

Jatkuvan funktion ominaisuudet

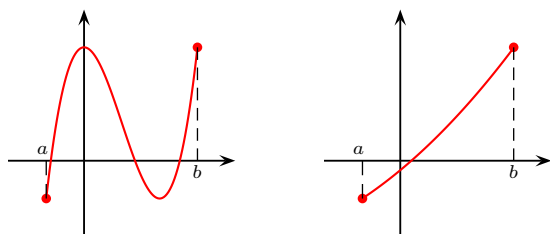
Hannu Lehto
Lahden Lyseon lukio

Jatkuvan funktion nollakohdat	2
Haarukointimenetelmä.....	5
Jatkuvan funktion suurin ja pienin arvo suljetulla välillä	6
Jatkuvan funktion suurin ja pienin arvo ei-suljetulla välillä	9

Jatkuvan funktion nollakohdat

Lause 1. Olkoon f jatkuva välillä $[a, b]$. Jos lisäksi $f(a)$ ja $f(b)$ ovat erimerkkiset, niin funktiolla on välillä $]a, b[$ ainakin yksi nollakohta.

Jos lisäksi f on aidosti monotoninen, niin nollakohtia on tasan yksi.



2 / 10

Esimerkki

Osoita, että funktiolla $f(x) = x^3 + 2x - 3$ on täsmälleen yksi nollakohta.

- Funktio f on jatkuva polynomifunktiona.
- $f(0) = -3 < 0$ ja $f(2) = 9 > 0$.

Täten funktiolla f on ainakin yksi nollakohta.

- $f'(x) = 3x^2 + 2 > 0$ (Miksi?), joten f on aidosti kasvava.

Näin funktiolla on tasan yksi nollakohta.

3 / 10

Esimerkki

Montako ratkaisua on yhtälöllä $-\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x = -2$?

$$-\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x = -2 \Leftrightarrow \underbrace{-\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x + 2}_{f(x)} = 0$$

$f(x)$ on jatkuva ja derivoituva polynomifunktiona.

$$f'(x) = -x^2 - 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -3$$

	-3	1	
$f'(x)$	-	+	-
$f(x)$	↘	↗	↘
] $-\infty, -3]$] $-3, 1]$] $1, \infty[$
$f(-3) = -7 < 0$	$f(-3) = -7 < 0$	$f(1) = 3\frac{2}{3} > 0$	
$f(-6) = 20 > 0$	$f(1) = 3\frac{2}{3} > 0$	$f(3) = -7 < 0$	
f aid. vähenevä	f aid. kasvava	f aid. vähenevä	
tasan yksi nollakohta	tasan yksi nollakohta	tasan yksi nollakohta	

Täten nollakohtia on kolme, joten yhtälöllä on kolme ratkaisua.

4 / 10

Haarukointimenetelmä

Esimerkki. Yhtälöllä $x^3 + 2x - 1 = 0$ on yksi ratkaisu. Määritä se yhden desimaalin tarkkuudella.

f on jatkuva polynomifunktiona.

	väli	keskipiste
$f(0) = -1 < 0$		
$f(1) = 2 > 0$	$]0, 1[$	0,5
$f(0,5) = 0,125 > 0$	$]0; 0,5[$	0,25
$f(0,25) = -0,48 \dots < 0$	$]0,25; 0,5[$	0,375
$f(0,375) = -0,19 \dots < 0$	$]0,375; 0,5[$	0,4375
$f(0,4375) = -0,04 \dots < 0$	$]0,4375; 0,5[$	0,46875
$f(0,46875) = 0,04 > 0$	$]0,4375; 0,46875[$	0,453125
$f(0,453125) < 0$	$]0,453125; 0,46875[$	

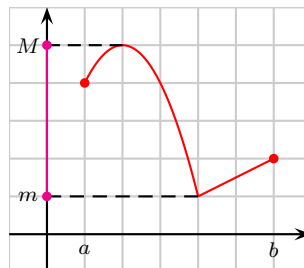
Koska kaikki välin $]0,453125; 0,46875[$ luvut pyöristyvät 0,5:ksi, niin vastaus yhden desim. tarkkuudella on 0,5.

5 / 10

Jatkuvan funktion suurin ja pienin arvo suljetulla välillä

Olkoon f **suljetulla välillä** $[a, b]$ **jatkuva** funktio. Funktio f saa aina suurimman ja pienimmän arvonsa

- derivaatan nollakohdissa,
- välin päätepisteissä tai
- terävissä kärjissä (joissa funktio ei ole derivoituva).



Funktion arvojoukko on $A_f = [m, M]$

6 / 10

Esimerkki 1

Määritä funktion $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 1$ suurin ja pienin arvo välillä $[1, 3]$.

$f(x)$ on jatkuva ja derivoituva välillä $[1, 3]$

$$f'(x) = -3x^2 + 6x = 0$$

$$x = 0 \notin [1, 3] \vee x = 2 \in [1, 3]$$

Derivaatan nollakohdat: $f(2) = -2^3 + 3 \cdot 2^2 + 1 = 5$

Välin päätepisteet: $f(1) = 3$ ja $f(3) = -3^3 + 3 \cdot 3^2 + 1 = 1$

Täten suurin arvo on $M = 5$ ja pienin arvo $m = 1$.



7 / 10

Esimerkki 2

Määritä funktion $f(x) = \sqrt{-x^2 + x + 2}$ suurin ja pienin arvo.

$f(x)$ on määritelty, kun $-x^2 + x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 2$

Neliöjuuri on suurin(pienin), kun juurettava on suurin(pienin), koska neliöjuurifunktio on aidosti kasvava.

Tarkastellaan funktiota $g(x) = -x^2 + x + 2$, $-1 \leq x \leq 2$ joka on jatkuva ja derivoituva.

$$g'(x) = -2x + 1 = 0$$

$$x = \frac{1}{2} \in [-1, 2]$$

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{4}$$

$$g(-1) = 0 \text{ ja } g(2) = 0$$

Täten $g(x)$:n suurin arvo on $\frac{9}{4}$ ja pienin arvo 0,

joten $f(x)$ suurin arvo on $\sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$ ja pienin arvo $\sqrt{0} = 0$.

8 / 10

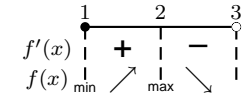
Jatkuvan funktion suurin ja pienin arvo ei-suljetulla välillä

Määritä funktion $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 1$ suurin ja pienin arvo välillä $[1, 3[$.

$f(x)$ on jatkuva ja derivoituva välillä $[1, 3[$

$$f'(x) = -3x^2 + 6x = 0$$

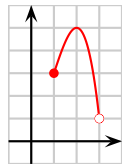
$$x = 0 \notin [1, 3[\vee x = 2 \in [1, 3[$$



$$\text{Suurin arvo } f(2) = -2^3 + 3 \cdot 2^2 + 1 = 5$$

$$\text{Minimi } f(1) = 3$$

Koska $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 1 < 3$, niin pienintä arvoa ei ole.



9 / 10

Jatkuvan funktion suurin ja pienin arvo ei-suljetulla välillä

Määritä funktion $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 1$ suurin ja pienin arvo välillä $] -\infty, 3[$.



10 / 10