Funktion kulku

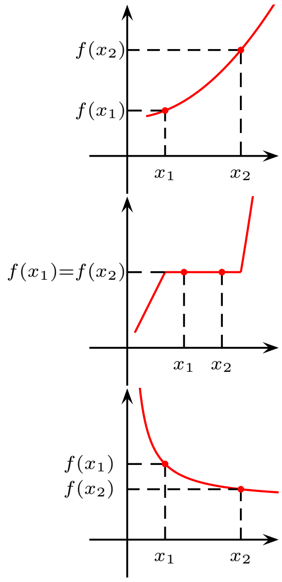
Hannu Lehto
Lahden Lyseon lukio

Funktion kasvavuus ja vähenevyys (monotonisuus)

Määritelmä 1. Funktio f on välillä $I \subset \mathbb{R}$

- *aidosti kasvava*, jos
  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- *kasvava*, jos
  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
- *aidosti vähenevä*, jos
  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$
- *vähenevä*, jos
  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

aina, kun $x_1, x_2 \in I$.



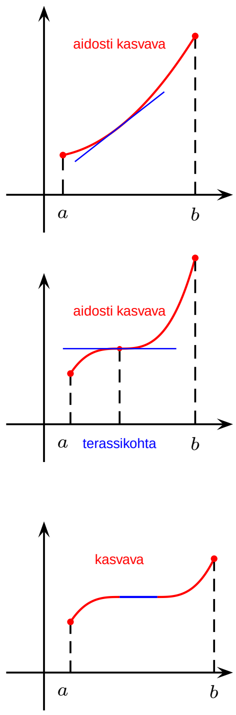
Funktio f on *(aidosti) monotoninen* välillä I, jos se on tällä välillä (aidosti) kasvava tai (aidosti) vähenevä.

2 / 9

Funktion monotonisuuden tutkiminen

Olkoon funktio f jatkuva välillä $[a, b]$ ja derivoituva välillä $]a, b[$. Funktio f on välillä $[a, b]$

- aidosti kasvava, jos välillä $]a, b[$ on $f'(x) \geq 0$ ja $f'(x) = 0$ vain yksittäisissä kohdissa,
- kasvava, jos välillä $]a, b[$ on $f'(x) \geq 0$,
- aidosti vähenevä, jos välillä $]a, b[$ on $f'(x) \leq 0$ ja $f'(x) = 0$ vain yksittäisissä kohdissa,
- vähenevä, jos välillä $]a, b[$ on $f'(x) \leq 0$

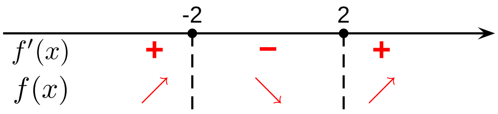


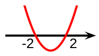
3 / 9

Esimerkki

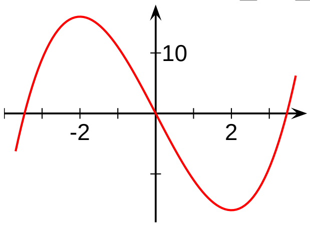
Tutki funktion $f(x) = x^3 - 12x$ monotonisuutta.

f on jatkuva ja derivoituva polynomifunktiona.
$f'(x) = 3x^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -2$

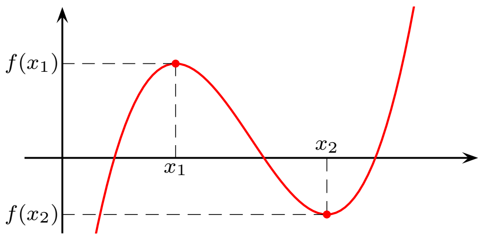




f on aidosti kasvava, kun $x \leq -2 \vee x \geq 2$
f on aidosti vähenevä, kun $-2 \leq x \leq 2$



Funktion paikalliset ääriarvot

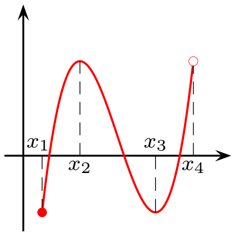


maksimikohta x_1
maksimi(arvo) $f(x_1)$
maksimipiste $(x_1, f(x_1))$

minimikohta x_2
minimi(arvo) $f(x_2)$
minimipiste $(x_2, f(x_2))$

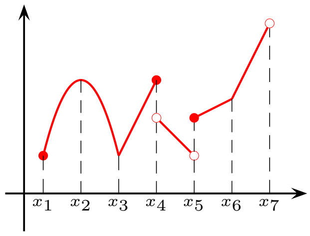
Ääriarvokohtia — eri tapauksia

Funktio on derivoituva



x_1 minimikohta
x_2 maksimikohta
x_3 minimikohta
x_4 ei ääriarvokohta

Funktio ei ole derivoituva kaikissa kohdissa



x_1 minimikohta
x_2 maksimikohta
x_3 minimikohta
x_4 maksimikohta
x_5 ei ääriarvokohta
x_6 ei ääriarvokohta
x_7 ei ääriarvokohta

6 / 9

Ääriarvokohtia — eri tapauksia

Funktion ääriarvokohtia *voivat* olla

1. derivaatan nollakohdat,
2. määrittelyvälin päätepisteet,
3. terävät kärjet,
4. epäjatkuvuuskohdat.

Miten ääriarvokohdat löydetään?

7 / 9

Esimerkki

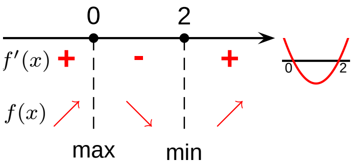
Määritä funktion $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$ ääriarvot,

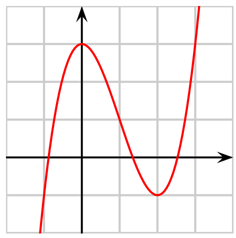
a) kun $x \in \mathbb{R}$,

b) välillä $[-1, 3]$.

a) f on jatkuva ja derivoituva polynomifunktiona.

$f'(x) = 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$





Kuva 1: $y = x^3 - 3x^2 + 3$

maksimikohta $x = 0$

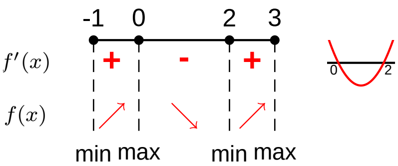
maksimi $f(0) = 3$

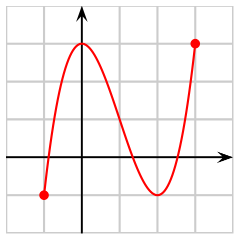
minimikohta $x = 2$

minimi $f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 3 = 1$

b) f on jatkuva ja derivoituva polynomifunktiona.

$f'(x) = 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$





Kuva 2: $y = x^3 - 3x^2 + 3, \ x \in [-1, 3]$

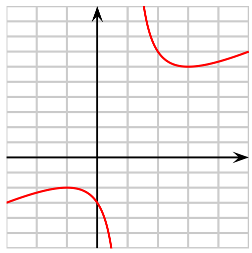
maksimikohta	maksimi	minimikohta	minimi
$x = 0$	$f(0) = 3$	$x = 2$	$f(2) = 1$
$x = 3$	$f(3) = 3$	$x = -1$	$f(-1) = -1$

Rationaalifunktion monotonisuus ja ääriarvot

Esimerkki. Tutki funktion $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x-1}$ monotonisuutta. Määritä myös ääriarvot.

Määrittelyehto on $x \neq 1$.
f on jatkuva ja derivoituva, kun $x \neq 1$.
$f'(x) = \dfrac{2x(x-1)-(x^2+3)\cdot 1}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2} = 0$
$x^2-2x-3 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 3$

		-1		1		3	
x^2-2x-3	+		-		-		+
$(x-1)^2$	+		+		+		+
$f'(x)$	+		-		-		+
$f(x)$	↗	max	↘		↘	min	↗



kasvava, kun $x \leq -1 \vee x \geq 3$
vähenevä, kun $-1 \leq x < 1 \vee 1 < x \leq 3$
maksimi $f(-1) = -2$ ja minimi $f(3) = 6$