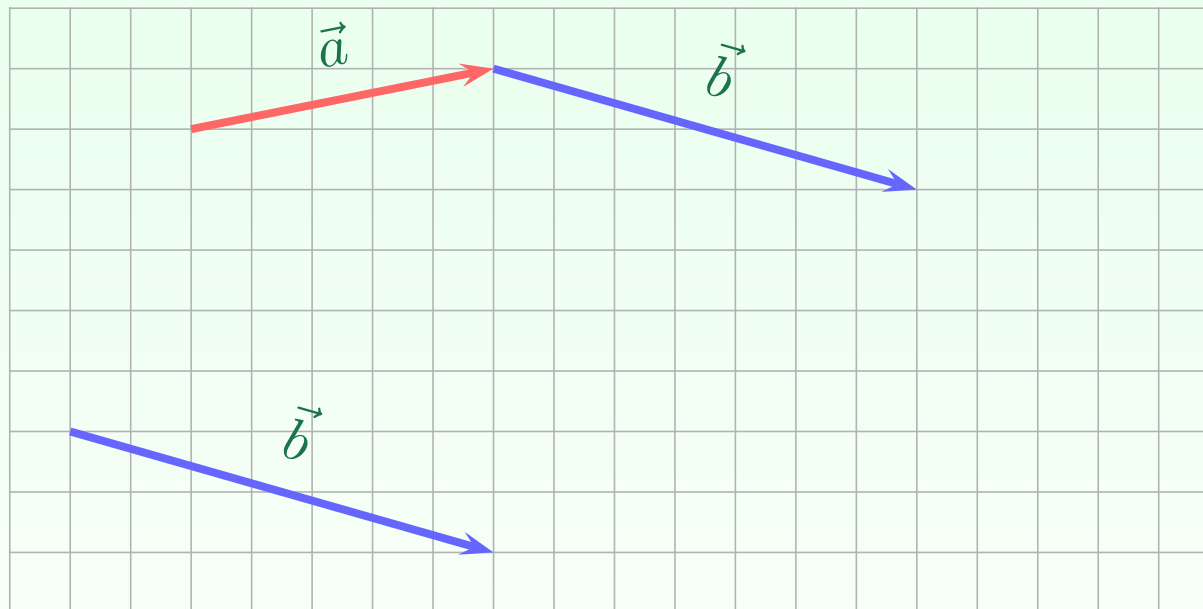
Vektoreiden \vec{a} ja \vec{b} summa $\vec{a} + \vec{b}$



Yhteenlasku

- **Yhteenlasku**
- Yhteenlaskun ominaisuudet
- Vähennyslasku
- Vektorin kertominen skalaarilla
- Yksikkövektori

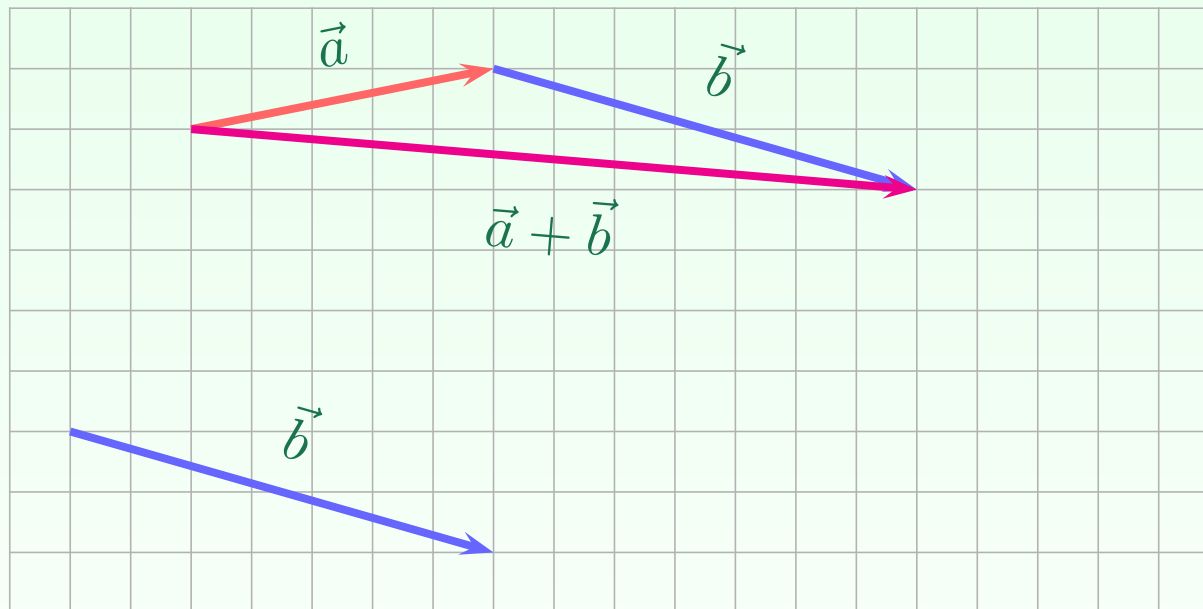
Vektoreiden \vec{a} ja \vec{b} summa $\vec{a} + \vec{b}$



Yhteenlasku

- **Yhteenlasku**
- Yhteenlaskun ominaisuudet
- Vähennyslasku
- Vektorin kertominen skalaarilla
- Yksikkövektori

Vektoreiden \vec{a} ja \vec{b} summa $\vec{a} + \vec{b}$



Yhteenlaskun ominaisuudet

- Yhteenlasku
- **Yhteenlaskun ominaisuudet**
- Vähennyslasku
- Vektorin kertominen skalaarilla
- Yksikkövektori

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (vaihdantalaki)

Yhteenlaskun ominaisuudet

- Yhteenlasku
- **Yhteenlaskun ominaisuudet**
- Vähennyslasku
- Vektorin kertominen skalaarilla
- Yksikkövektori

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (vaihdantalaki)

2. $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ (liitântälaki)

Yhteenlaskun ominaisuudet

- Yhteenlasku
- **Yhteenlaskun ominaisuudet**
- Vähennyslasku
- Vektorin kertominen skalaarilla
- Yksikkövektori

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (vaihdantalaki)
2. $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ (liitântälaki)
3. $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ (neutraalialkio)

Yhteenlaskun ominaisuudet

- Yhteenlasku
- **Yhteenlaskun ominaisuudet**
- Vähennyslasku
- Vektorin kertominen skalaarilla
- Yksikkövektori

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (vaihdantalaki)
2. $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ (liitântälaki)
3. $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ (neutraalialkio)
4. $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$

Vähennyslasku

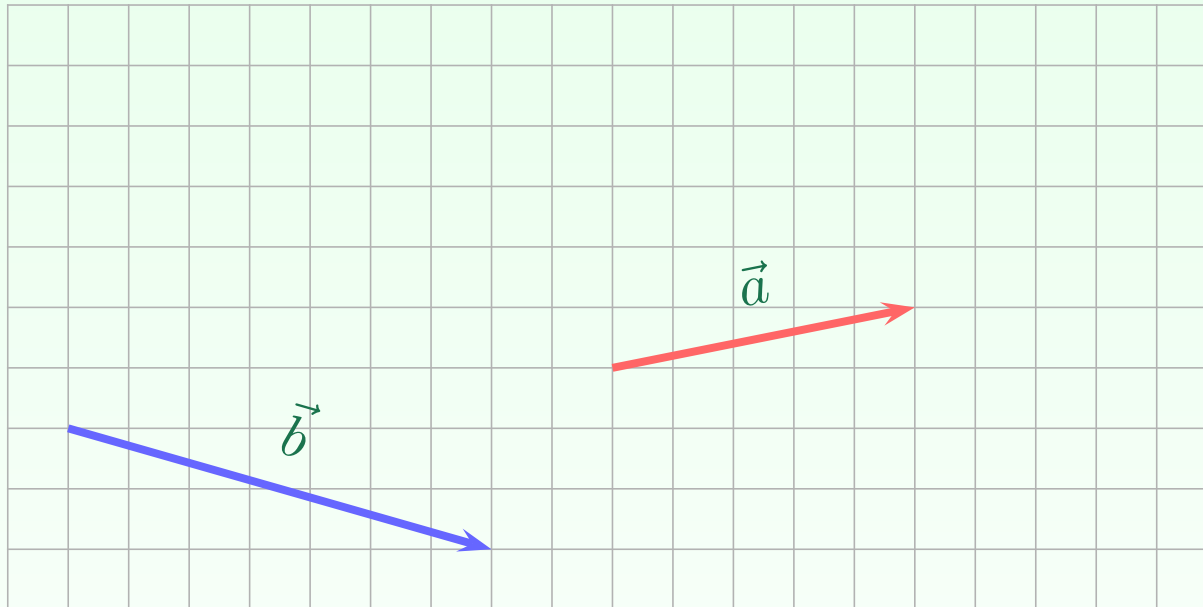
- Yhteenlasku
- Yhteenlaskun ominaisuudet
- **Vähennyslasku**
- Vektorin kertominen skalaarilla
- Yksikkövektori

Vektoreiden \vec{a} ja \vec{b} erotus $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$

Vähennyslasku

- Yhteenlasku
- Yhteenlaskun ominaisuudet
- Vähennyslasku
- Vektorin kertominen skalaarilla
- Yksikkövektori

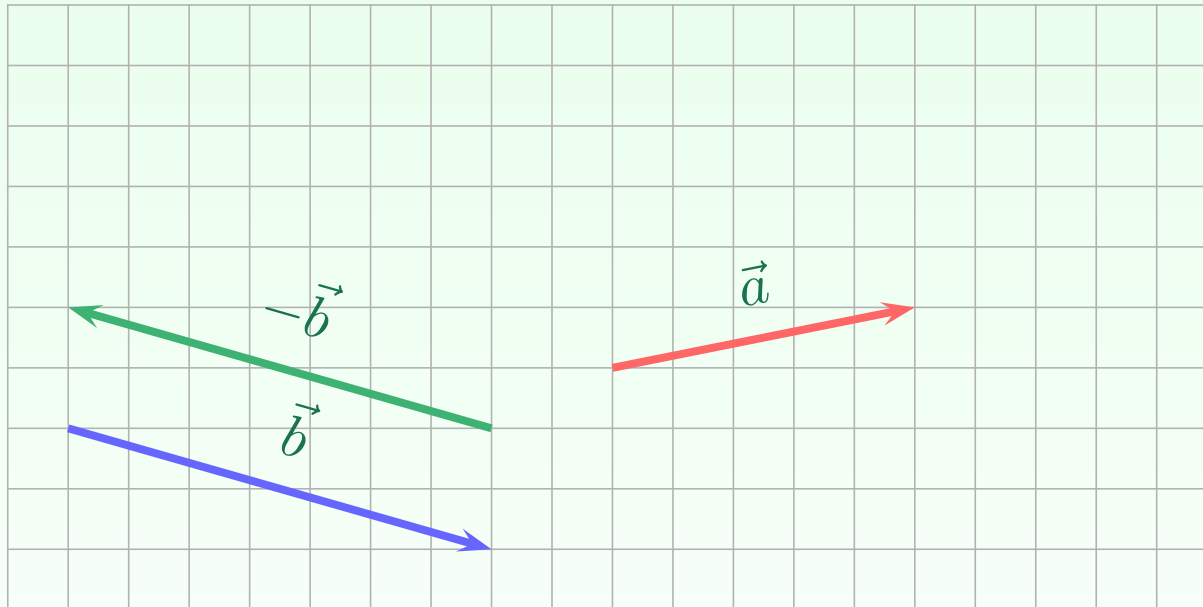
Vektoreiden \vec{a} ja \vec{b} erotus $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$



Vähennyslasku

- Yhteenlasku
- Yhteenlaskun ominaisuudet
- Vähennyslasku
- Vektorin kertominen skalaarilla
- Yksikkövektori

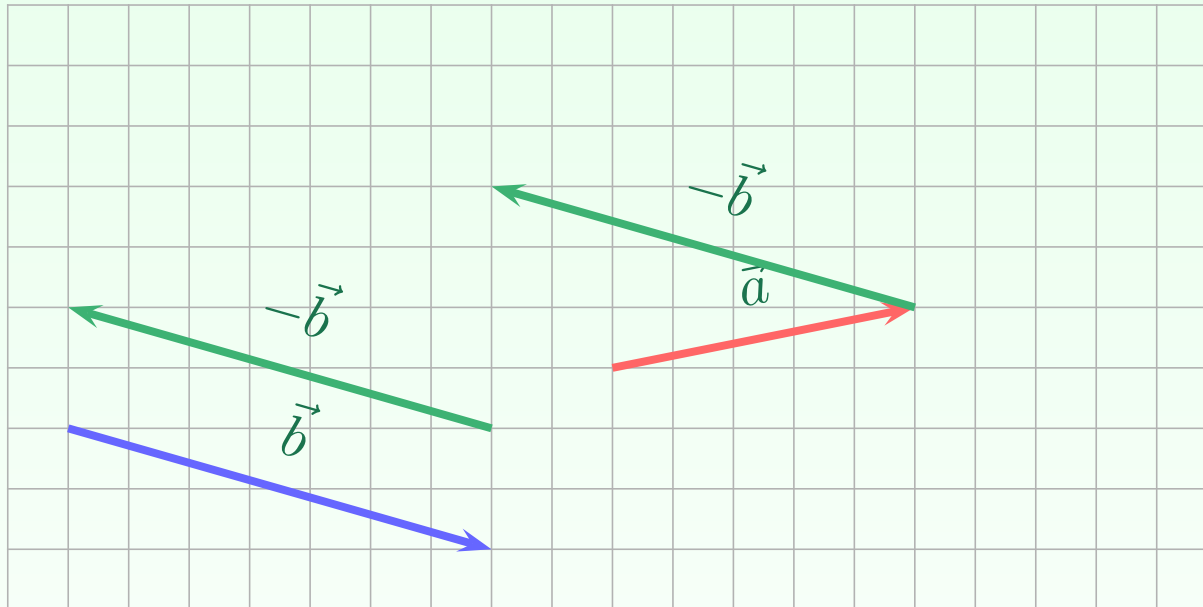
Vektoreiden \vec{a} ja \vec{b} erotus $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$



Vähennyslasku

- Yhteenlasku
- Yhteenlaskun ominaisuudet
- Vähennyslasku
- Vektorin kertominen skalaarilla
- Yksikkövektori

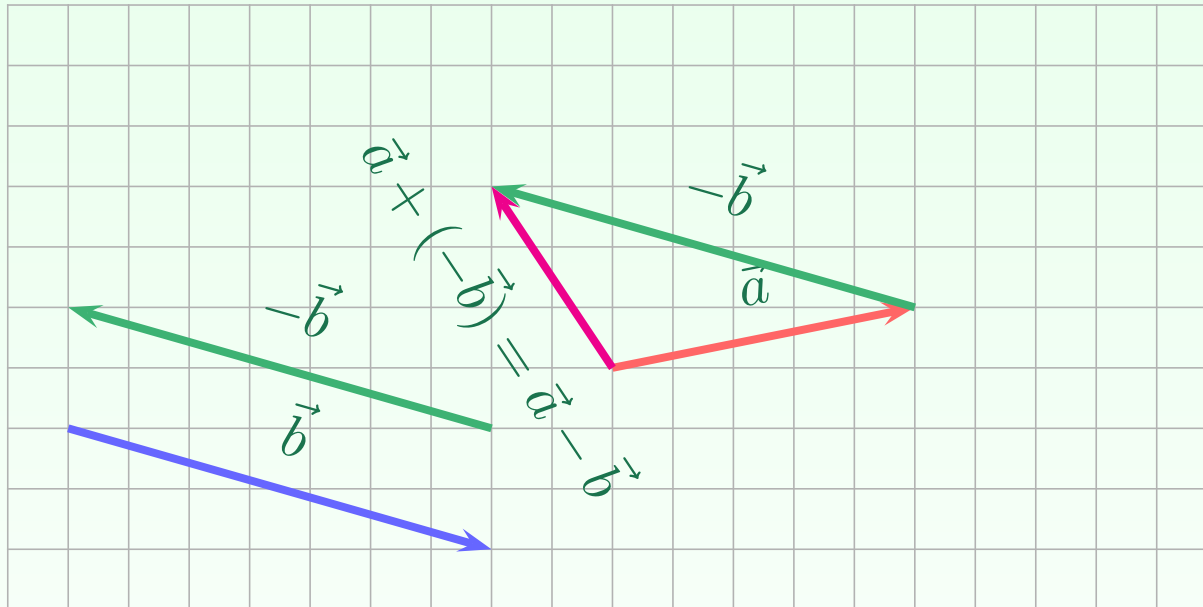
Vektoreiden \vec{a} ja \vec{b} erotus $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$



Vähennyslasku

- Yhteenlasku
- Yhteenlaskun ominaisuudet
- Vähennyslasku
- Vektorin kertominen skalaarilla
- Yksikkövektori

Vektoreiden \vec{a} ja \vec{b} erotus $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$



Esimerkki

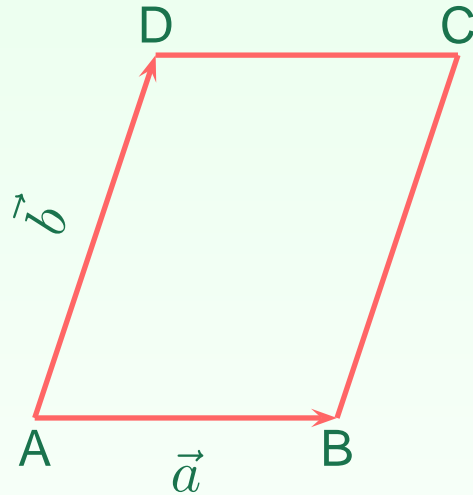
- Yhteenlasku
- Yhteenlaskun ominaisuudet
- **Vähennyslasku**
- Vektorin kertominen skalaarilla
- Yksikkövektori

Nelikulmio ABCD on suunnikas. Olkoon $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ja $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$.
Määritä suunnikkaan lävistäjävektorit \overrightarrow{AC} ja \overrightarrow{BD} vektoreiden \vec{a} ja \vec{b} avulla.

Esimerkki

- Yhteenlasku
- Yhteenlaskun ominaisuudet
- Vähennyslasku
- Vektorin kertominen skalaarilla
- Yksikkovektori

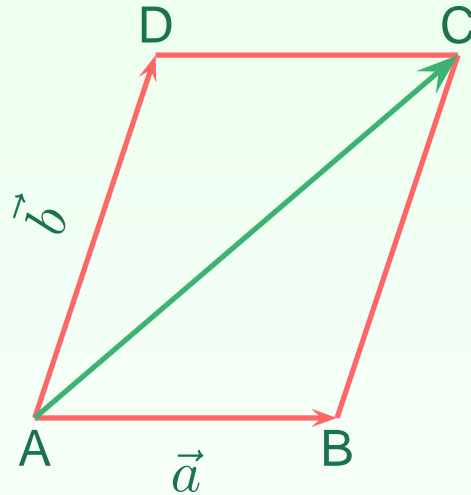
Nelikulmio ABCD on suunnikas. Olkoon $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ja $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$.
Määritä suunnikkaan lävistäjävektorit \overrightarrow{AC} ja \overrightarrow{BD} vektoreiden \vec{a} ja \vec{b} avulla.



Esimerkki

- Yhteenlasku
- Yhteenlaskun ominaisuudet
- Vähennyslasku
- Vektorin kertominen skalaarilla
- Yksikkövektori

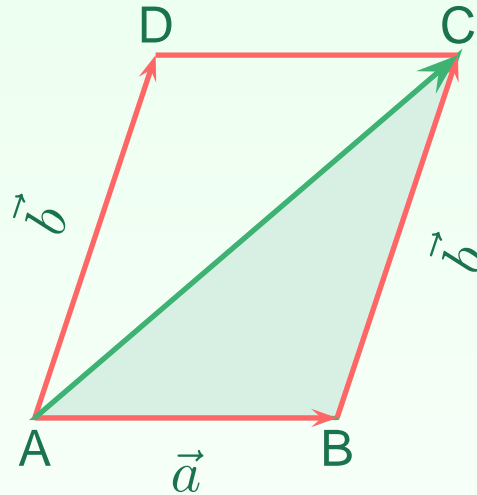
Nelikulmio ABCD on suunnikas. Olkoon $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ja $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$.
Määritä suunnikkaan lävistäjävektorit \overrightarrow{AC} ja \overrightarrow{BD} vektoreiden \vec{a} ja \vec{b} avulla.



Esimerkki

- Yhteenlasku
- Yhteenlaskun ominaisuudet
- Vähennyslasku
- Vektorin kertominen skalaarilla
- Yksikkövektori

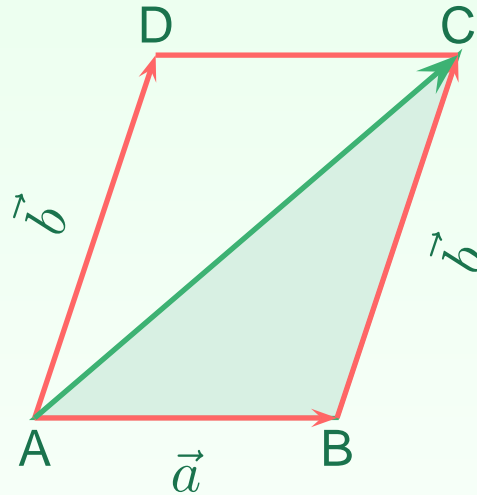
Nelikulmio ABCD on suunnikas. Olkoon $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ja $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$.
Määritä suunnikkaan lävistäjävektorit \overrightarrow{AC} ja \overrightarrow{BD} vektoreiden \vec{a} ja \vec{b} avulla.



Esimerkki

- Yhteenlasku
- Yhteenlaskun ominaisuudet
- Vähennyslasku
- Vektorin kertominen skalaarilla
- Yksikkövektori

Nelikulmio ABCD on suunnikas. Olkoon $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ja $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$.
Määritä suunnikkaan lävistäjävektorit \overrightarrow{AC} ja \overrightarrow{BD} vektoreiden \vec{a} ja \vec{b} avulla.

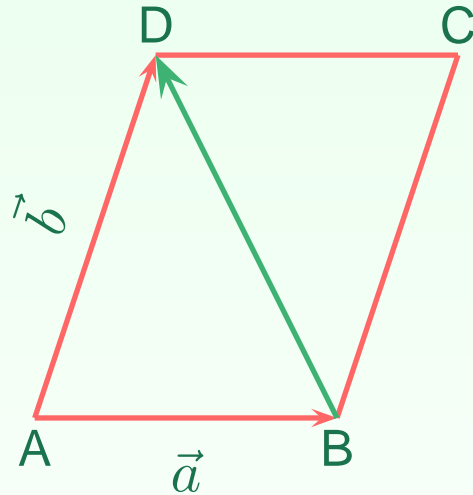


$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{a} + \vec{b}$$

Esimerkki

- Yhteenlasku
- Yhteenlaskun ominaisuudet
- **Vähennyslasku**
- Vektorin kertominen skalaarilla
- Yksikkovektori

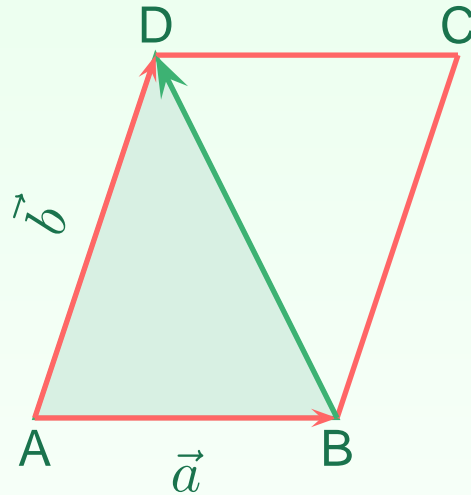
Nelikulmio ABCD on suunnikas. Olkoon $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ja $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$.
Määritä suunnikkaan lävistäjävektorit \overrightarrow{AC} ja \overrightarrow{BD} vektoreiden \vec{a} ja \vec{b} avulla.



Esimerkki

- Yhteenlasku
- Yhteenlaskun ominaisuudet
- Vähennyslasku
- Vektorin kertominen skalaarilla
- Yksikkövektori

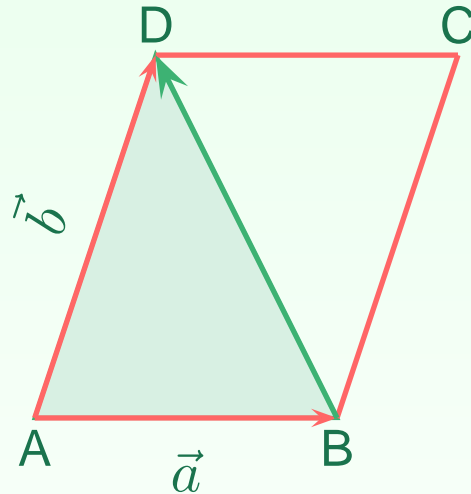
Nelikulmio ABCD on suunnikas. Olkoon $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ja $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$.
Määritä suunnikkaan lävistäjävektorit \overrightarrow{AC} ja \overrightarrow{BD} vektoreiden \vec{a} ja \vec{b} avulla.



Esimerkki

- Yhteenlasku
- Yhteenlaskun ominaisuudet
- Vähennyslasku
- Vektorin kertominen skalaarilla
- Yksikkovektori

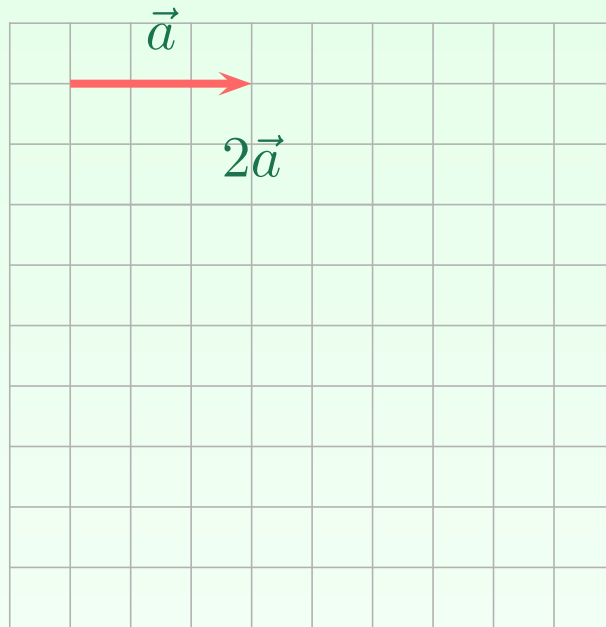
Nelikulmio ABCD on suunnikas. Olkoon $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ja $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$.
Määritä suunnikkaan lävistäjävektorit \overrightarrow{AC} ja \overrightarrow{BD} vektoreiden \vec{a} ja \vec{b} avulla.



$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = -\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} - \vec{a}$$

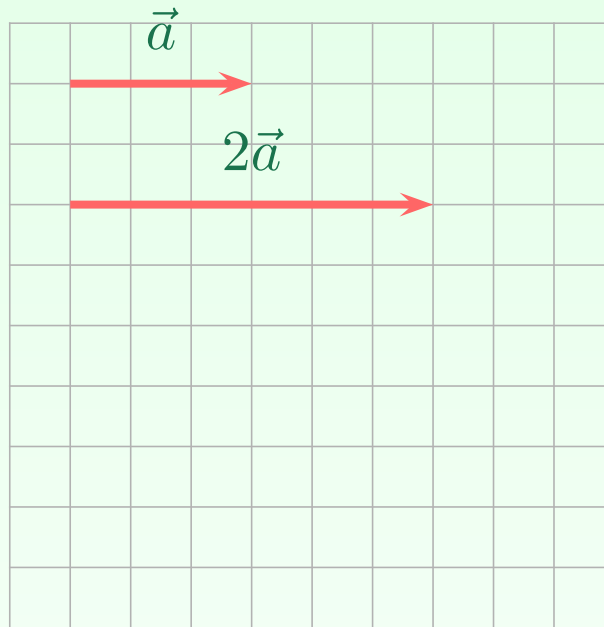
Vektorin kertominen skalaarilla

- Yhteenlasku
- Yhteenlaskun ominaisuudet
- Vähennyslasku
- Vektorin kertominen skalaarilla
- Yksikkövektori



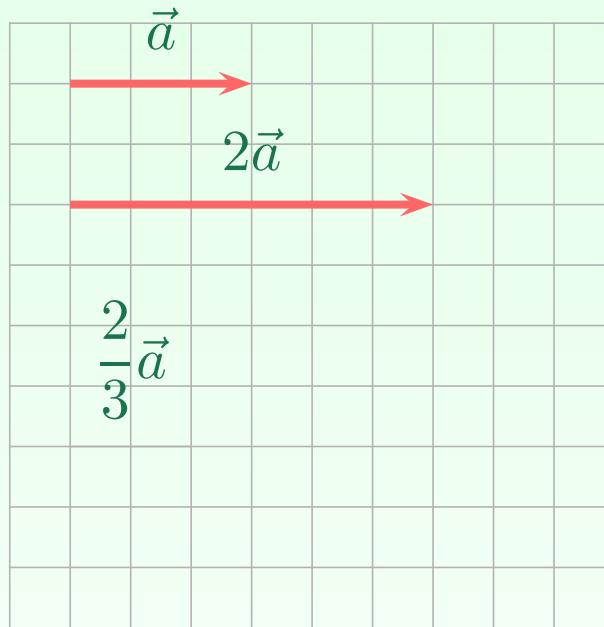
Vektorin kertominen skalaarilla

- Yhteenlasku
- Yhteenlaskun ominaisuudet
- Vähennyslasku
- Vektorin kertominen skalaarilla
- Yksikkövektori



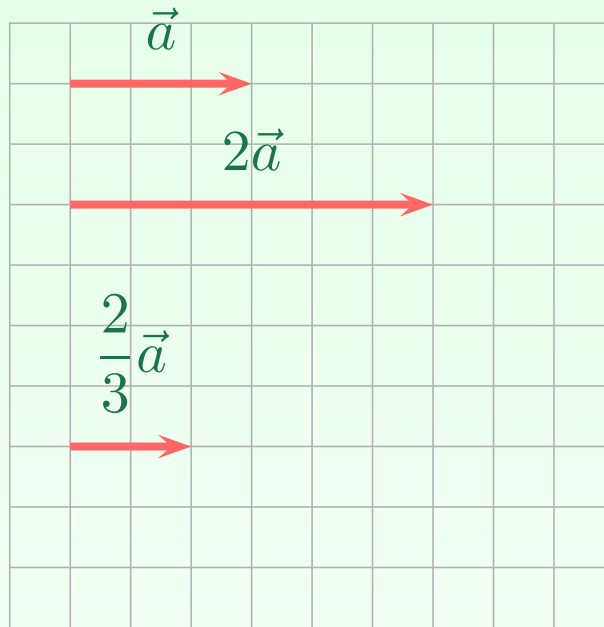
Vektorin kertominen skalaarilla

- Yhteenlasku
- Yhteenlaskun ominaisuudet
- Vähennyslasku
- Vektorin kertominen skalaarilla
- Yksikkövektori



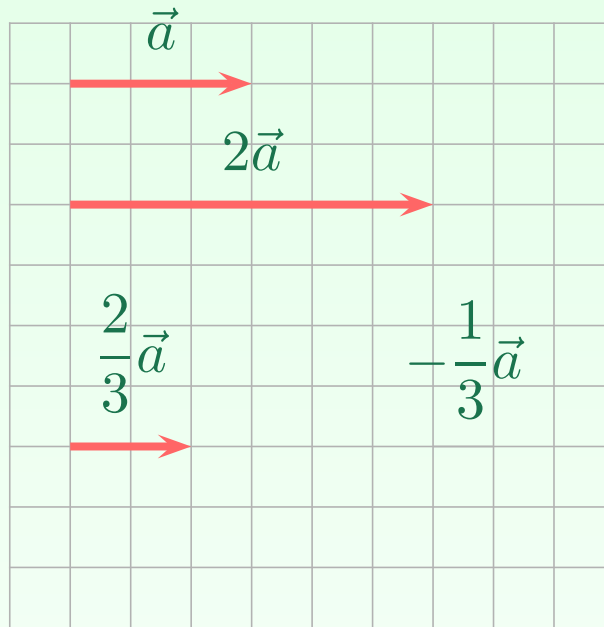
Vektorin kertominen skalaarilla

- Yhteenlasku
- Yhteenlaskun ominaisuudet
- Vähennyslasku
- Vektorin kertominen skalaarilla
- Yksikkövektori



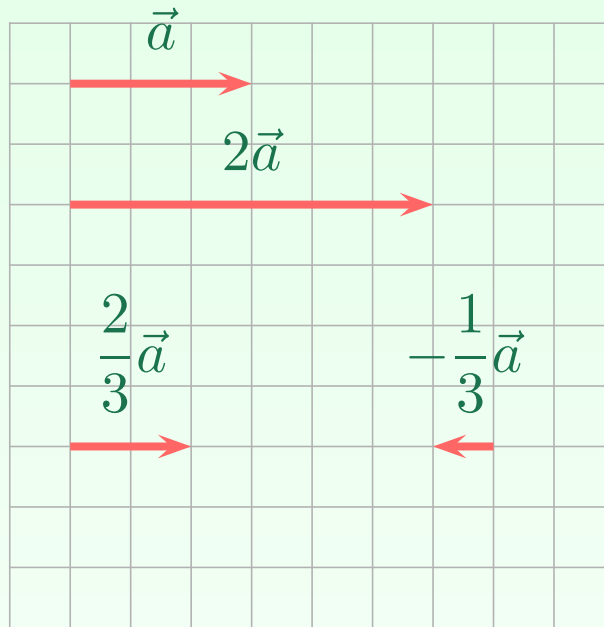
Vektorin kertominen skalaarilla

- Yhteenlasku
- Yhteenlaskun ominaisuudet
- Vähennyslasku
- Vektorin kertominen skalaarilla
- Yksikkövektori



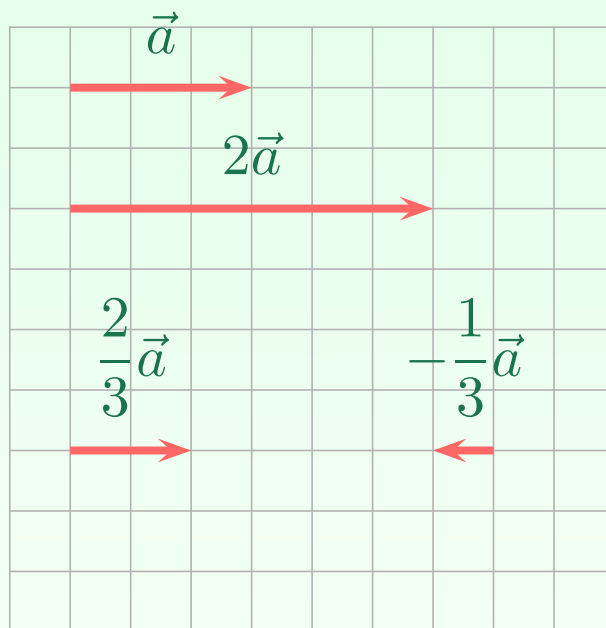
Vektorin kertominen skalaarilla

- Yhteenlasku
- Yhteenlaskun ominaisuudet
- Vähennyslasku
- Vektorin kertominen skalaarilla
- Yksikkövektori



Vektorin kertominen skalaarilla

- Yhteenlasku
- Yhteenlaskun ominaisuudet
- Vähennyslasku
- Vektorin kertominen skalaarilla
- Yksikkövektori



Olkoon $t \in \mathbb{R}, t \neq 0, \vec{a} \neq \vec{0}$. Silloin $t\vec{a}$ on vektori, jolle on voimassa:

$$t\vec{a}\text{:n pituus } |t\vec{a}| = |t||\vec{a}|,$$

$$t\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{a}, \text{ jos } t > 0 \text{ ja } t\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a}, \text{ jos } t < 0.$$

Jos $t = 0$ tai $\vec{a} = \vec{0}$, niin $t\vec{a} = \vec{0}$.

Esimerkki

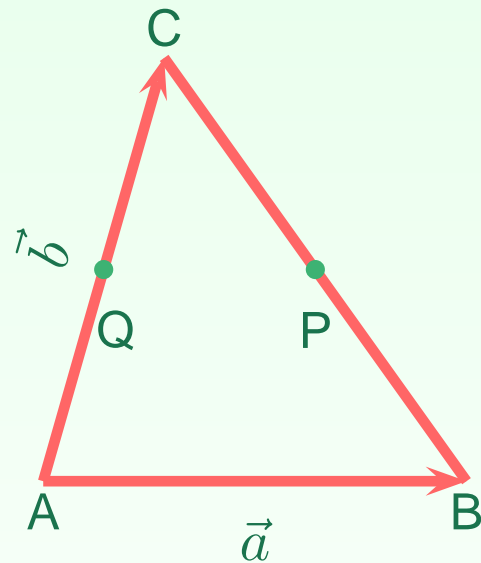
- Yhteenlasku
- Yhteenlaskun ominaisuudet
- Vähennyslasku
- Vektorin kertominen skalaarilla
- Yksikkövektori

Kolmiossa ABC on $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ja $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$. Piste P on sivun BC ja Q sivun AC keskipiste. Esitä vektori \overrightarrow{PQ} vektoreiden \vec{a} ja \vec{b} avulla.

Esimerkki

- Yhteenlasku
- Yhteenlaskun ominaisuudet
- Vähennyslasku
- Vektorin kertominen skalaarilla
- Yksikkövektori

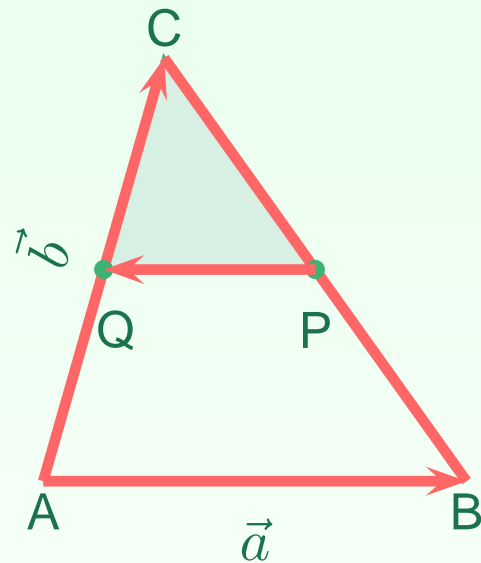
Kolmiossa ABC on $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ja $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$. Piste P on sivun BC ja Q sivun AC keskipiste. Esitä vektori \overrightarrow{PQ} vektoreiden \vec{a} ja \vec{b} avulla.



Esimerkki

- Yhteenlasku
- Yhteenlaskun ominaisuudet
- Vähennyslasku
- Vektorin kertominen skalaarilla
- Yksikkövektori

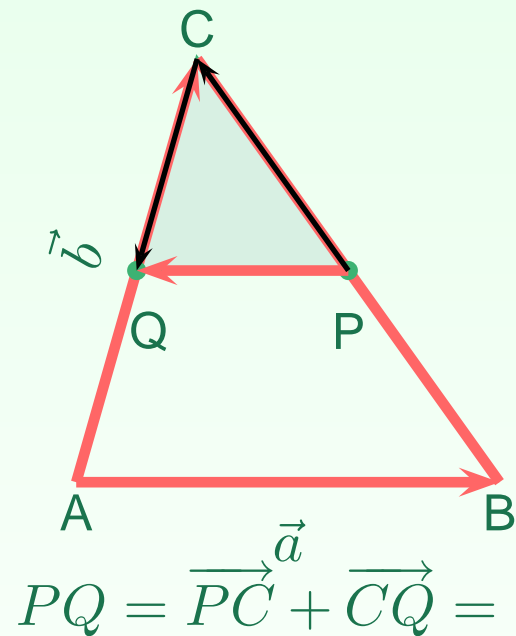
Kolmiossa ABC on $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ja $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$. Piste P on sivun BC ja Q sivun AC keskipiste. Esitä vektori \overrightarrow{PQ} vektoreiden \vec{a} ja \vec{b} avulla.



Esimerkki

- Yhteenlasku
- Yhteenlaskun ominaisuudet
- Vähennyslasku
- Vektorin kertominen skalaarilla
- Yksikkovektori

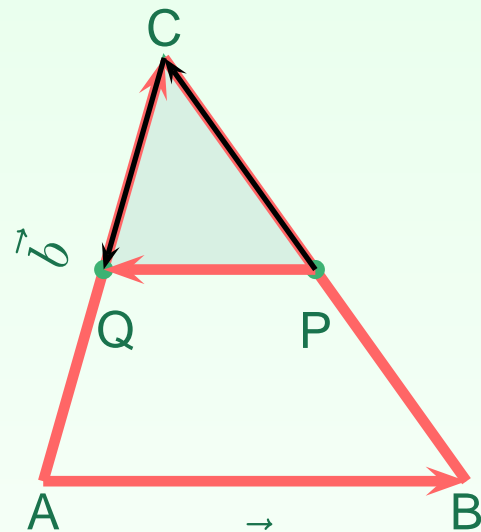
Kolmiossa ABC on $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ja $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$. Piste P on sivun BC ja Q sivun AC keskipiste. Esitä vektori \overrightarrow{PQ} vektoreiden \vec{a} ja \vec{b} avulla.



Esimerkki

- Yhteenlasku
- Yhteenlaskun ominaisuudet
- Vähennyslasku
- Vektorin kertominen skalaarilla
- Yksikkövektori

Kolmiossa ABC on $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ja $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$. Piste P on sivun BC ja Q sivun AC keskipiste. Esitä vektori \overrightarrow{PQ} vektoreiden \vec{a} ja \vec{b} avulla.

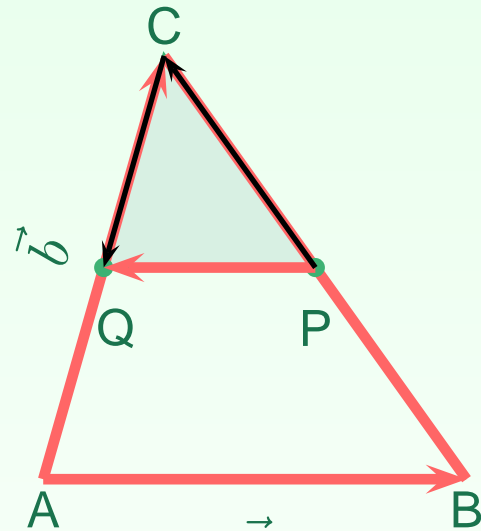


$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} =$$

Esimerkki

- Yhteenlasku
- Yhteenlaskun ominaisuudet
- Vähennyslasku
- Vektorin kertominen skalaarilla
- Yksikkövektori

Kolmiossa ABC on $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ja $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$. Piste P on sivun BC ja Q sivun AC keskipiste. Esitä vektori \overrightarrow{PQ} vektoreiden \vec{a} ja \vec{b} avulla.

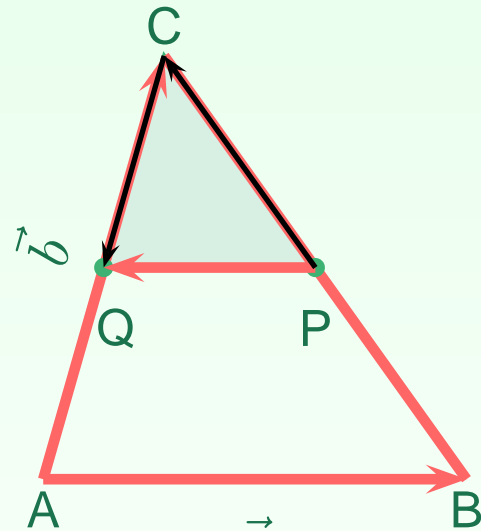


$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} = \frac{1}{2}(-\vec{a} + \vec{b}) - \frac{1}{2}\vec{b}$$

Esimerkki

- Yhteenlasku
- Yhteenlaskun ominaisuudet
- Vähennyslasku
- Vektorin kertominen skalaarilla
- Yksikkovektori

Kolmiossa ABC on $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ja $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$. Piste P on sivun BC ja Q sivun AC keskipiste. Esitä vektori \overrightarrow{PQ} vektoreiden \vec{a} ja \vec{b} avulla.



$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} = \frac{1}{2}(-\vec{a} + \vec{b}) - \frac{1}{2}\vec{b} = -\frac{1}{2}\vec{a}$$

Johtopäätös?

Yksikkövektori

- Yhteenlasku
- Yhteenlaskun ominaisuudet
- Vähennyslasku
- Vektorin kertominen skalaarilla
- **Yksikkövektori**

Vektorin \vec{a} ($\vec{a} \neq 0$) suuntainen *yksikkövektori* on

$$\vec{a}^0 = \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}.$$

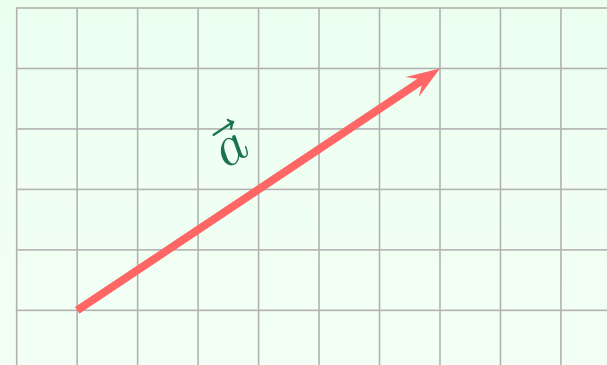
Yksikkövektori

- Yhteenlasku
- Yhteenlaskun ominaisuudet
- Vähennyslasku
- Vektorin kertominen skalaarilla
- Yksikkövektori

Vektorin \vec{a} ($\vec{a} \neq 0$) suuntainen *yksikkövektori* on

$$\vec{a}^0 = \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}.$$

Esimerkki. Mikä on vektorin \vec{a} yksikkövektori? Mikä on vektorin \vec{a} suuntainen vektori, jonka pituus on 3? Koordinaatiston ruutu on yksi yksikkö.



Yksikkövektori

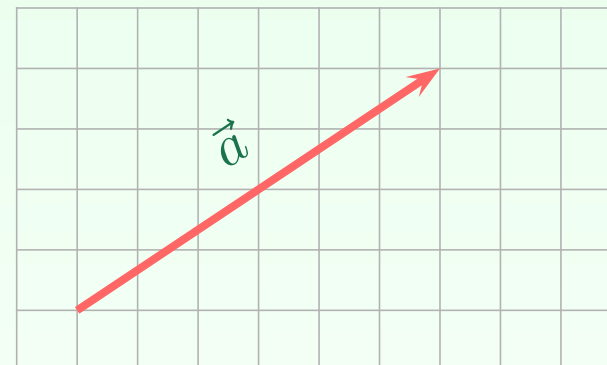
- Yhteenlasku
- Yhteenlaskun ominaisuudet
- Vähennyslasku
- Vektorin kertominen skalaarilla
- Yksikkövektori

Vektorin \vec{a} ($\vec{a} \neq 0$) suuntainen *yksikkövektori* on

$$\vec{a}^0 = \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}.$$

Esimerkki. Mikä on vektorin \vec{a} yksikkövektori? Mikä on vektorin \vec{a} suuntainen vektori, jonka pituus on 3? Koordinaatiston ruutu on yksi yksikkö.

$$|\vec{a}| =$$



Yksikkövektori

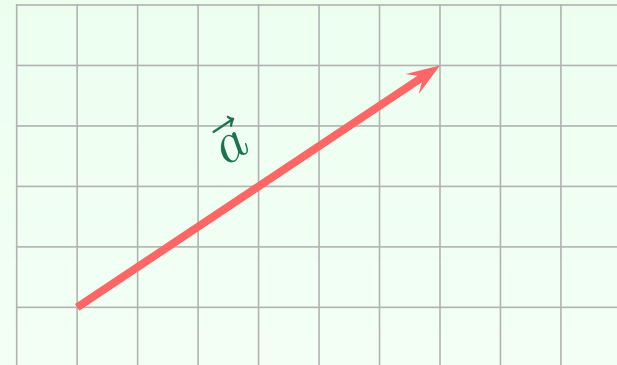
- Yhteenlasku
- Yhteenlaskun ominaisuudet
- Vähennyslasku
- Vektorin kertominen skalaarilla
- Yksikkövektori

Vektorin \vec{a} ($\vec{a} \neq 0$) suuntainen *yksikkövektori* on

$$\vec{a}^0 = \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}.$$

Esimerkki. Mikä on vektorin \vec{a} yksikkövektori? Mikä on vektorin \vec{a} suuntainen vektori, jonka pituus on 3? Koordinaatiston ruutu on yksi yksikkö.

$$|\vec{a}| = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52}$$



Yksikkövektori

- Yhteenlasku
- Yhteenlaskun ominaisuudet
- Vähennyslasku
- Vektorin kertominen skalaarilla
- Yksikkövektori

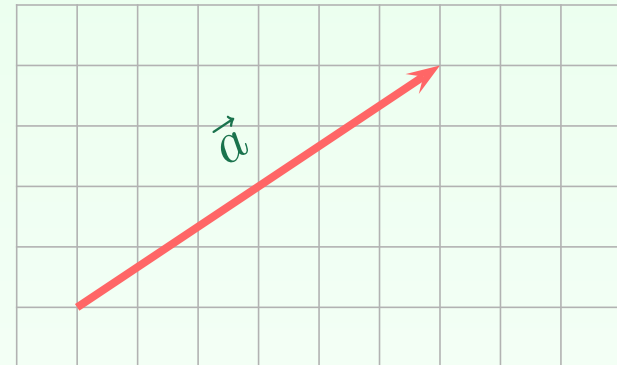
Vektorin \vec{a} ($\vec{a} \neq 0$) suuntainen *yksikkövektori* on

$$\vec{a}^0 = \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}.$$

Esimerkki. Mikä on vektorin \vec{a} yksikkövektori? Mikä on vektorin \vec{a} suuntainen vektori, jonka pituus on 3? Koordinaatiston ruutu on yksi yksikkö.

$$|\vec{a}| = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52}$$

$$\vec{a}^0 =$$



Yksikkövektori

- Yhteenlasku
- Yhteenlaskun ominaisuudet
- Vähennyslasku
- Vektorin kertominen skalaarilla
- Yksikkövektori

Vektorin \vec{a} ($\vec{a} \neq 0$) suuntainen *yksikkövektori* on

$$\vec{a}^0 = \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}.$$

Esimerkki. Mikä on vektorin \vec{a} yksikkövektori? Mikä on vektorin \vec{a} suuntainen vektori, jonka pituus on 3? Koordinaatiston ruutu on yksi yksikkö.

$$|\vec{a}| = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52}$$
$$\vec{a}^0 = \frac{1}{\sqrt{52}} \vec{a}$$

