

Funktion derivaatta

Hannu Lehto
Lahden Lyseon lukio



Keskimääräinen muutosnopeus

- Keskimääräinen muutosnopeus

- Hetkellinen muutosnopeus

- Erotusosamäärä

- Derivaatta

- Derivoituvuus

- Derivoituvuus ja jatkuvuus

- Derivaattafunktio

- Derivointisääntöjä

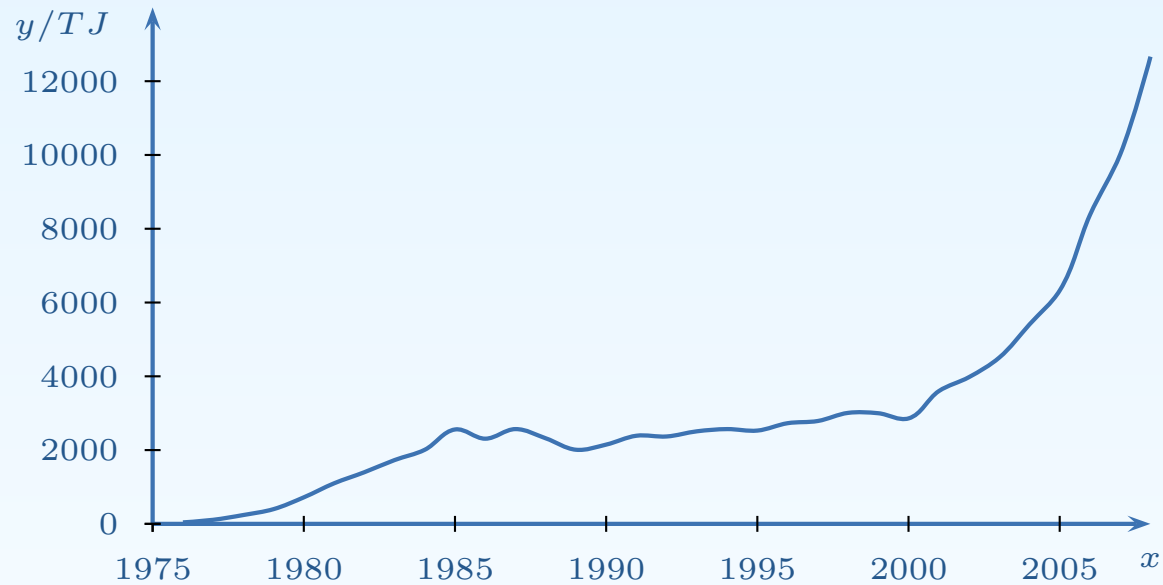
Lämpöpumpuilla vuosittain Suomessa tuotettu energia $y(TJ)$ ¹

¹Lähde: Tilastokeskus

Keskimääräinen muutosnopeus

- Keskimääräinen muutosnopeus
- Hetkellinen muutosnopeus
- Erotusosamäärä
- Derivaatta
- Derivoituvuus
- Derivoituvuus ja jatkuvuus
- Derivaattafunktio
- Derivointisääntöjä

Lämpöpumpuilla vuosittain Suomessa tuotettu energia $y(TJ)$ ¹

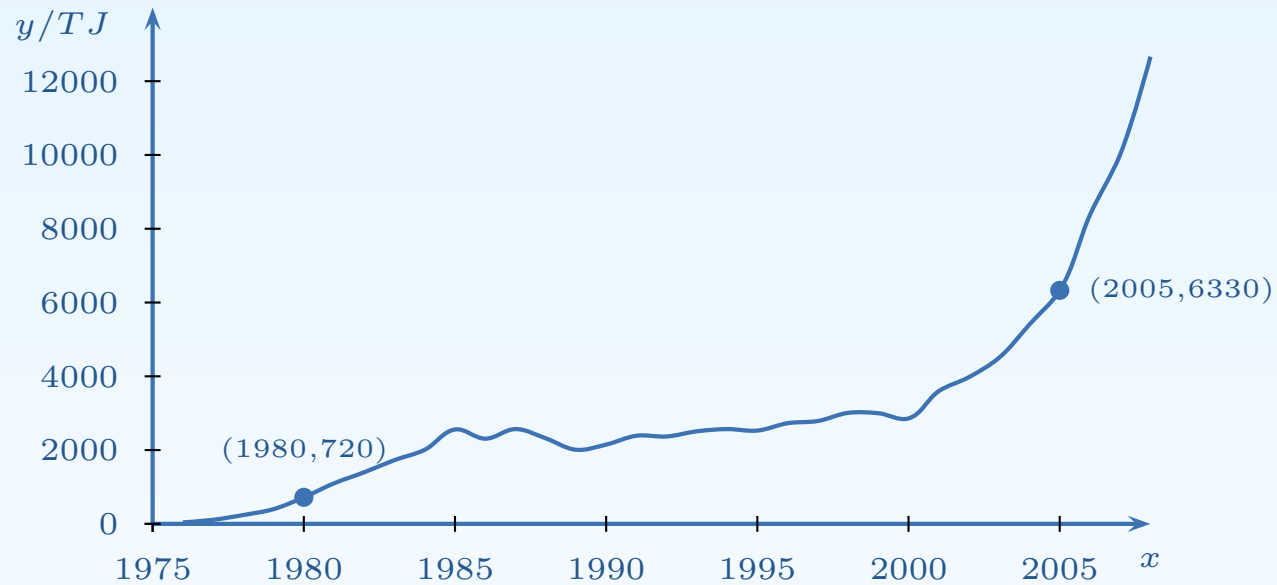


¹Lähde: Tilastokeskus

Keskimääräinen muutosnopeus

- Keskimääräinen muutosnopeus
- Hetkellinen muutosnopeus
- Erotusosamäärä
- Derivaatta
- Derivoituvuus
- Derivoituvuus ja jatkuvuus
- Derivaattafunktio
- Derivointisääntöjä

Lämpöpumpuilla vuosittain Suomessa tuotettu energia $y(TJ)$ ¹



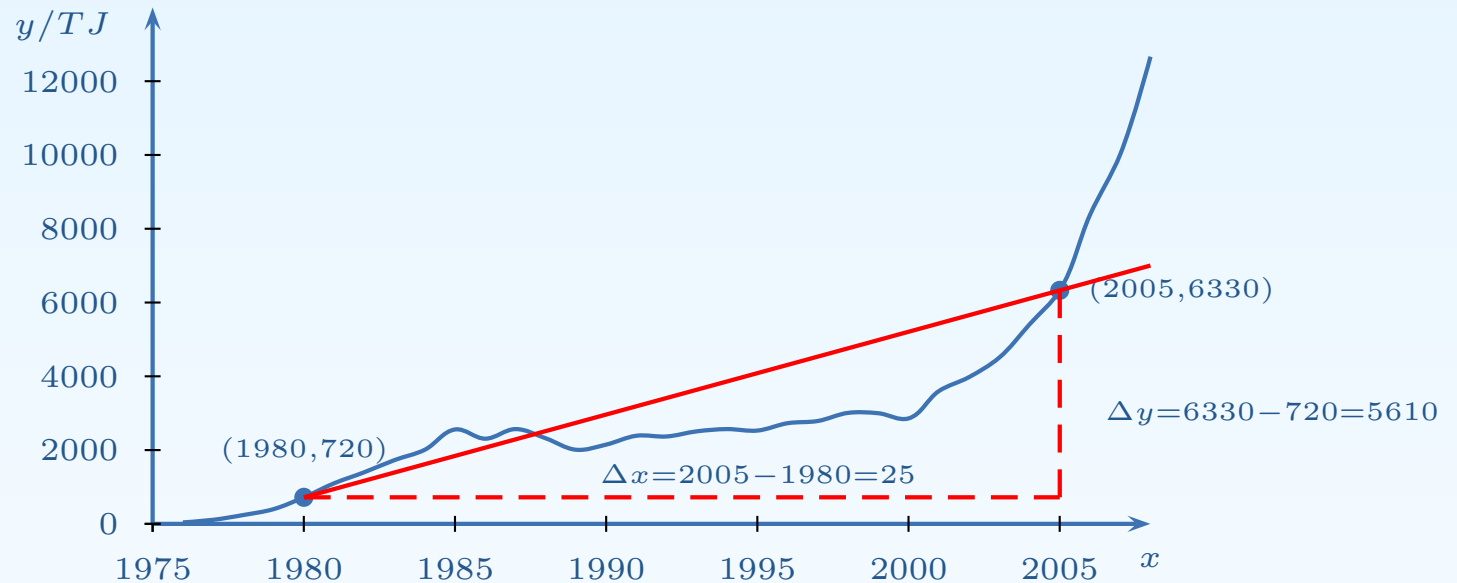
Keskimääräinen vuotuinen muutosnopeus vuosina 1980–2005

¹Lähde: Tilastokeskus

Keskimääräinen muutosnopeus

- Keskimääräinen muutosnopeus
- Hetkellinen muutosnopeus
- Erotusosamäärä
- Derivaatta
- Derivoituvuus
- Derivoituvuus ja jatkuvuus
- Derivaattafunktio
- Derivointisääntöjä

Lämpöpumpuilla vuosittain Suomessa tuotettu energia $y(TJ)$ ¹



Keskimääräinen vuotuinen muutosnopeus vuosina 1980–2005

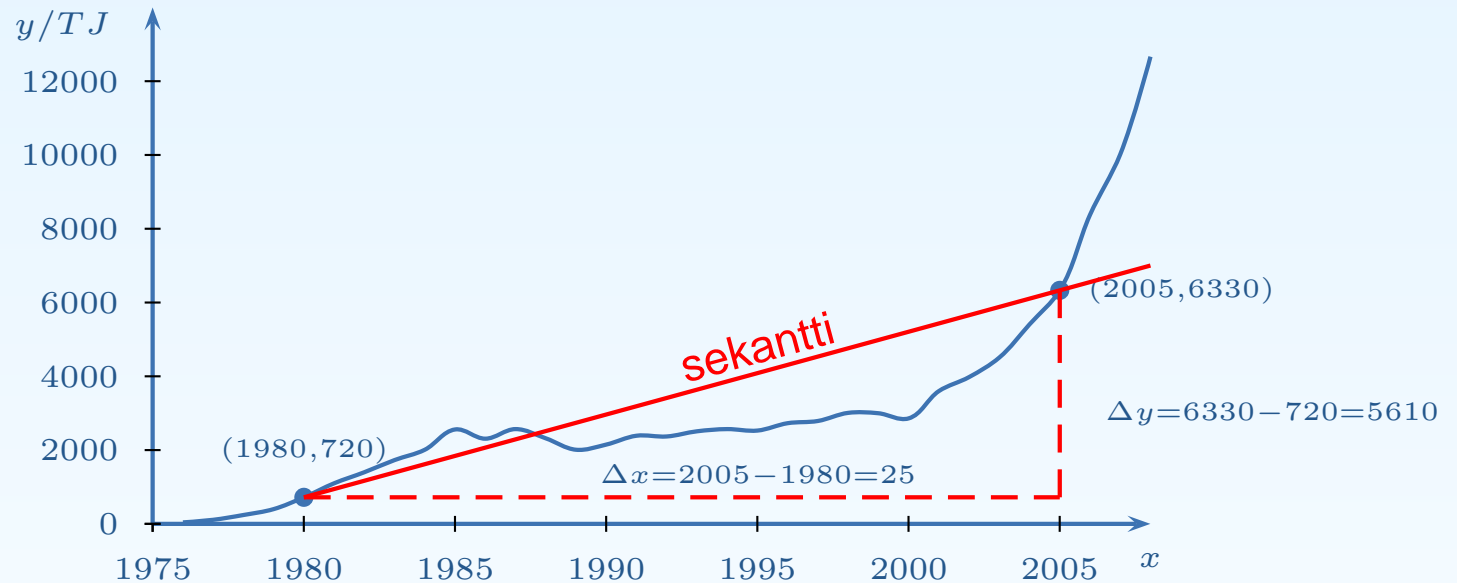
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5610}{25} \approx 220(\text{TJ/vuosi})$$

¹Lähde: Tilastokeskus

Keskimääräinen muutosnopeus

- Keskimääräinen muutosnopeus
- Hetkellinen muutosnopeus
- Erotusosamäärä
- Derivaatta
- Derivoituvuus
- Derivoituvuus ja jatkuvuus
- Derivaattafunktio
- Derivointisääntöjä

Lämpöpumpuilla vuosittain Suomessa tuotettu energia $y(TJ)$ ¹



Keskimääräinen vuotuinen muutosnopeus vuosina 1980–2005

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5610}{25} \approx 220(\text{TJ/vuosi})$$

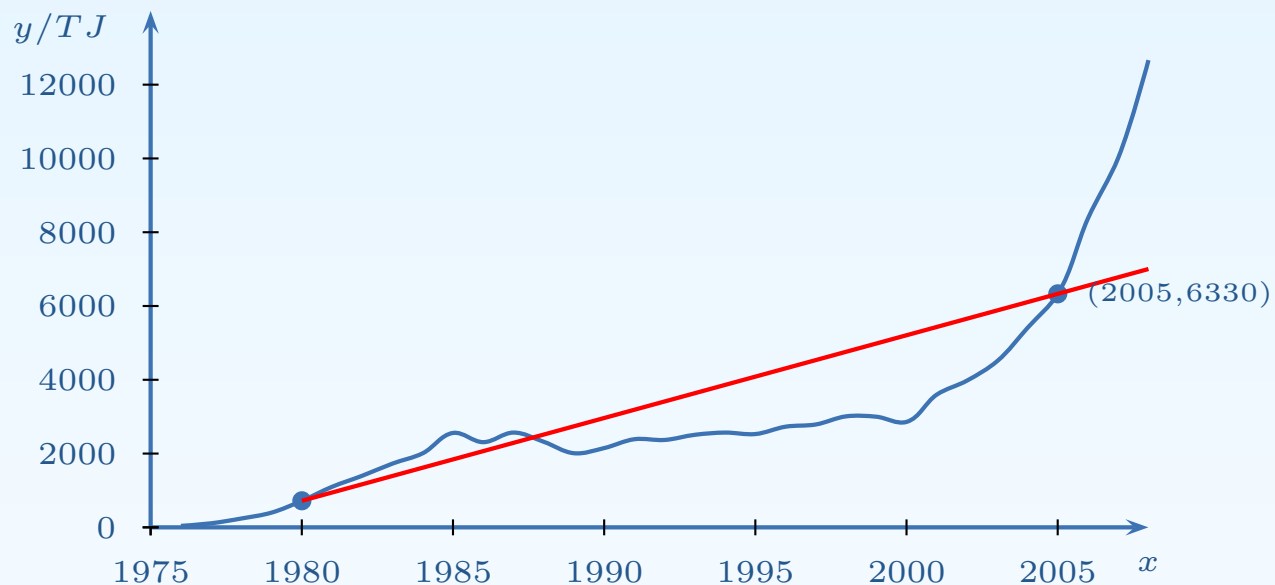
on sekantin kulmakerroin.

¹Lähde: Tilastokeskus

Hetkellinen muutosnopeus

- Keskimääräinen muutosnopeus
- **Hetkellinen muutosnopeus**
- Erotusosamäärä
- Derivaatta
- Derivoituvuus
- Derivoituvuus ja jatkuvuus
- Derivaattafunktio
- Derivointisääntöjä

Lämpöpumpuilla vuosittain Suomessa tuotettu energia $y(TJ)$

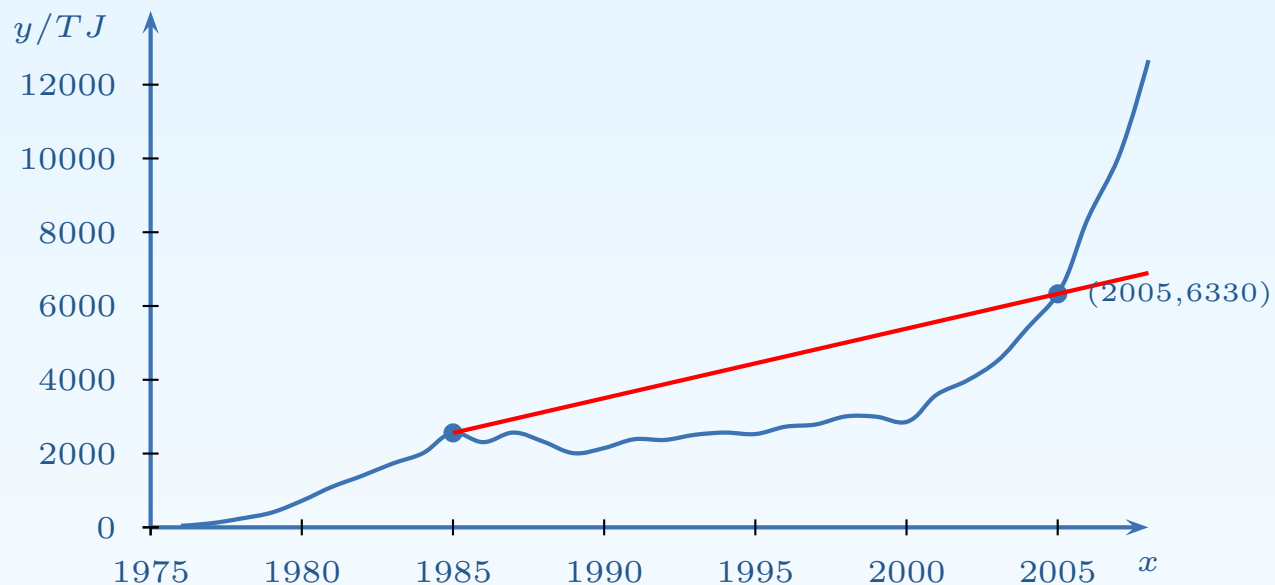


Hetkellinen muutosnopeus vuonna 2005

Hetkellinen muutosnopeus

- Keskimääräinen muutosnopeus
- **Hetkellinen muutosnopeus**
- Erotusosamäärä
- Derivaatta
- Derivoituvuus
- Derivoituvuus ja jatkuvuus
- Derivaattafunktio
- Derivointisääntöjä

Lämpöpumpuilla vuosittain Suomessa tuotettu energia $y(TJ)$

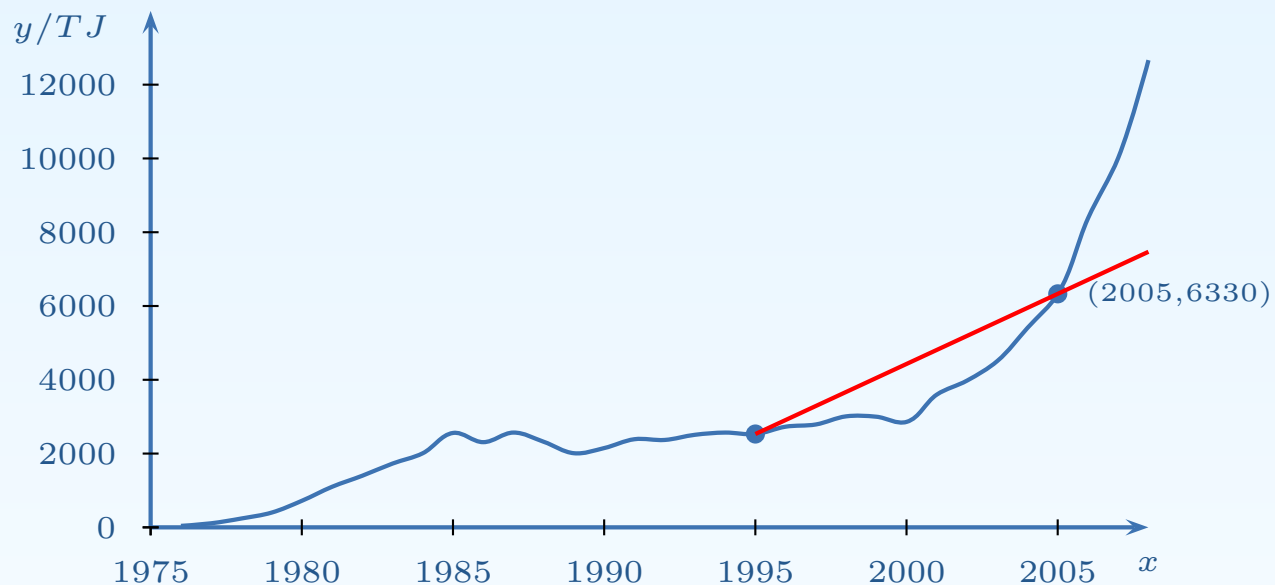


Hetkellinen muutosnopeus vuonna 2005

Hetkellinen muutosnopeus

- Keskimääräinen muutosnopeus
- **Hetkellinen muutosnopeus**
- Erotusosamäärä
- Derivaatta
- Derivoituvuus
- Derivoituvuus ja jatkuvuus
- Derivaattafunktio
- Derivointisääntöjä

Lämpöpumpuilla vuosittain Suomessa tuotettu energia $y(TJ)$

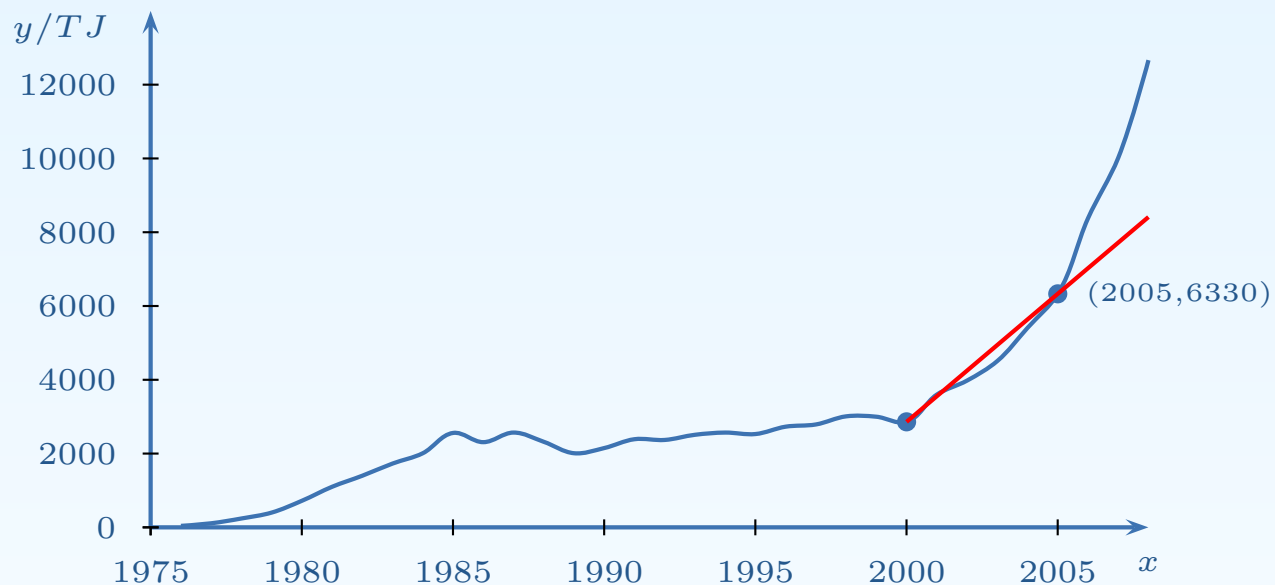


Hetkellinen muutosnopeus vuonna 2005

Hetkellinen muutosnopeus

- Keskimääräinen muutosnopeus
- **Hetkellinen muutosnopeus**
- Erotusosamäärä
- Derivaatta
- Derivoituvuus
- Derivoituvuus ja jatkuvuus
- Derivaattafunktio
- Derivointisääntöjä

Lämpöpumpuilla vuosittain Suomessa tuotettu energia $y(TJ)$

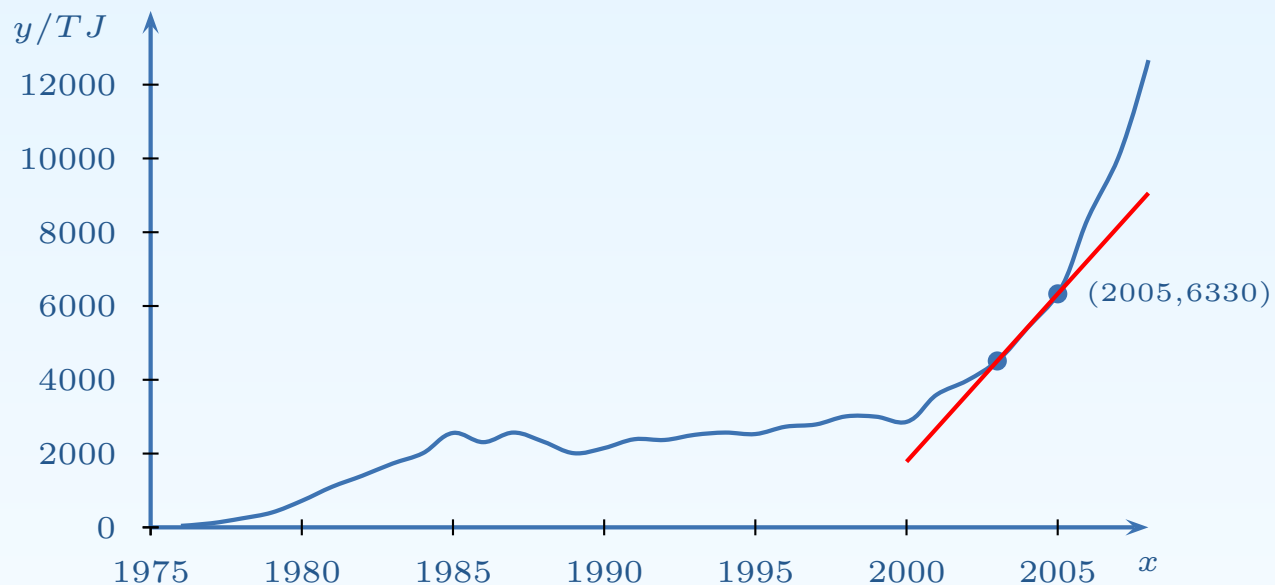


Hetkellinen muutosnopeus vuonna 2005

Hetkellinen muutosnopeus

- Keskimääräinen muutosnopeus
- **Hetkellinen muutosnopeus**
- Erotusosamäärä
- Derivaatta
- Derivoituvuus
- Derivoituvuus ja jatkuvuus
- Derivaattafunktio
- Derivointisääntöjä

Lämpöpumpuilla vuosittain Suomessa tuotettu energia $y(TJ)$

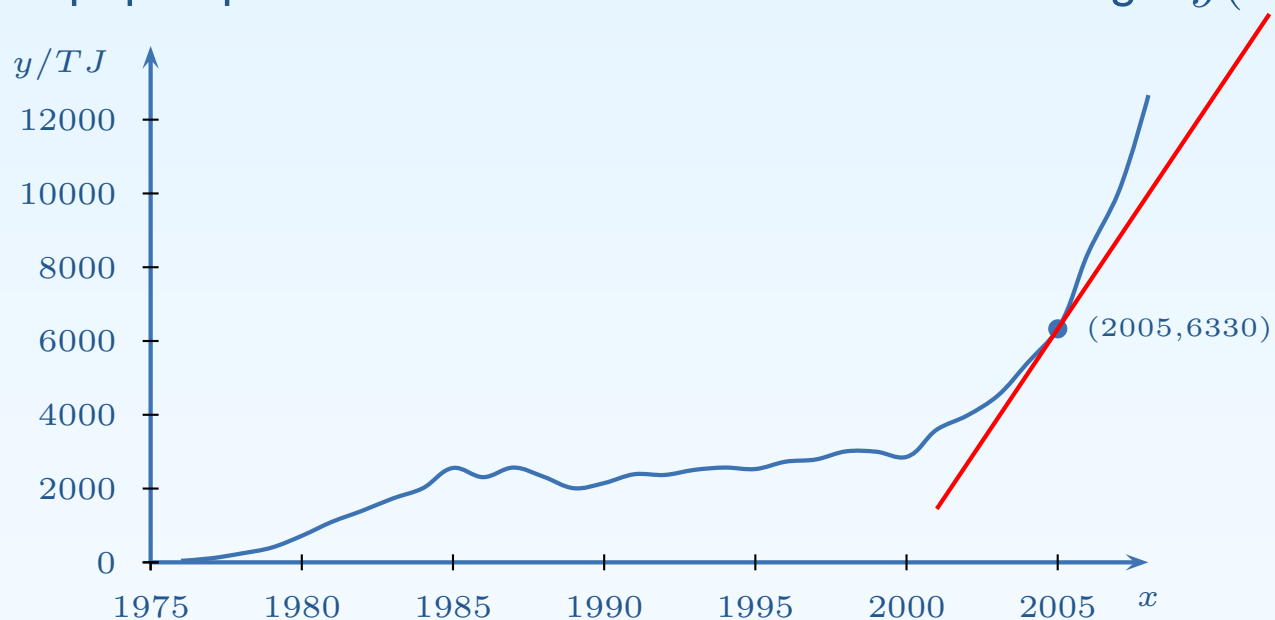


Hetkellinen muutosnopeus vuonna 2005

Hetkellinen muutosnopeus

- Keskimääräinen muutosnopeus
- **Hetkellinen muutosnopeus**
- Erotusosamäärä
- Derivaatta
- Derivoituvuus
- Derivoituvuus ja jatkuvuus
- Derivaattafunktio
- Derivointisääntöjä

Lämpöpumpuilla vuosittain Suomessa tuotettu energia $y(TJ)$

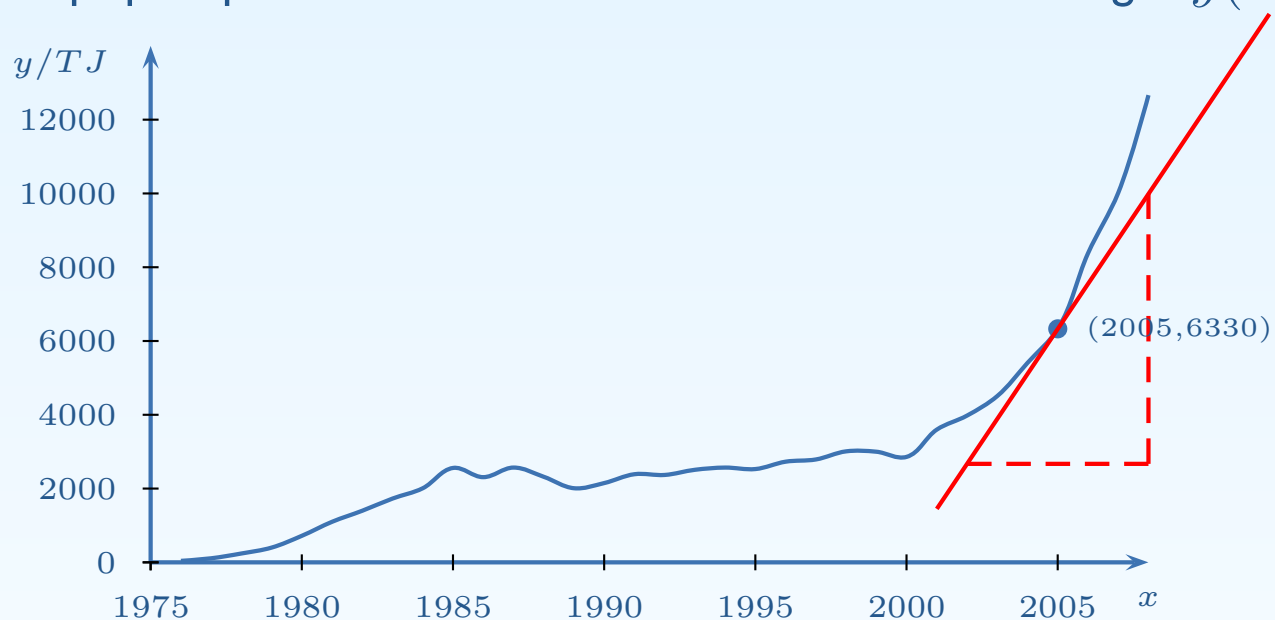


Hetkellinen muutosnopeus vuonna 2005 on kohtaan $x = 2005$ piirretyn tangentin kulmakerroin

Hetkellinen muutosnopeus

- Keskimääräinen muutosnopeus
- **Hetkellinen muutosnopeus**
- Erotusosamäärä
- Derivaatta
- Derivoituvuus
- Derivoituvuus ja jatkuvuus
- Derivaattafunktio
- Derivointisääntöjä

Lämpöpumpuilla vuosittain Suomessa tuotettu energia $y(TJ)$

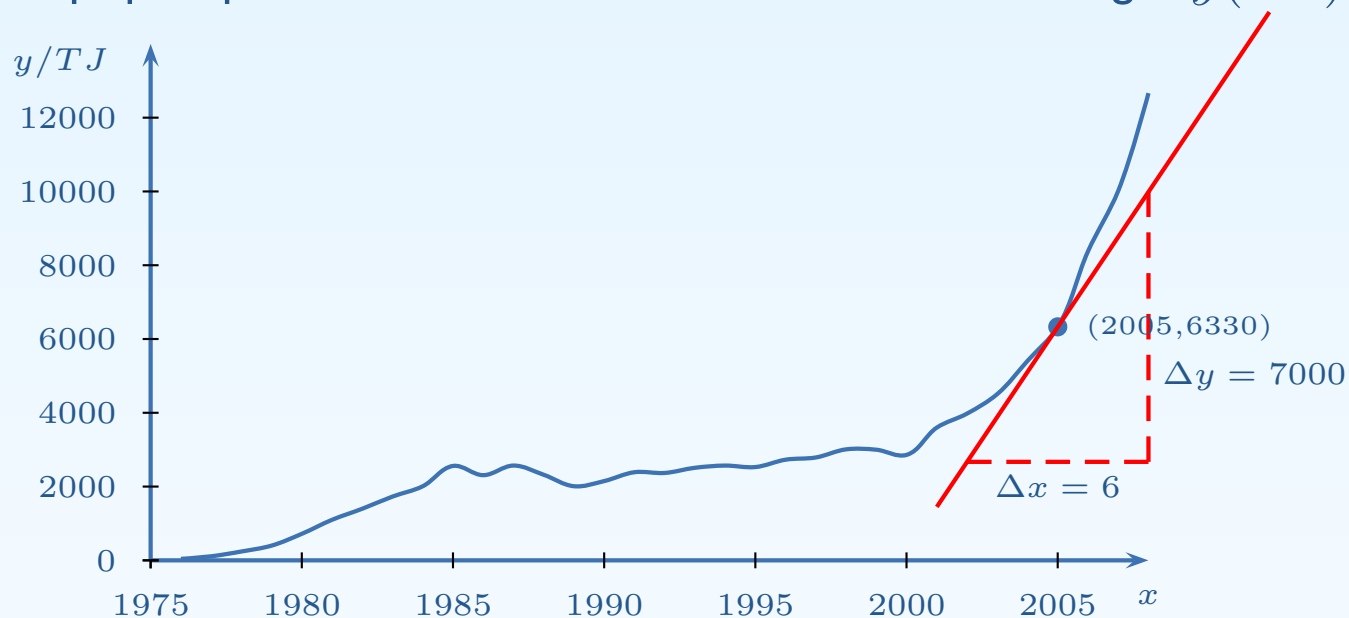


Hetkellinen muutosnopeus vuonna 2005 on kohtaan $x = 2005$ piirretyn tangentin kulmakerroin

Hetkellinen muutosnopeus

- Keskimääräinen muutosnopeus
- **Hetkellinen muutosnopeus**
- Erotusosamäärä
- Derivaatta
- Derivoituvuus
- Derivoituvuus ja jatkuvuus
- Derivaattafunktio
- Derivointisääntöjä

Lämpöpumpuilla vuosittain Suomessa tuotettu energia $y(TJ)$

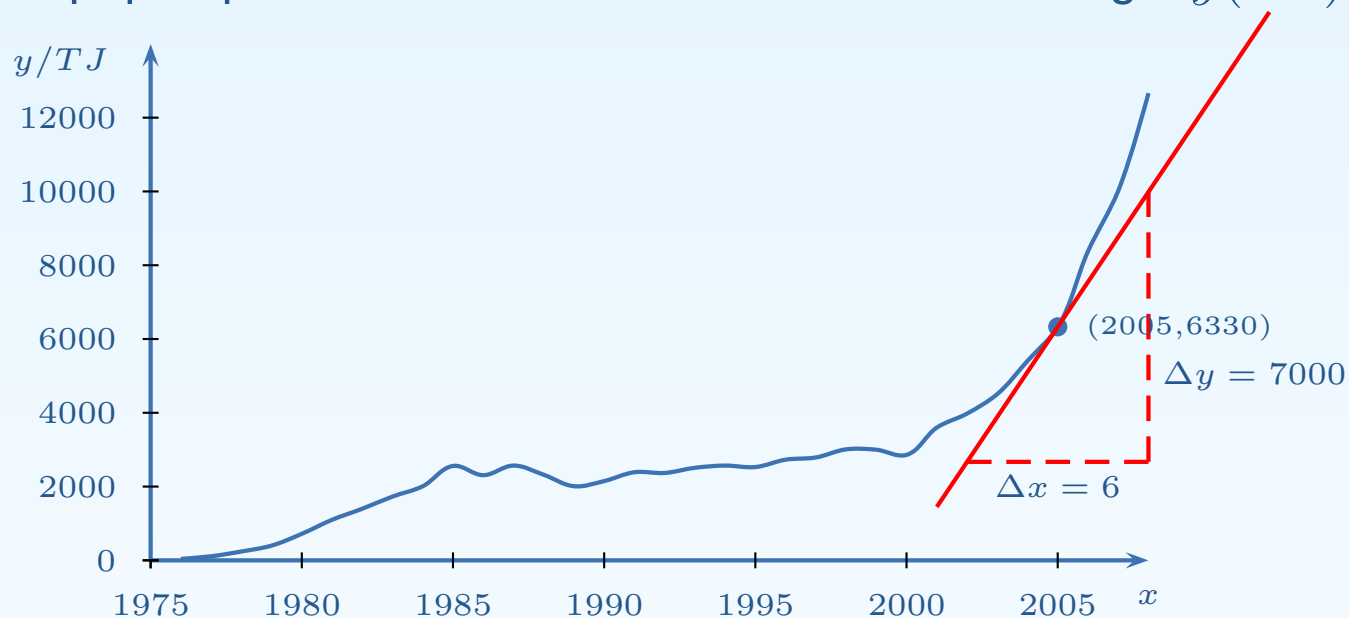


Hetkellinen muutosnopeus vuonna 2005 on kohtaan $x = 2005$ piirretyn tangentin kulmakerroin

Hetkellinen muutosnopeus

- Keskimääräinen muutosnopeus
- **Hetkellinen muutosnopeus**
- Erotusosamäärä
- Derivaatta
- Derivoituvuus
- Derivoituvuus ja jatkuvuus
- Derivaattafunktio
- Derivointisääntöjä

Lämpöpumpuilla vuosittain Suomessa tuotettu energia $y(TJ)$



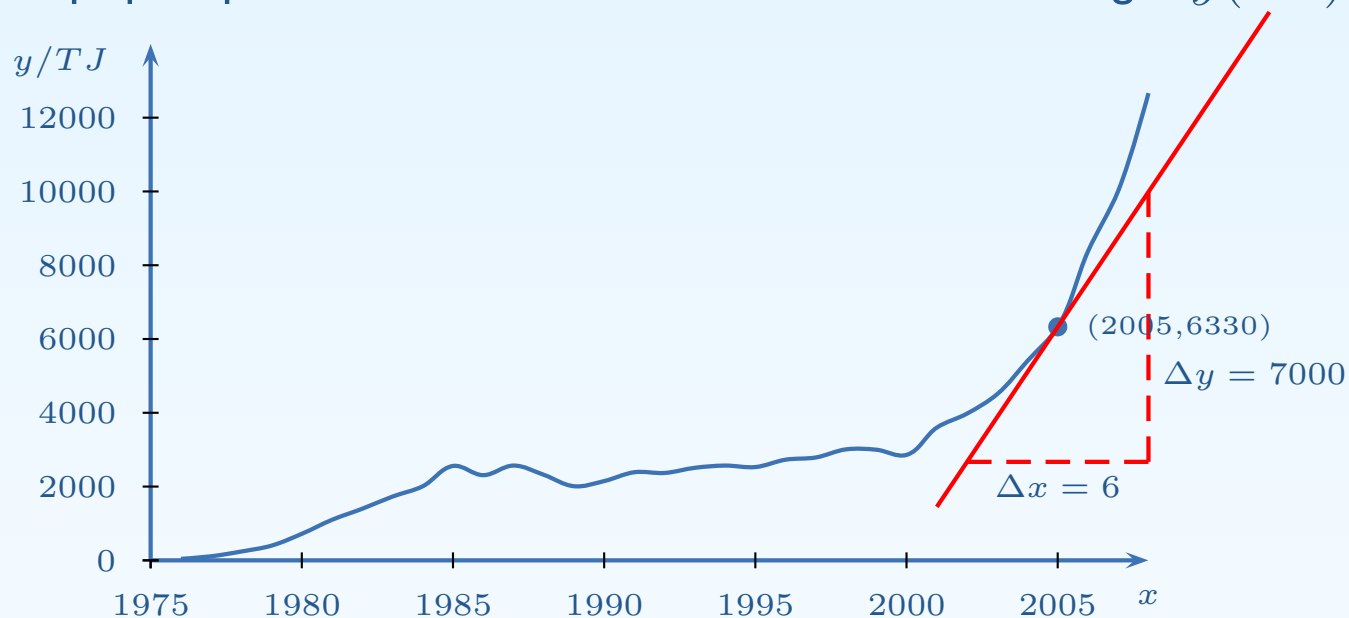
Hetkellinen muutosnopeus vuonna 2005 on kohtaan $x = 2005$ piirretyn tangentin kulmakerroin

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{7000}{6} \approx 1200(\text{TJ/vuosi}).$$

Hetkellinen muutosnopeus

- Keskimääräinen muutosnopeus
- **Hetkellinen muutosnopeus**
- Erotusosamäärä
- Derivaatta
- Derivoituvuus
- Derivoituvuus ja jatkuvuus
- Derivaattafunktio
- Derivointisääntöjä

Lämpöpumpuilla vuosittain Suomessa tuotettu energia $y(TJ)$



Hetkellinen muutosnopeus vuonna 2005 on kohtaan $x = 2005$ piirretyn tangentin kulmakerroin

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{7000}{6} \approx 1200(\text{TJ/vuosi}).$$

Edellä suoritettiin **graafinen derivointi**.

Erotusosamäärä

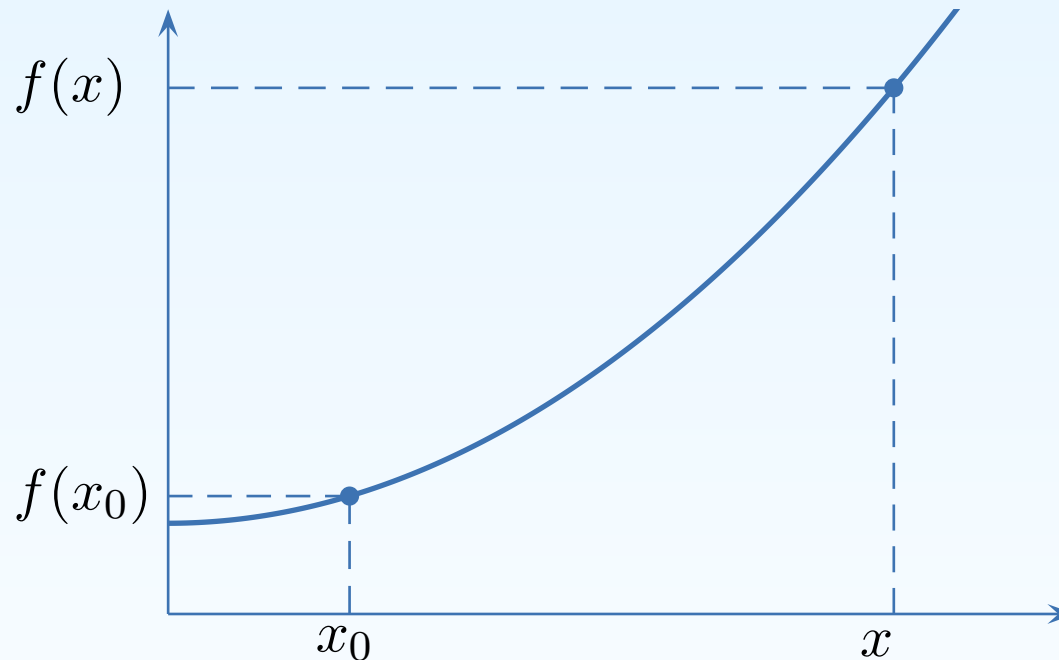
- Keskimääräinen muutosnopeus
- Hetkellinen muutosnopeus
- Erotusosamäärä
- Derivaatta
- Derivoituvuus
- Derivoituvuus ja jatkuvuus
- Derivaattafunktio
- Derivointisääntöjä

Tarkastellaan funktiota $y = f(x)$. Valitaan kuvaajalta kaksi pistettä $(x_0, f(x_0))$ ja $(x, f(x))$, $x \neq x_0$.

Erotusosamäärä

- Keskimääräinen muutosnopeus
- Hetkellinen muutosnopeus
- **Erotusosamäärä**
- Derivaatta
- Derivoituvuus
- Derivoituvuus ja jatkuvuus
- Derivaattafunktio
- Derivointisääntöjä

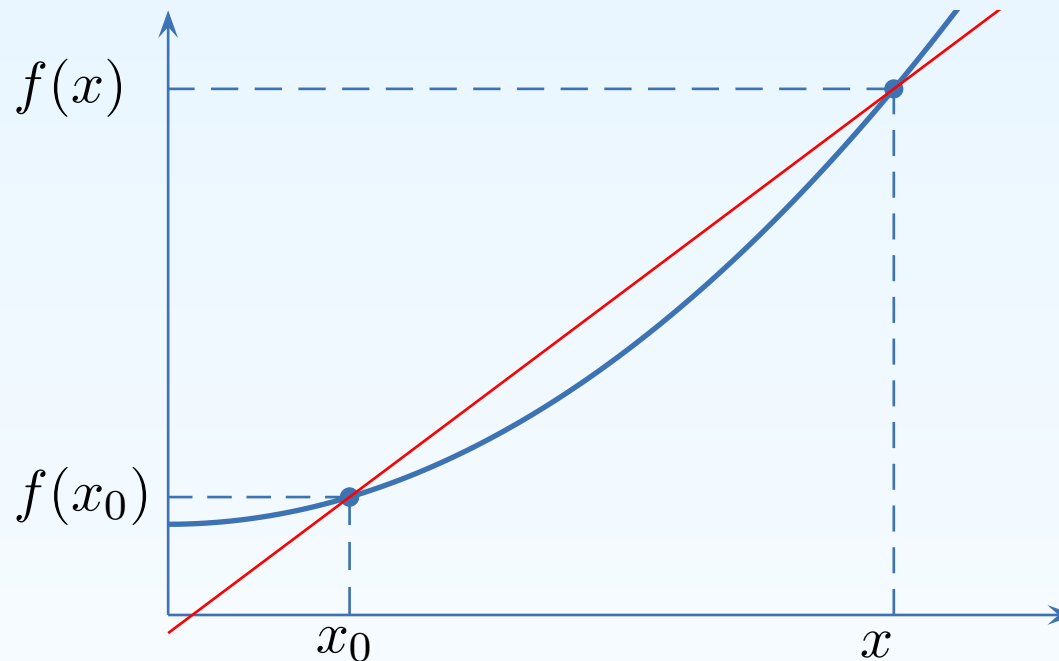
Tarkastellaan funktiota $y = f(x)$. Valitaan kuvaajalta kaksi pistettä $(x_0, f(x_0))$ ja $(x, f(x))$, $x \neq x_0$.



Erotusosamäärä

- Keskimääräinen muutosnopeus
- Hetkellinen muutosnopeus
- Erotusosamäärä
- Derivaatta
- Derivoituvuus
- Derivoituvuus ja jatkuvuus
- Derivaattafunktio
- Derivointisääntöjä

Tarkastellaan funktiota $y = f(x)$. Valitaan kuvaajalta kaksi pistettä $(x_0, f(x_0))$ ja $(x, f(x))$, $x \neq x_0$.

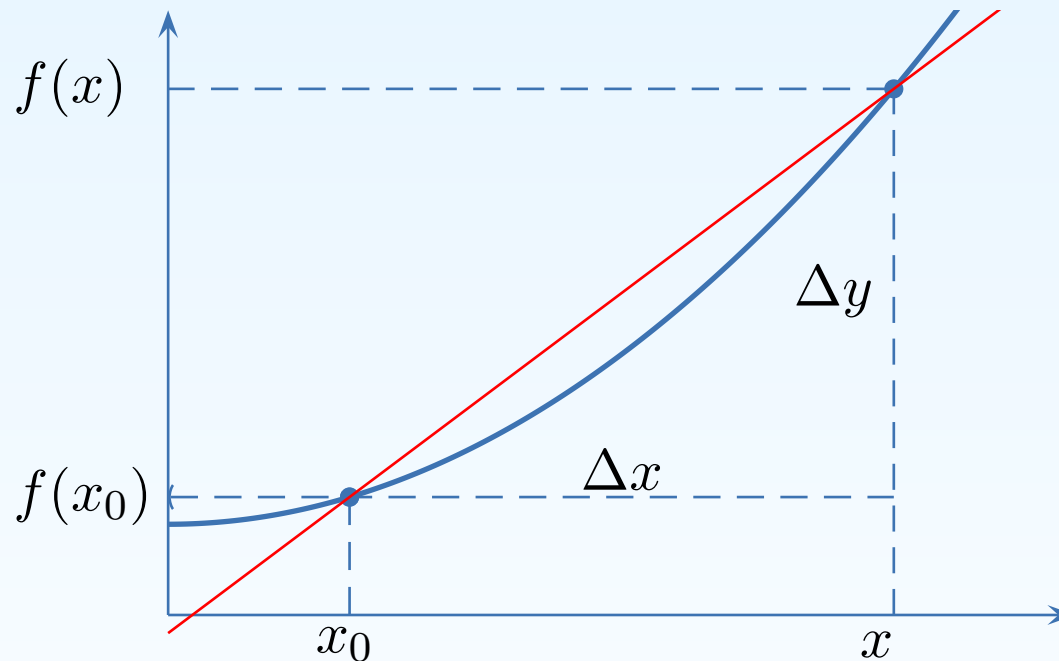


sekantin $k =$

Erotusosamäärä

- Keskimääräinen muutosnopeus
- Hetkellinen muutosnopeus
- Erotusosamäärä
- Derivaatta
- Derivoituvuus
- Derivoituvuus ja jatkuvuus
- Derivaattafunktio
- Derivointisääntöjä

Tarkastellaan funktiota $y = f(x)$. Valitaan kuvaajalta kaksi pistettä $(x_0, f(x_0))$ ja $(x, f(x))$, $x \neq x_0$.

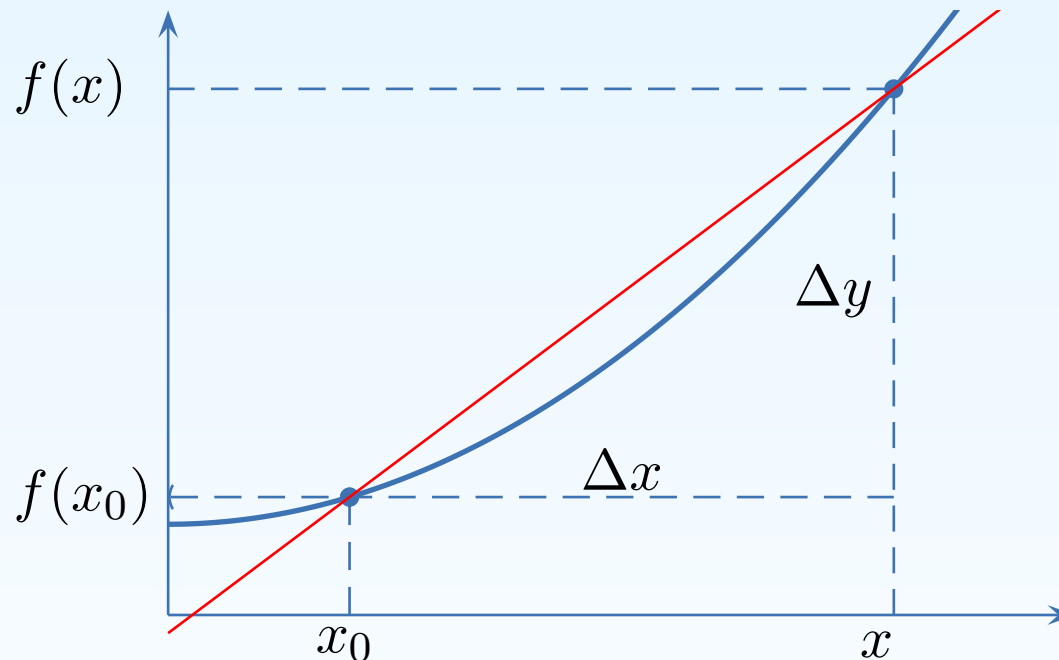


$$\text{sekantin } k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Erotusosamäärä

- Keskimääräinen muutosnopeus
- Hetkellinen muutosnopeus
- **Erotusosamäärä**
- Derivaatta
- Derivoituvuus
- Derivoituvuus ja jatkuvuus
- Derivaattafunktio
- Derivointisääntöjä

Tarkastellaan funktiota $y = f(x)$. Valitaan kuvaajalta kaksi pistettä $(x_0, f(x_0))$ ja $(x, f(x))$, $x \neq x_0$.



$$\text{sekantin } k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{\underbrace{x - x_0}_{\text{erotusosamäärä kohdassa } x_0}}$$

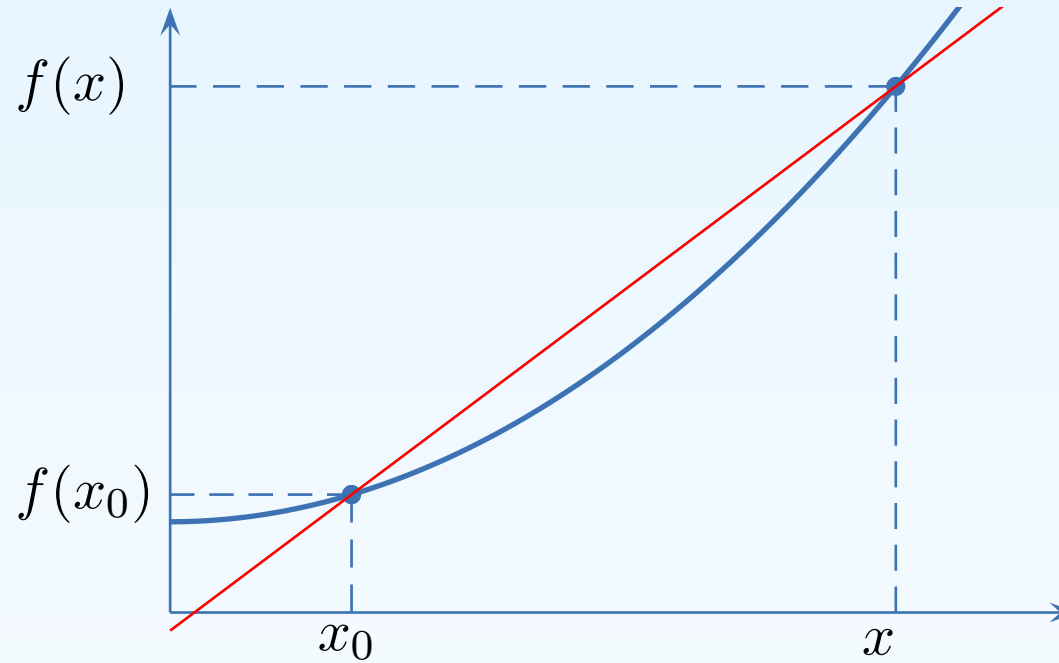
erotusosamäärä kohdassa x_0

Funktion arvojen keskimääräinen muutosnopeus välillä $[x_0, x]$.

Derivaatta

- Keskimääräinen muutosnopeus
- Hetkellinen muutosnopeus
- Erotusosamäärä
- Derivaatta
- Derivoituvuus
- Derivoituvuus ja jatkuvuus
- Derivaattafunktio
- Derivointisääntöjä

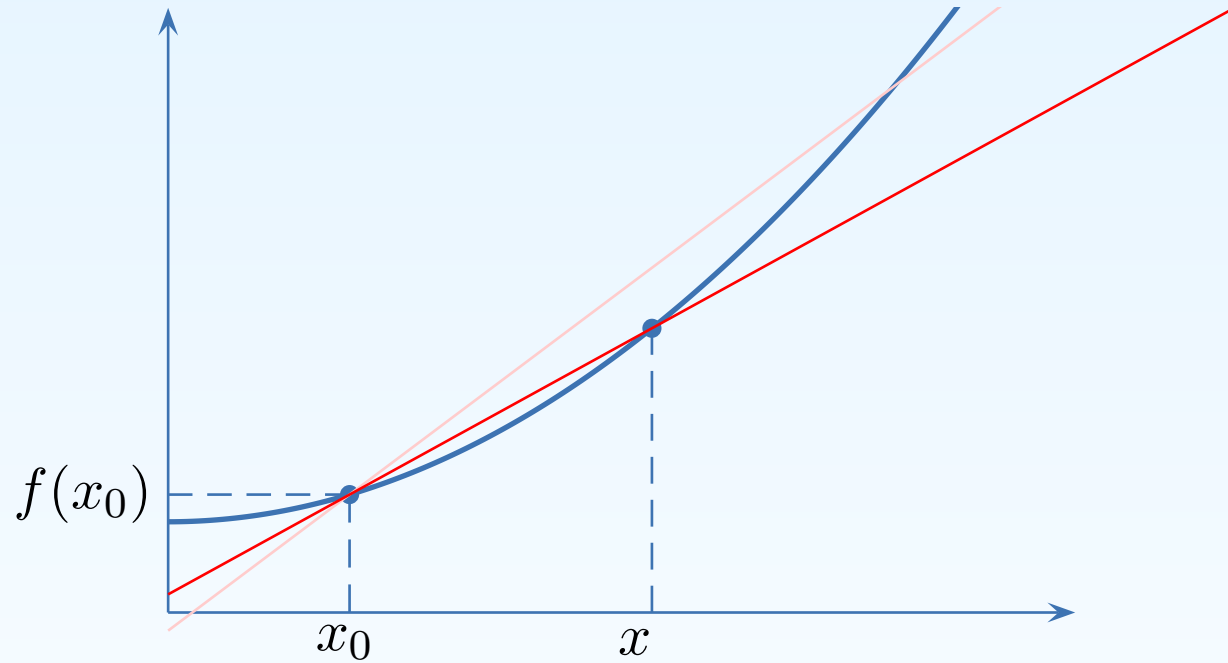
Tutkitaan, mitä tapahtuu, kun $x \rightarrow x_0$.



Derivaatta

- Keskimääräinen muutosnopeus
- Hetkellinen muutosnopeus
- Erotusosamäärä
- Derivaatta
- Derivoituvuus
- Derivoituvuus ja jatkuvuus
- Derivaattafunktio
- Derivointisääntöjä

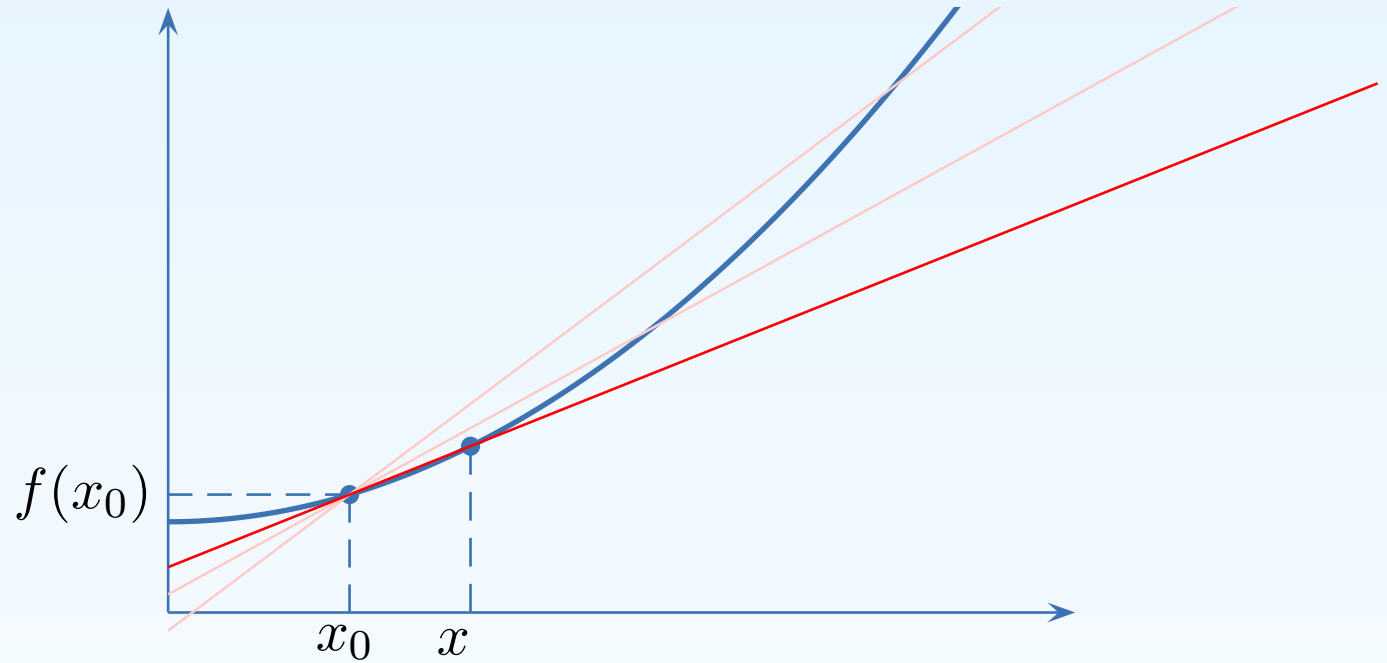
Tutkitaan, mitä tapahtuu, kun $x \rightarrow x_0$.



Derivaatta

- Keskimääräinen muutosnopeus
- Hetkellinen muutosnopeus
- Erotusosamäärä
- Derivaatta
- Derivoituvuus
- Derivoituvuus ja jatkuvuus
- Derivaattafunktio
- Derivointisääntöjä

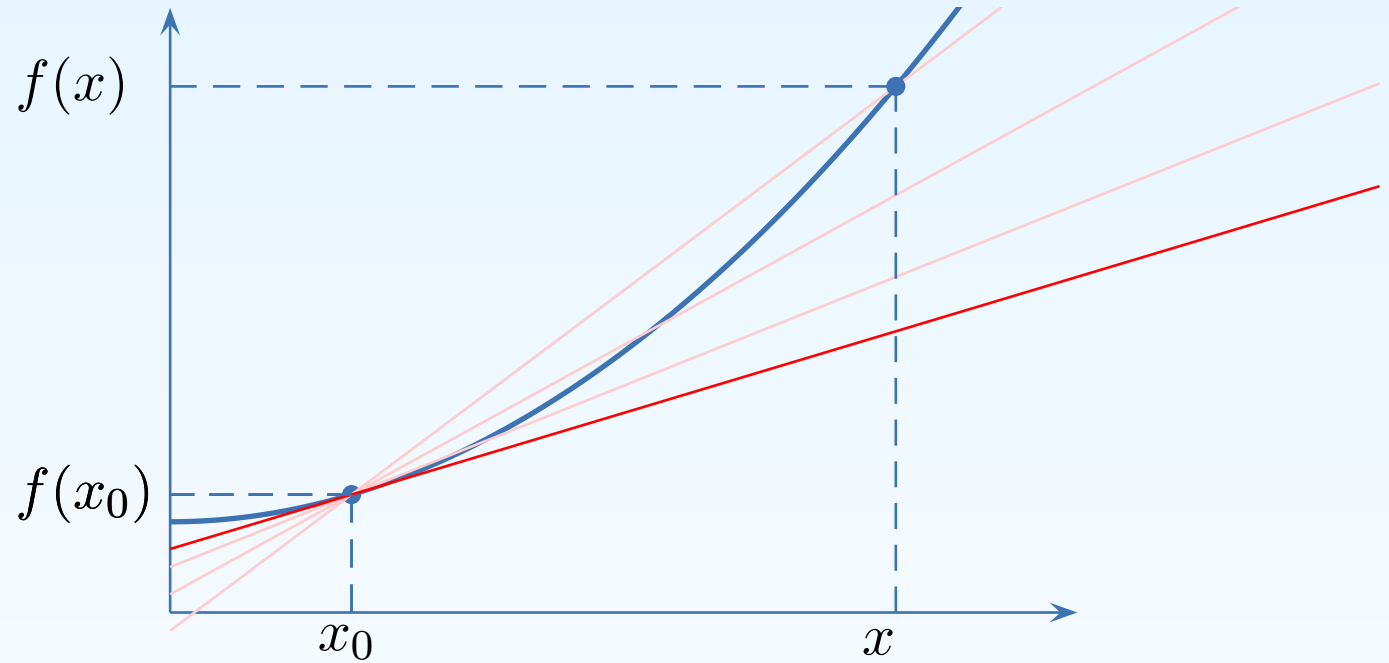
Tutkitaan, mitä tapahtuu, kun $x \rightarrow x_0$.



Derivaatta

- Keskimääräinen muutosnopeus
- Hetkellinen muutosnopeus
- Erotusosamäärä
- Derivaatta
- Derivoituvuus
- Derivoituvuus ja jatkuvuus
- Derivaattafunktio
- Derivointisääntöjä

Tutkitaan, mitä tapahtuu, kun $x \rightarrow x_0$.

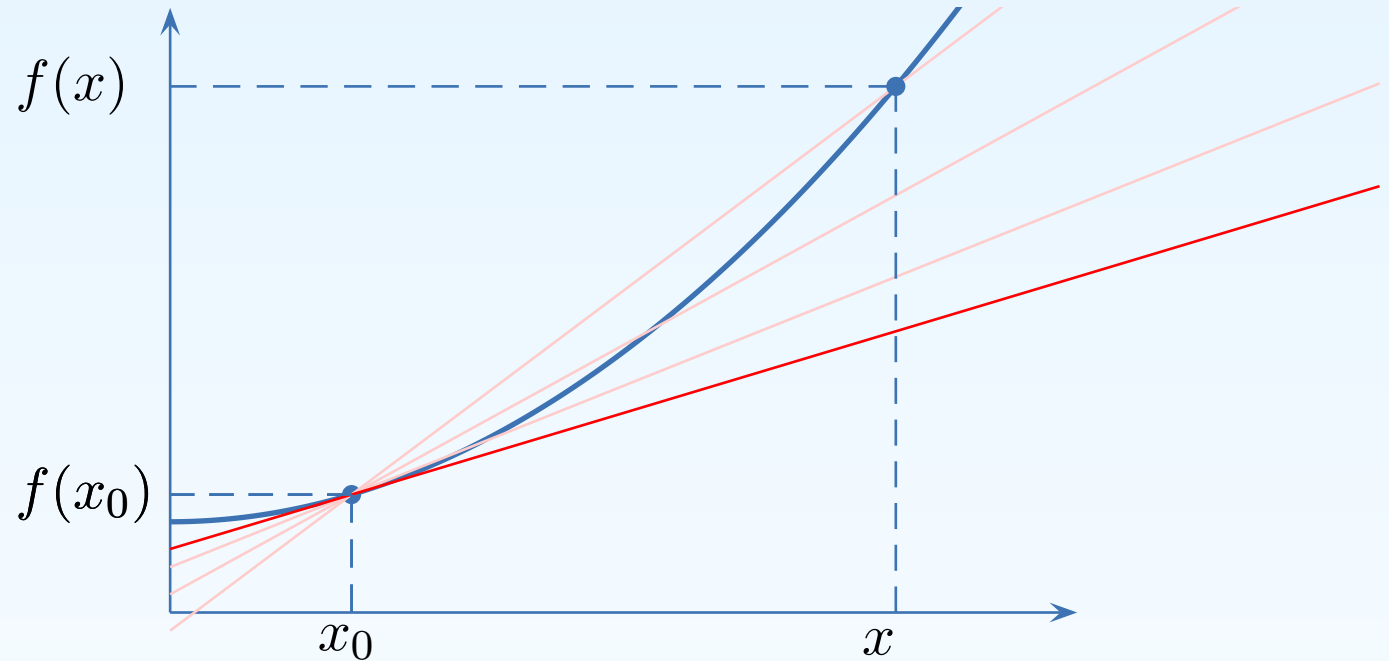


Sekantti kääntyy tangentiksi, jonka kulmakerroin on

Derivaatta

- Keskimääräinen muutosnopeus
- Hetkellinen muutosnopeus
- Erotusosamäärä
- Derivaatta
- Derivoituvuus
- Derivoituvuus ja jatkuvuus
- Derivaattafunktio
- Derivointisääntöjä

Tutkitaan, mitä tapahtuu, kun $x \rightarrow x_0$.



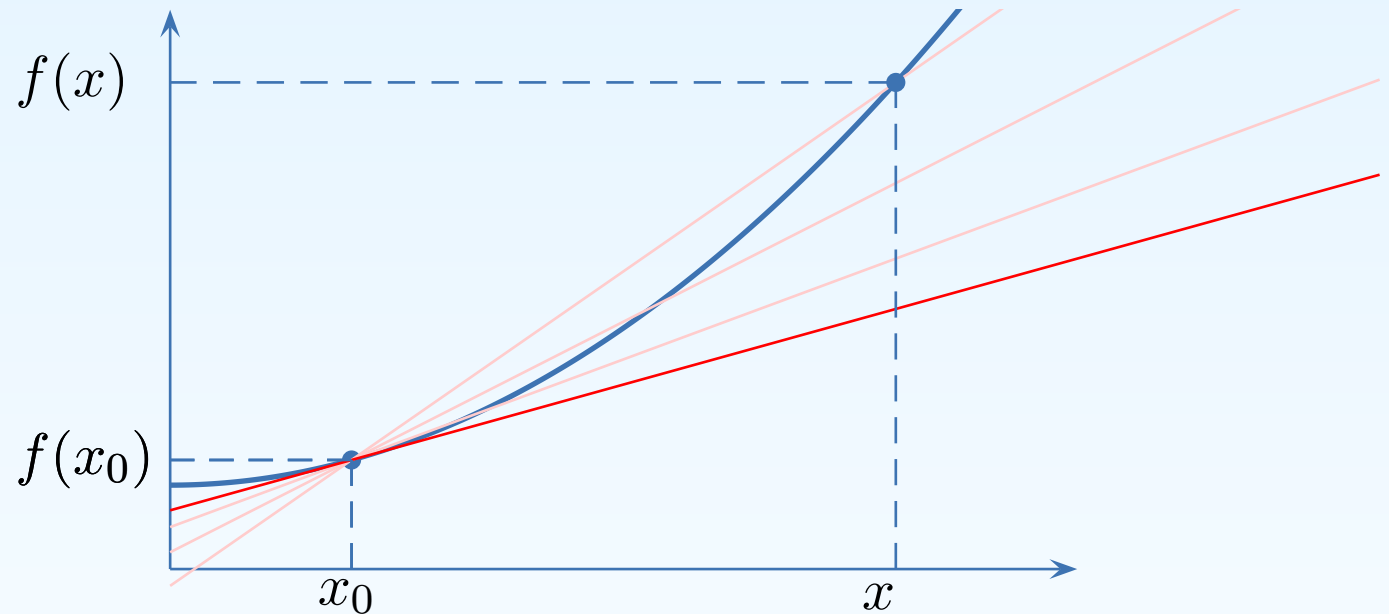
Sekantti kääntyy tangentiksi, jonka kulmakerroin on

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Derivaatta

- Keskimääräinen muutosnopeus
- Hetkellinen muutosnopeus
- Erotusosamäärä
- Derivaatta
- Derivoituvuus
- Derivoituvuus ja jatkuvuus
- Derivaattafunktio
- Derivointisääntöjä

Tutkitaan, mitä tapahtuu, kun $x \rightarrow x_0$.



Sekantti kääntyy tangentiksi, jonka kulmakerroin on

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

Funktion f derivaatta kohdassa x_0

Funktion f hetkellinen muutosnopeus kohdassa x_0

Derivaatta

- Keskimääräinen muutosnopeus
- Hetkellinen muutosnopeus
- Erotusosamäärä
- **Derivaatta**
- Derivoituvuus
- Derivoituvuus ja jatkuvuus
- Derivaattafunktio
- Derivointisääntöjä

Määritelmä 1. Funktion $y = f(x)$ derivaatta kohdassa x_0 on

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

mikäli raja-arvo on olemassa. Tällöin f on *derivoituva* kohdassa x_0 .

Derivaatta

- Keskimääräinen muutosnopeus
- Hetkellinen muutosnopeus
- Erotusosamäärä
- **Derivaatta**
- Derivoituvuus
- Derivoituvuus ja jatkuvuus
- Derivaattafunktio
- Derivointisääntöjä

Määritelmä 1. Funktion $y = f(x)$ derivaatta kohdassa x_0 on

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

mikäli raja-arvo on olemassa. Tällöin f on *derivoituva* kohdassa x_0 .

Esimerkki 1. Olkoon $f(x) = x^2$. Määritä $f'(1)$

- a) laskimella,
- b) derivaatan määritelmän avulla.

Derivaatta

- Keskimääräinen muutosnopeus
- Hetkellinen muutosnopeus
- Erotusosamäärä
- **Derivaatta**
- Derivoituvuus
- Derivoituvuus ja jatkuvuus
- Derivaattafunktio
- Derivointisääntöjä

Määritelmä 1. Funktion $y = f(x)$ derivaatta kohdassa x_0 on

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

mikäli raja-arvo on olemassa. Tällöin f on *derivoituva* kohdassa x_0 .

Esimerkki 1. Olkoon $f(x) = x^2$. Määritä $f'(1)$

- a) laskimella,
- b) derivaatan määritelmän avulla.

Esimerkki 2. Olkoon $f(x) = \sqrt{x}$. Määritä $f'(2)$.

Derivoituvuus graafisesti

- Keskimääräinen muutosnopeus
- Hetkellinen muutosnopeus
- Erotusosamäärä
- Derivaatta
- **Derivoituvuus**
- Derivoituvuus ja jatkuvuus
- Derivaattafunktio
- Derivointisääntöjä

Funktio f on derivoituva kohdassa x_0 , jos tähän kohtaan voidaan piirtää yksikäsitteinen tangentti, jolla on kulmakerroin.

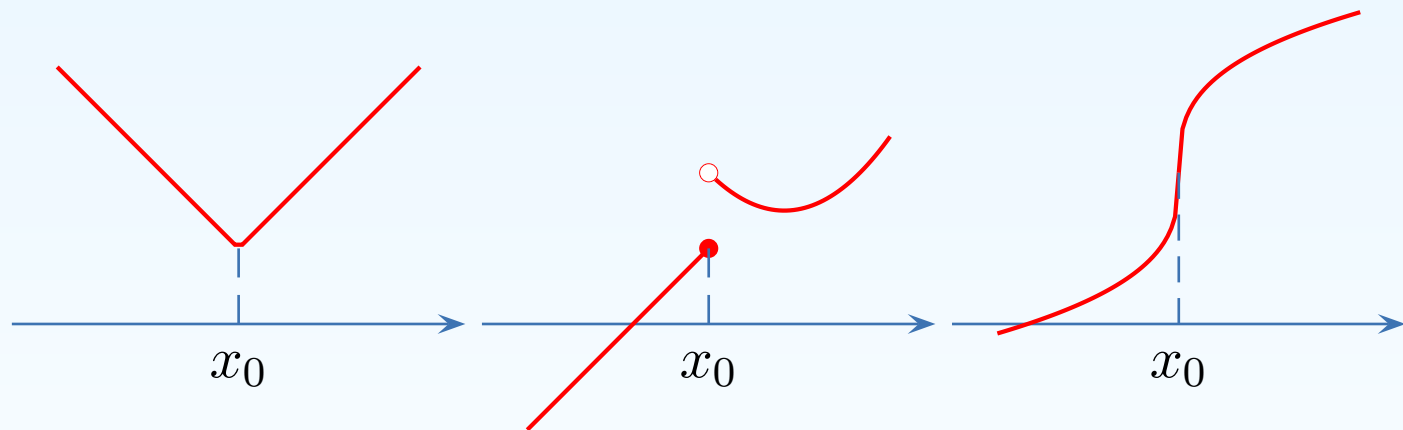
Ovatko seuraavat funktiot derivoituvia kohdassa x_0 ?

Derivoituvuus graafisesti

- Keskimääräinen muutosnopeus
- Hetkellinen muutosnopeus
- Erotusosamäärä
- Derivaatta
- **Derivoituvuus**
- Derivoituvuus ja jatkuvuus
- Derivaattafunktio
- Derivointisääntöjä

Funktio f on derivoituva kohdassa x_0 , jos tähän kohtaan voidaan piirtää yksikäsitteinen tangentti, jolla on kulmakerroin.

Ovatko seuraavat funktiot derivoituvia kohdassa x_0 ?

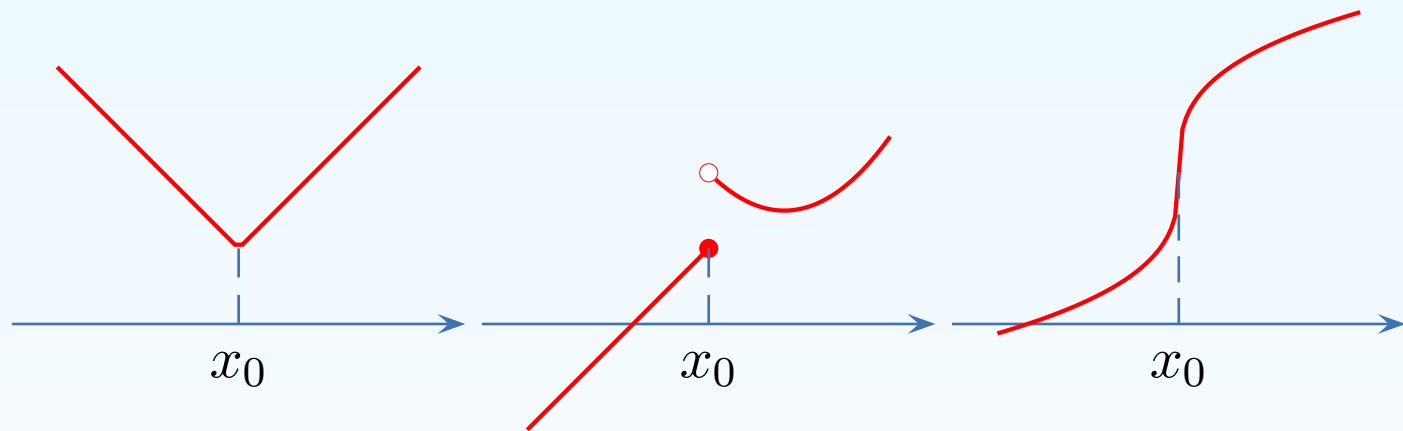


Derivoituvuus graafisesti

- Keskimääräinen muutosnopeus
- Hetkellinen muutosnopeus
- Erotusosamäärä
- Derivaatta
- **Derivoituvuus**
- Derivoituvuus ja jatkuvuus
- Derivaattafunktio
- Derivointisääntöjä

Funktio f on derivoituva kohdassa x_0 , jos tähän kohtaan voidaan piirtää yksikäsitteinen tangentti, jolla on kulmakerroin.

Ovatko seuraavat funktiot derivoituvia kohdassa x_0 ?



Ei yksikäsitteistä tangenttia
(terävä kärki)

Ei yksikäsitteistä tangenttia
(epäjatkuvuuskohta)

Yksikäsitteinen tangentti,
mutta pystysuora, jolla ei ole
kulmakerointa

Derivoituvuus graafisesti

- Keskimääräinen muutosnopeus
- Hetkellinen muutosnopeus
- Erotusosamäärä
- Derivaatta
- **Derivoituvuus**
- Derivoituvuus ja jatkuvuus
- Derivaattafunktio
- Derivointisääntöjä

Esimerkki. Tutki graafisesti, onko funktio

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x \leq 1 \\ x, & x > 1 \end{cases}$$

derivoituva kohdassa $x = 1$.

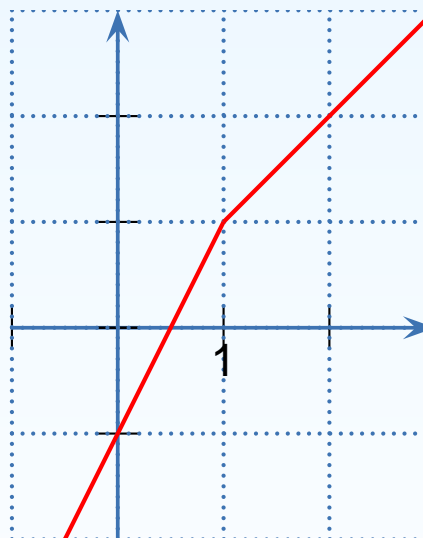
Derivoituvuus graafisesti

- Keskimääräinen muutosnopeus
- Hetkellinen muutosnopeus
- Erotusosamäärä
- Derivaatta
- **Derivoituvuus**
- Derivoituvuus ja jatkuvuus
- Derivaattafunktio
- Derivointisääntöjä

Esimerkki. Tutki graafisesti, onko funktio

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x \leq 1 \\ x, & x > 1 \end{cases}$$

derivoituva kohdassa $x = 1$.



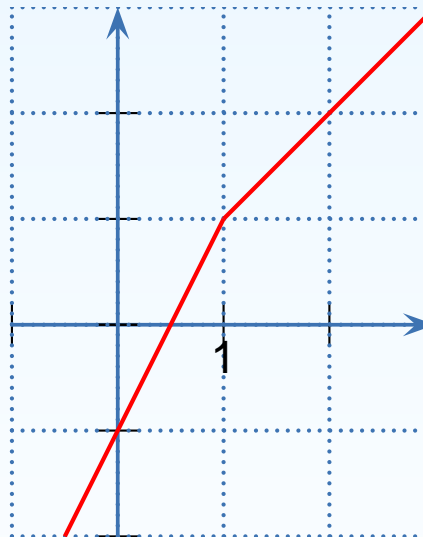
Derivoituvuus graafisesti

- Keskimääräinen muutosnopeus
- Hetkellinen muutosnopeus
- Erotusosamäärä
- Derivaatta
- **Derivoituvuus**
- Derivoituvuus ja jatkuvuus
- Derivaattafunktio
- Derivointisääntöjä

Esimerkki. Tutki graafisesti, onko funktio

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x \leq 1 \\ x, & x > 1 \end{cases}$$

derivoituva kohdassa $x = 1$.



Funktio ei ole derivoituva kohdassa $x = 1$, koska kuvaajassa on kohdassa $x = 1$ terävä kärki.

Derivoituvuus analyyttisesti

- Keskimääräinen muutosnopeus
- Hetkellinen muutosnopeus
- Erotusosamäärä
- Derivaatta
- **Derivoituvuus**
- Derivoituvuus ja jatkuvuus
- Derivaattafunktio
- Derivointisääntöjä

Esimerkki. Tutki analyyttisesti (määritelmän nojalla), onko funktio

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1, & x \leq 0 \\ -2x^2 + x + 1, & x > 0 \end{cases}$$

derivoituva kohdassa $x = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} =$$

Derivoituvuus analyyttisesti

- Keskimääräinen muutosnopeus
- Hetkellinen muutosnopeus
- Erotusosamäärä
- Derivaatta
- **Derivoituvuus**
- Derivoituvuus ja jatkuvuus
- Derivaattafunktio
- Derivointisääntöjä

Esimerkki. Tutki analyyttisesti (määritelmän nojalla), onko funktio

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1, & x \leq 0 \\ -2x^2 + x + 1, & x > 0 \end{cases}$$

derivoituva kohdassa $x = 0$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + x + 1 - (0^2 + 0 + 1)}{x} \\ &= \end{aligned}$$

Derivoituvuus analyyttisesti

- Keskimääräinen muutosnopeus
- Hetkellinen muutosnopeus
- Erotusosamäärä
- Derivaatta
- **Derivoituvuus**
- Derivoituvuus ja jatkuvuus
- Derivaattafunktio
- Derivointisääntöjä

Esimerkki. Tutki analyyttisesti (määritelmän nojalla), onko funktio

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1, & x \leq 0 \\ -2x^2 + x + 1, & x > 0 \end{cases}$$

derivoituva kohdassa $x = 0$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + x + 1 - (0^2 + 0 + 1)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + x}{x} = \end{aligned}$$

Derivoituvuus analyyttisesti

- Keskimääräinen muutosnopeus
- Hetkellinen muutosnopeus
- Erotusosamäärä
- Derivaatta
- **Derivoituvuus**
- Derivoituvuus ja jatkuvuus
- Derivaattafunktio
- Derivointisääntöjä

Esimerkki. Tutki analyyttisesti (määritelmän nojalla), onko funktio

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1, & x \leq 0 \\ -2x^2 + x + 1, & x > 0 \end{cases}$$

derivoituva kohdassa $x = 0$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + x + 1 - (0^2 + 0 + 1)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + x}{x} = 1 = \end{aligned}$$

Derivoituvuus analyyttisesti

- Keskimääräinen muutosnopeus
- Hetkellinen muutosnopeus
- Erotusosamäärä
- Derivaatta
- **Derivoituvuus**
- Derivoituvuus ja jatkuvuus
- Derivaattafunktio
- Derivointisääntöjä

Esimerkki. Tutki analyyttisesti (määritelmän nojalla), onko funktio

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1, & x \leq 0 \\ -2x^2 + x + 1, & x > 0 \end{cases}$$

derivoituva kohdassa $x = 0$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + x + 1 - (0^2 + 0 + 1)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + x}{x} = 1 = f'(0-) \end{aligned}$$

Derivoituvuus analyyttisesti

- Keskimääräinen muutosnopeus
- Hetkellinen muutosnopeus
- Erotusosamäärä
- Derivaatta
- **Derivoituvuus**
- Derivoituvuus ja jatkuvuus
- Derivaattafunktio
- Derivointisääntöjä

Esimerkki. Tutki analyyttisesti (määritelmän nojalla), onko funktio

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1, & x \leq 0 \\ -2x^2 + x + 1, & x > 0 \end{cases}$$

derivoituva kohdassa $x = 0$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + x + 1 - (0^2 + 0 + 1)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + x}{x} = 1 = f'(0-) \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} =$$

Derivoituvuus analyyttisesti

- Keskimääräinen muutosnopeus
- Hetkellinen muutosnopeus
- Erotusosamäärä
- Derivaatta
- **Derivoituvuus**
- Derivoituvuus ja jatkuvuus
- Derivaattafunktio
- Derivointisääntöjä

Esimerkki. Tutki analyyttisesti (määritelmän nojalla), onko funktio

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1, & x \leq 0 \\ -2x^2 + x + 1, & x > 0 \end{cases}$$

derivoituva kohdassa $x = 0$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + x + 1 - (0^2 + 0 + 1)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + x}{x} = 1 = f'(0-) \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2x^2 + x + 1 - (0^2 + 0 + 1)}{x} \\ &= \end{aligned}$$

Derivoituvuus analyyttisesti

- Keskimääräinen muutosnopeus
- Hetkellinen muutosnopeus
- Erotusosamäärä
- Derivaatta
- **Derivoituvuus**
- Derivoituvuus ja jatkuvuus
- Derivaattafunktio
- Derivointisääntöjä

Esimerkki. Tutki analyyttisesti (määritelmän nojalla), onko funktio

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1, & x \leq 0 \\ -2x^2 + x + 1, & x > 0 \end{cases}$$

derivoituva kohdassa $x = 0$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + x + 1 - (0^2 + 0 + 1)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + x}{x} = 1 = f'(0-) \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2x^2 + x + 1 - (0^2 + 0 + 1)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2x^2 + x}{x} = \end{aligned}$$

Derivoituvuus analyyttisesti

- Keskimääräinen muutosnopeus
- Hetkellinen muutosnopeus
- Erotusosamäärä
- Derivaatta
- **Derivoituvuus**
- Derivoituvuus ja jatkuvuus
- Derivaattafunktio
- Derivointisääntöjä

Esimerkki. Tutki analyyttisesti (määritelmän nojalla), onko funktio

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1, & x \leq 0 \\ -2x^2 + x + 1, & x > 0 \end{cases}$$

derivoituva kohdassa $x = 0$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + x + 1 - (0^2 + 0 + 1)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + x}{x} = 1 = f'(0-) \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2x^2 + x + 1 - (0^2 + 0 + 1)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2x^2 + x}{x} = 1 = \end{aligned}$$

Derivoituvuus analyyttisesti

- Keskimääräinen muutosnopeus
- Hetkellinen muutosnopeus
- Erotusosamäärä
- Derivaatta
- **Derivoituvuus**
- Derivoituvuus ja jatkuvuus
- Derivaattafunktio
- Derivoitaisääntöjä

Esimerkki. Tutki analyyttisesti (määritelmän nojalla), onko funktio

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1, & x \leq 0 \\ -2x^2 + x + 1, & x > 0 \end{cases}$$

derivoituva kohdassa $x = 0$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + x + 1 - (0^2 + 0 + 1)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + x}{x} = 1 = f'(0-) \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2x^2 + x + 1 - (0^2 + 0 + 1)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2x^2 + x}{x} = 1 = f'(0+) \end{aligned}$$

Derivoituvuus analyyttisesti

- Keskimääräinen muutosnopeus
- Hetkellinen muutosnopeus
- Erotusosamäärä
- Derivaatta
- **Derivoituvuus**
- Derivoituvuus ja jatkuvuus
- Derivaattafunktio
- Derivoitumisääntöjä

Esimerkki. Tutki analyyttisesti (määritelmän nojalla), onko funktio

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1, & x \leq 0 \\ -2x^2 + x + 1, & x > 0 \end{cases}$$

derivoituva kohdassa $x = 0$.

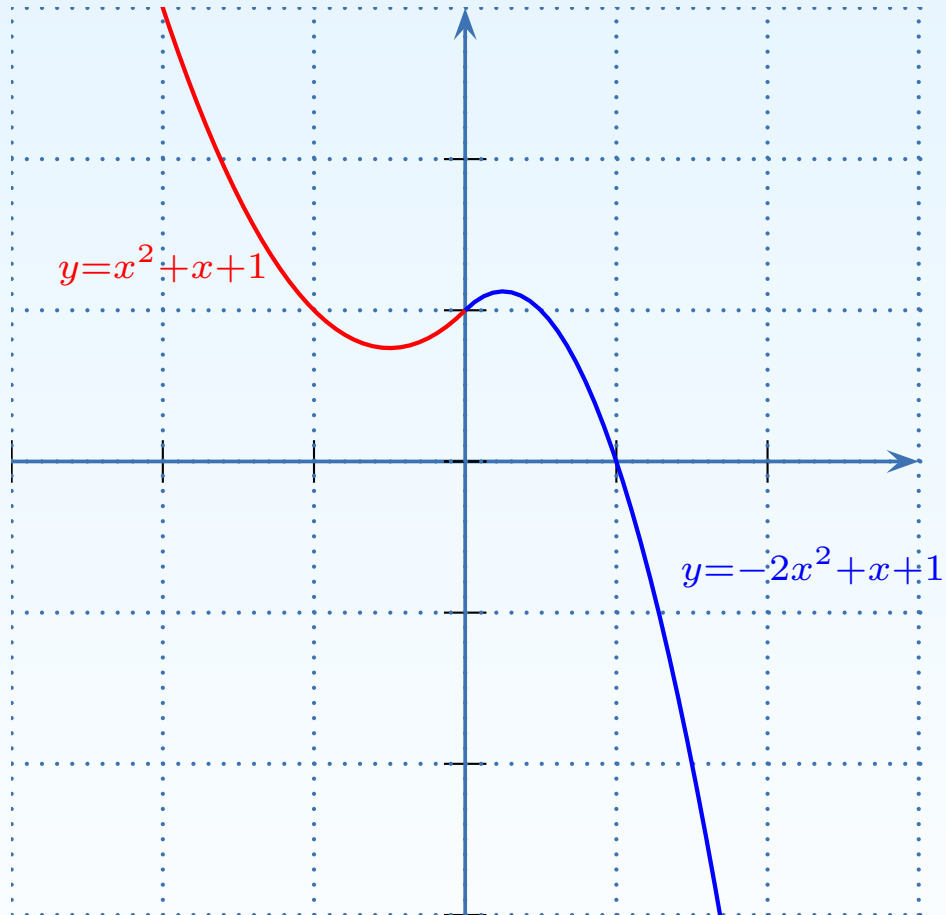
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + x + 1 - (0^2 + 0 + 1)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + x}{x} = 1 = f'(0-) \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2x^2 + x + 1 - (0^2 + 0 + 1)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2x^2 + x}{x} = 1 = f'(0+) \end{aligned}$$

Koska $f'(0-) = f'(0+)$, niin f on derivoituva kohdassa $x = 0$, ja $f'(0) = 1$.

Derivoituvuus analyyttisesti

- Keskimääräinen muutosnopeus
- Hetkellinen muutosnopeus
- Erotusosamäärä
- Derivaatta
- **Derivoituvuus**
- Derivoituvuus ja jatkuvuus
- Derivaattafunktio
- Derivointisääntöjä

Esimerkki jatkuu.



Derivoituvuus ja jatkuvuus

- Keskimääräinen muutosnopeus
- Hetkellinen muutosnopeus
- Erotusosamäärä
- Derivaatta
- Derivoituvuus
- **Derivoituvuus ja jatkuvuus**
- Derivaattafunktio
- Derivointisääntöjä

Lause 1. *Jos funktio on derivoituva, niin se on myös jatkuva.*

Derivoituvuus ja jatkuvuus

- Keskimääräinen muutosnopeus
- Hetkellinen muutosnopeus
- Erotusosamäärä
- Derivaatta
- Derivoituvuus
- **Derivoituvuus ja jatkuvuus**
- Derivaattafunktio
- Derivointisääntöjä

Lause 1. *Jos funktio on derivoituva, niin se on myös jatkuva.*

Huomautus. Käänteinen lause ei ole voimassa. Keksi funktio, joka on jatkuva, mutta ei derivoituva.

Derivaattafunktio

- Keskimääräinen muutosnopeus
- Hetkellinen muutosnopeus
- Erotusosamäärä
- Derivaatta
- Derivoituvuus
- Derivoituvuus ja jatkuvuus
- **Derivaattafunktio**
- Derivointisääntöjä

Esimerkki. Määritä funktion $f(x) = x^2$ derivaatta kohdassa x_0 .
Laske myös $f'(4)$

Derivaattafunktio

- Keskimääräinen muutosnopeus
- Hetkellinen muutosnopeus
- Erotusosamäärä
- Derivaatta
- Derivoituvuus
- Derivoituvuus ja jatkuvuus
- **Derivaattafunktio**
- Derivointisääntöjä

Esimerkki. Määritä funktion $f(x) = x^2$ derivaatta kohdassa x_0 .
Laske myös $f'(4)$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =$$

Derivaattafunktio

- Keskimääräinen muutosnopeus
- Hetkellinen muutosnopeus
- Erotusosamäärä
- Derivaatta
- Derivoituvuus
- Derivoituvuus ja jatkuvuus
- **Derivaattafunktio**
- Derivointisääntöjä

Esimerkki. Määritä funktion $f(x) = x^2$ derivaatta kohdassa x_0 .
Laske myös $f'(4)$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} =$$

Derivaatafunktio

- Keskimääräinen muutosnopeus
- Hetkellinen muutosnopeus
- Erotusosamäärä
- Derivaatta
- Derivoituvuus
- Derivoituvuus ja jatkuvuus
- **Derivaatafunktio**
- Derivointisääntöjä

Esimerkki. Määritä funktion $f(x) = x^2$ derivaatta kohdassa x_0 .
Laske myös $f'(4)$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} =$$
$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} =$$

Derivaattafunktio

- Keskimääräinen muutosnopeus
- Hetkellinen muutosnopeus
- Erotusosamäärä
- Derivaatta
- Derivoituvuus
- Derivoituvuus ja jatkuvuus
- **Derivaattafunktio**
- Derivointisääntöjä

Esimerkki. Määritä funktion $f(x) = x^2$ derivaatta kohdassa x_0 .
Laske myös $f'(4)$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} =$$
$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x + x_0) =$$

Derivaatafunktio

- Keskimääräinen muutosnopeus
- Hetkellinen muutosnopeus
- Erotusosamäärä
- Derivaatta
- Derivoituvuus
- Derivoituvuus ja jatkuvuus
- **Derivaatafunktio**
- Derivoitaisääntöjä

Esimerkki. Määritä funktion $f(x) = x^2$ derivaatta kohdassa x_0 .
Laske myös $f'(4)$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} (x + x_0) = 2x_0 =\end{aligned}$$

Derivaatafunktio

- Keskimääräinen muutosnopeus
- Hetkellinen muutosnopeus
- Erotusosamäärä
- Derivaatta
- Derivoituvuus
- Derivoituvuus ja jatkuvuus
- **Derivaatafunktio**
- Derivoitaisääntöjä

Esimerkki. Määritä funktion $f(x) = x^2$ derivaatta kohdassa x_0 .
Laske myös $f'(4)$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} =$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x + x_0) = 2x_0 = f'(x_0)$$

Merkitsemällä x_0 :aa x :llä saadaan *derivaata(funktio)* $f'(x) = 2x$.

$$f'(4) =$$

Derivaatafunktio

- Keskimääräinen muutosnopeus
- Hetkellinen muutosnopeus
- Erotusosamäärä
- Derivaatta
- Derivoituvuus
- Derivoituvuus ja jatkuvuus
- **Derivaatafunktio**
- Derivointisääntöjä

Esimerkki. Määritä funktion $f(x) = x^2$ derivaatta kohdassa x_0 .
Laske myös $f'(4)$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} =$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x + x_0) = 2x_0 = f'(x_0)$$

Merkitsemällä x_0 :aa x :llä saadaan *derivaata(funktio)* $f'(x) = 2x$.

$$f'(4) = 2 \cdot 4 = 8$$

Merkintöjä. $f' = Df = \frac{df}{dx} = \frac{dy}{dx} = y'$

Derivaatafunktio

- Keskimääräinen muutosnopeus
- Hetkellinen muutosnopeus
- Erotusosamäärä
- Derivaatta
- Derivoituvuus
- Derivoituvuus ja jatkuvuus
- **Derivaatafunktio**
- Derivointisääntöjä

Esimerkki. Määritä funktion $f(x) = x^2$ derivaatta kohdassa x_0 .
Laske myös $f'(4)$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} =$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x + x_0) = 2x_0 = f'(x_0)$$

Merkitsemällä x_0 :aa x :llä saadaan *derivaata(funktio)* $f'(x) = 2x$.

$$f'(4) = 2 \cdot 4 = 8$$

Merkintöjä. $f' = Df = \frac{df}{dx} = \frac{dy}{dx} = y'$

Derivaatafunktion f' arvo $f'(x)$ on funktion derivaatta kohdassa x .

Derivointisääntöjä

- Keskimääräinen muutosnopeus
- Hetkellinen muutosnopeus
- Erotusosamäärä
- Derivaatta
- Derivoituvuus
- Derivoituvuus ja jatkuvuus
- Derivaattafunktio
- Derivointisääntöjä

1. $Dc =$

Derivointisääntöjä

- Keskimääräinen muutosnopeus
- Hetkellinen muutosnopeus
- Erotusosamäärä
- Derivaatta
- Derivoituvuus
- Derivoituvuus ja jatkuvuus
- Derivaattafunktio
- Derivointisääntöjä

1. $Dc = 0$, c on vakio

Derivointisääntöjä

- Keskimääräinen muutosnopeus
- Hetkellinen muutosnopeus
- Erotusosamäärä
- Derivaatta
- Derivoituvuus
- Derivoituvuus ja jatkuvuus
- Derivaattafunktio
- Derivointisääntöjä

1. $Dc = 0$, c on vakio

2. $Dx =$

Derivointisääntöjä

- Keskimääräinen muutosnopeus
- Hetkellinen muutosnopeus
- Erotusosamäärä
- Derivaatta
- Derivoituvuus
- Derivoituvuus ja jatkuvuus
- Derivaattafunktio
- Derivointisääntöjä

1. $Dc = 0$, c on vakio

2. $Dx = 1$

Derivointisääntöjä

- Keskimääräinen muutosnopeus
- Hetkellinen muutosnopeus
- Erotusosamäärä
- Derivaatta
- Derivoituvuus
- Derivoituvuus ja jatkuvuus
- Derivaattafunktio
- Derivointisääntöjä

1. $Dc = 0$, c on vakio

2. $Dx = 1$

3. $Dx^n =$

Derivointisääntöjä

- Keskimääräinen muutosnopeus
- Hetkellinen muutosnopeus
- Erotusosamäärä
- Derivaatta
- Derivoituvuus
- Derivoituvuus ja jatkuvuus
- Derivaattafunktio
- Derivointisääntöjä

1. $Dc = 0$, c on vakio

2. $Dx = 1$

3. $Dx^n = nx^{n-1}$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 2$

Derivointisääntöjä

- Keskimääräinen muutosnopeus
- Hetkellinen muutosnopeus
- Erotusosamäärä
- Derivaatta
- Derivoituvuus
- Derivoituvuus ja jatkuvuus
- Derivaattafunktio
- Derivointisääntöjä

1. $Dc = 0$, c on vakio

2. $Dx = 1$

3. $Dx^n = nx^{n-1}$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 2$

Olkoot f ja g derivoituvia.

4. $D(cf(x)) =$

Derivointisääntöjä

- Keskimääräinen muutosnopeus
- Hetkellinen muutosnopeus
- Erotusosamäärä
- Derivaatta
- Derivoituvuus
- Derivoituvuus ja jatkuvuus
- Derivaattafunktio
- Derivointisääntöjä

1. $Dc = 0$, c on vakio

2. $Dx = 1$

3. $Dx^n = nx^{n-1}$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 2$

Olkoot f ja g derivoituvia.

4. $D(cf(x)) = cf'(x)$, c on vakio (vakion siirtosääntö)

Derivointisääntöjä

- Keskimääräinen muutosnopeus
- Hetkellinen muutosnopeus
- Erotusosamäärä
- Derivaatta
- Derivoituvuus
- Derivoituvuus ja jatkuvuus
- Derivaattafunktio
- Derivointisääntöjä

1. $Dc = 0$, c on vakio
2. $Dx = 1$
3. $Dx^n = nx^{n-1}$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 2$

Olkoot f ja g derivoituvia.

4. $D(cf(x)) = cf'(x)$, c on vakio (vakion siirtosääntö)
5. $D(f(x) + g(x)) =$

Derivointisääntöjä

- Keskimääräinen muutosnopeus
- Hetkellinen muutosnopeus
- Erotusosamäärä
- Derivaatta
- Derivoituvuus
- Derivoituvuus ja jatkuvuus
- Derivaattafunktio
- Derivointisääntöjä

1. $Dc = 0$, c on vakio
2. $Dx = 1$
3. $Dx^n = nx^{n-1}$, $n \in \mathbb{Z}, n \geq 2$

Olkoot f ja g derivoituvia.

4. $D(cf(x)) = cf'(x)$, c on vakio (vakion siirtosääntö)
5. $D(f(x) + g(x)) = f'(x) + g'(x)$ (summan derivointi)

Derivointisääntöjä

- Keskimääräinen muutosnopeus
- Hetkellinen muutosnopeus
- Erotusosamäärä
- Derivaatta
- Derivoituvuus
- Derivoituvuus ja jatkuvuus
- Derivaattafunktio
- Derivointisääntöjä

1. $Dc = 0$, c on vakio
2. $Dx = 1$
3. $Dx^n = nx^{n-1}$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 2$

Olkoot f ja g derivoituvia.

4. $D(cf(x)) = cf'(x)$, c on vakio (vakion siirtosääntö)
5. $D(f(x) + g(x)) = f'(x) + g'(x)$ (summan derivointi)
6. $D(f(x)g(x)) =$

Derivointisääntöjä

- Keskimääräinen muutosnopeus
- Hetkellinen muutosnopeus
- Erotusosamäärä
- Derivaatta
- Derivoituvuus
- Derivoituvuus ja jatkuvuus
- Derivaattafunktio
- Derivointisääntöjä

1. $Dc = 0$, c on vakio
2. $Dx = 1$
3. $Dx^n = nx^{n-1}$, $n \in \mathbb{Z}, n \geq 2$

Olkoot f ja g derivoituvia.

4. $D(cf(x)) = cf'(x)$, c on vakio (vakion siirtosääntö)
5. $D(f(x) + g(x)) = f'(x) + g'(x)$ (summan derivointi)
6. $D(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ (tulon derivointi)

Derivointisääntöjä

- Keskimääräinen muutosnopeus
- Hetkellinen muutosnopeus
- Erotusosamäärä
- Derivaatta
- Derivoituvuus
- Derivoituvuus ja jatkuvuus
- Derivaattafunktio
- Derivointisääntöjä

1. $Dc = 0$, c on vakio
2. $Dx = 1$
3. $Dx^n = nx^{n-1}$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 2$

Olkoot f ja g derivoituvia.

4. $D(cf(x)) = cf'(x)$, c on vakio (vakion siirtosääntö)
5. $D(f(x) + g(x)) = f'(x) + g'(x)$ (summan derivointi)
6. $D(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ (tulon derivointi)
7. $D\frac{f(x)}{g(x)} =$

Derivointisääntöjä

- Keskimääräinen muutosnopeus
- Hetkellinen muutosnopeus
- Erotusosamäärä
- Derivaatta
- Derivoituvuus
- Derivoituvuus ja jatkuvuus
- Derivaattafunktio
- Derivointisääntöjä

1. $Dc = 0$, c on vakio
2. $Dx = 1$
3. $Dx^n = nx^{n-1}$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 2$

Olkoot f ja g derivoituvia.

4. $D(cf(x)) = cf'(x)$, c on vakio (vakion siirtosääntö)
5. $D(f(x) + g(x)) = f'(x) + g'(x)$ (summan derivointi)
6. $D(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ (tulon derivointi)
7. $D\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$, $g(x) \neq 0$ (osamäärän derivointi)

Derivointisääntöjä

- Keskimääräinen muutosnopeus
- Hetkellinen muutosnopeus
- Erotusosamäärä
- Derivaatta
- Derivoituvuus
- Derivoituvuus ja jatkuvuus
- Derivaattafunktio
- Derivointisääntöjä

1. $Dc = 0$, c on vakio
2. $Dx = 1$
3. $Dx^n = nx^{n-1}$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 2$

Olkoot f ja g derivoituvia.

4. $D(cf(x)) = cf'(x)$, c on vakio (vakion siirtosääntö)
5. $D(f(x) + g(x)) = f'(x) + g'(x)$ (summan derivointi)
6. $D(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ (tulon derivointi)
7. $D\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$, $g(x) \neq 0$ (osamäärän derivointi)
8. $Df(x)^n =$

Derivointisääntöjä

- Keskimääräinen muutosnopeus
- Hetkellinen muutosnopeus
- Erotusosamäärä
- Derivaatta
- Derivoituvuus
- Derivoituvuus ja jatkuvuus
- Derivaattafunktio
- Derivointisääntöjä

1. $Dc = 0$, c on vakio
2. $Dx = 1$
3. $Dx^n = nx^{n-1}$, $n \in \mathbb{Z}, n \geq 2$

Olkoot f ja g derivoituvia.

4. $D(cf(x)) = cf'(x)$, c on vakio (vakion siirtosääntö)
5. $D(f(x) + g(x)) = f'(x) + g'(x)$ (summan derivointi)
6. $D(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ (tulon derivointi)
7. $D\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$, $g(x) \neq 0$ (osamäärän derivointi)
8. $Df(x)^n = nf(x)^{n-1}f'(x)$, $n \in \mathbb{Z}, n \geq 2$