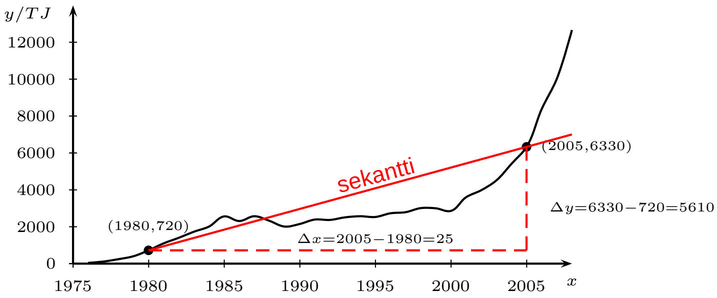
Funktion derivaatta

Hannu Lehto
Lahden Lyseon lukio

Keskimääräinen muutosnopeus

Lämpöpumpuilla vuosittain Suomessa tuotettu energia $y(TJ)$[a]



Keskimääräinen vuotuinen muutosnopeus vuosina 1980–2005

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5610}{25} \approx 220(\text{TJ/vuosi})$$

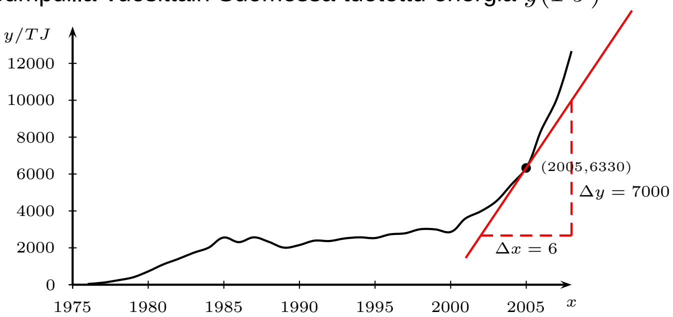
on sekantin kulmakerroin.

2 / 13

[a]Lähde: Tilastokeskus

Hetkellinen muutosnopeus

Lämpöpumpuilla vuosittain Suomessa tuotettu energia $y(TJ)$



Hetkellinen muutosnopeus vuonna 2005 on kohtaan $x = 2005$ piirretyn tangentin kulmakerroin

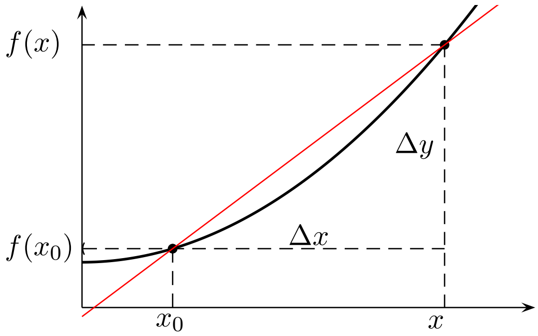
$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{7000}{6} \approx 1200(\text{TJ/vuosi}).$$

Edellä suoritettiin *graafinen derivointi*.

3 / 13

Erotusosamäärä

Tarkastellaan funktiota $y = f(x)$. Valitaan kuvaajalta kaksi pistettä $(x_0, f(x_0))$ ja $(x, f(x)),\ x \neq x_0$.

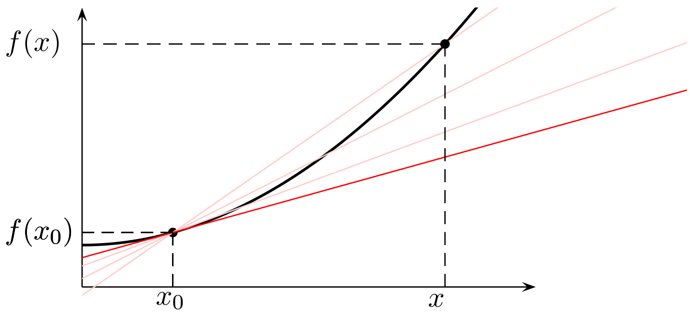


sekantin $k = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \underbrace{\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\text{erotusosamäärä kohdassa } x_0}$

Funktion arvojen keskimääräinen muutosnopeus välillä $[x_0, x]$.

Derivaatta

Tutkitaan, mitä tapahtuu, kun $x \longrightarrow x_0$.



Sekantti kääntyy tangentiksi, jonka kulmakerroin on

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)}$$

Funktion f derivaatta kohdassa x_0

Funktion f hetkellinen muutosnopeus kohdassa x_0

Derivaatta

Määritelmä 1. Funktion $y = f(x)$ derivaatta kohdassa x_0 on

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

mikäli raja-arvo on olemassa. Tällöin f on *derivoituva* kohdassa x_0.

Esimerkki 1. Olkoon $f(x) = x^2$. Määritä $f'(1)$

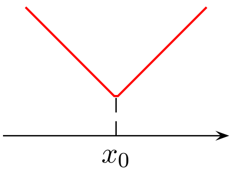
a) laskimella,
b) derivaatan määritelmän avulla.

Esimerkki 2. Olkoon $f(x) = \sqrt{x}$. Määritä $f'(2)$.

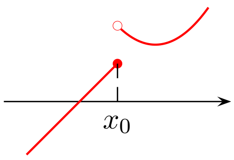
Derivoituvuus graafisesti

Funktio f on derivoituva kohdassa x_0, jos tähän kohtaan voidaan piirtää yksikäsitteinen tangentti, jolla on kulmakerroin.

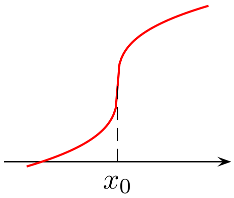
Ovatko seuraavat funktiot derivoituvia kohdassa x_0?



Ei yksikäsitteistä tangenttia (terävä kärki)



Ei yksikäsitteistä tangenttia (epäjatkuvuuskohta)



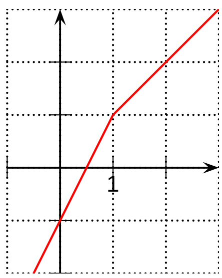
Yksikäsitteinen tangentti, mutta pystysuora, jolla ei ole kulmakerrointa

Derivoituvuus graafisesti

Esimerkki. Tutki graafisesti, onko funktio

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x \leq 1 \\ x, & x > 1 \end{cases}$$

derivoituva kohdassa $x = 1$.



Funktio ei ole derivoituva kohdassa $x = 1$, koska kuvaajassa on kohdassa $x = 1$ terävä kärki.

Derivoituvuus analyyttisesti

Esimerkki. Tutki analyyttisesti (määritelmän nojalla), onko funktio

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1, & x \leq 0 \\ -2x^2 + x + 1, & x > 0 \end{cases}$$

derivoituva kohdassa $x = 0$.

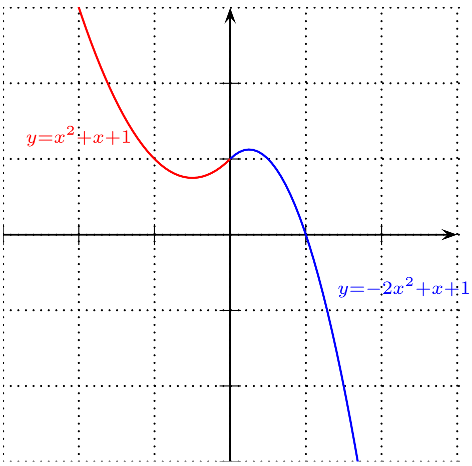
$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \to 0-} \frac{x^2 + x + 1 - \left(0^2 + 0 + 1\right)}{x} \\
&= \lim_{x \to 0-} \frac{x^2 + x}{x} = 1 = f'(0-) \\
\lim_{x \to 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \to 0+} \frac{-2x^2 + x + 1 - \left(0^2 + 0 + 1\right)}{x} \\
&= \lim_{x \to 0+} \frac{-2x^2 + x}{x} = 1 = f'(0+)
\end{aligned}$$

Koska $f'(0-) = f'(0+)$, niin f on derivoituva kohdassa $x = 0$, ja $f'(0) = 1$.

9 / 13

Derivoituvuus analyyttisesti

Esimerkki jatkuu.



10 / 13

Derivoituvuus ja jatkuvuus

Lause 1. *Jos funktio on derivoituva, niin se on myös jatkuva.*

Huomautus. Käänteinen lause ei ole voimassa. Keksi funktio, joka on jatkuva, mutta ei derivoituva.

11 / 13

Derivaattafunktio

Esimerkki. Määritä funktion $f(x) = x^2$ derivaatta kohdassa x_0. Laske myös $f'(4)$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} (x + x_0) = 2x_0 = f'(x_0)$$

Merkitsemällä x_0:aa x:llä saadaan *derivaatta(funktio)* $f'(x) = 2x$.

$f'(4) = 2 \cdot 4 = 8$

Merkintöjä. $f' = Df = \dfrac{df}{dx} = \dfrac{dy}{dx} = y'$

Derivaattafunktion f' arvo $f'(x)$ on funktion derivaatta kohdassa x.

Derivointisääntöjä

1. $Dc = 0$, c on vakio
2. $Dx = 1$
3. $Dx^n = nx^{n-1}, n \in \mathbb{Z}, n \geq 2$

Olkoot f ja g derivoituvia.

4. $D\left(cf(x)\right) = cf'(x)$, c on vakio (vakion siirtosääntö)
5. $D\left(f(x) + g(x)\right) = f'(x) + g'(x)$ (summan derivointi)
6. $D\left(f(x)g(x)\right) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ (tulon derivointi)
7. $D\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}, \quad g(x) \neq 0$ (osamäärän derivointi)
8. $Df(x)^n = nf(x)^{n-1}f'(x), \quad n \in \mathbb{Z}, n \geq 2$