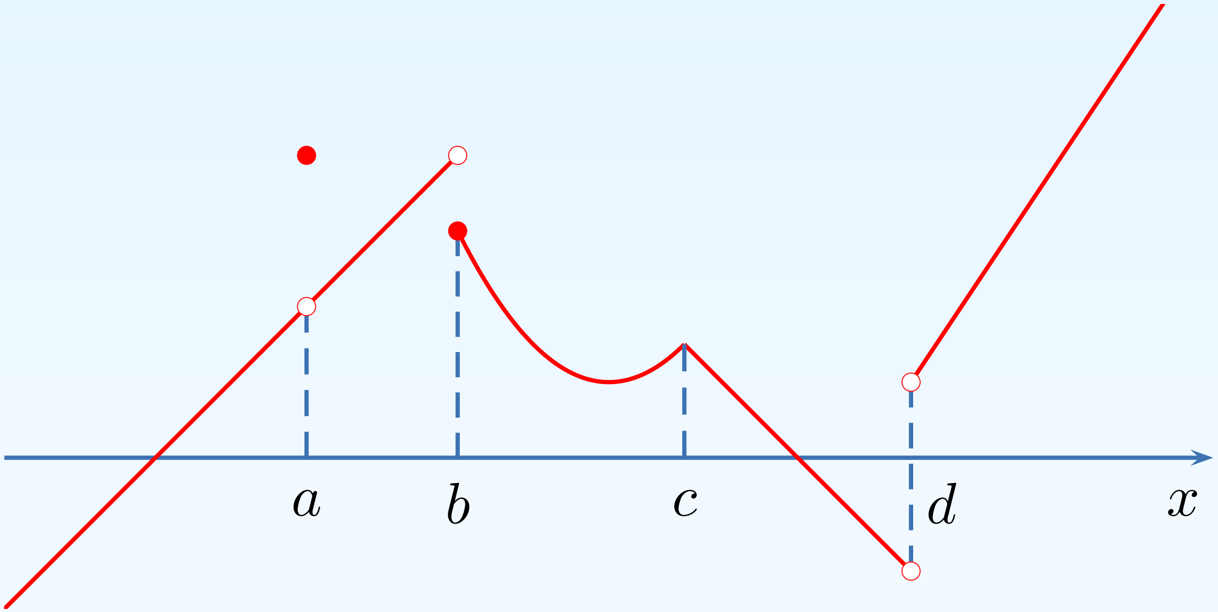
Funktion jatkuvuus

Hannu Lehto

Lahden Lyseon lukio

Funktion jatkuvuus

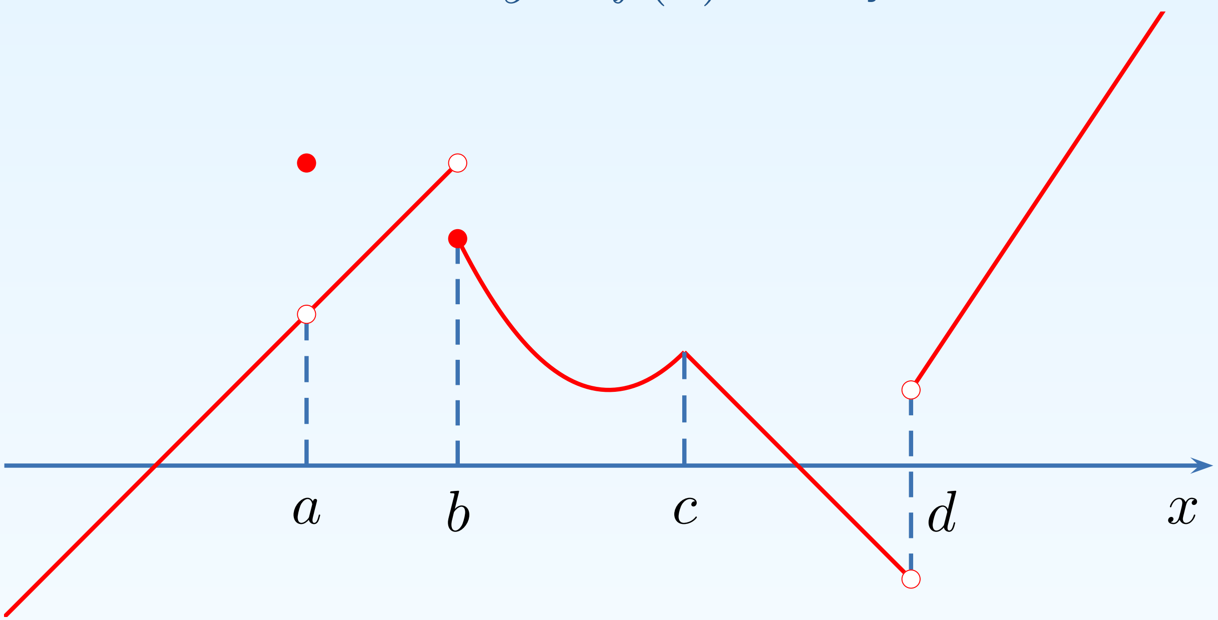
Alla on erään funktion $y = f(x)$ kuvaaja.



Epäjatkuva kohdassa

Funktion jatkuvuus

Alla on erään funktion $y = f(x)$ kuvaaja.

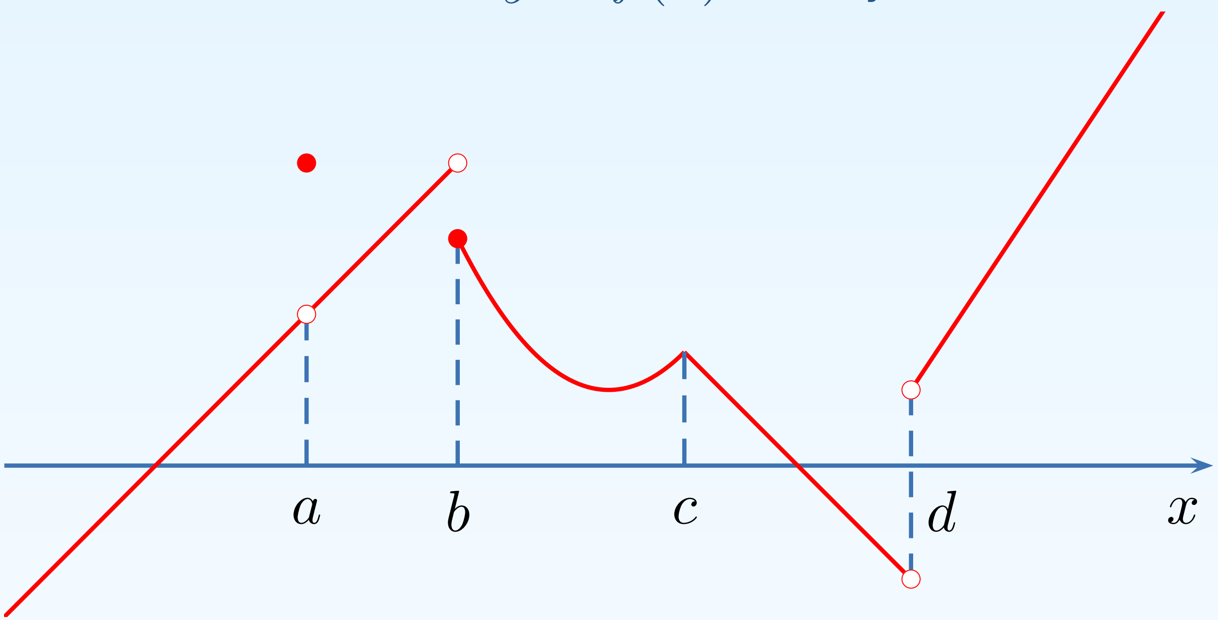


Epäjatkuva kohdassa

- $x = a$,

Funktion jatkuvuus

Alla on erään funktion $y = f(x)$ kuvaaja.

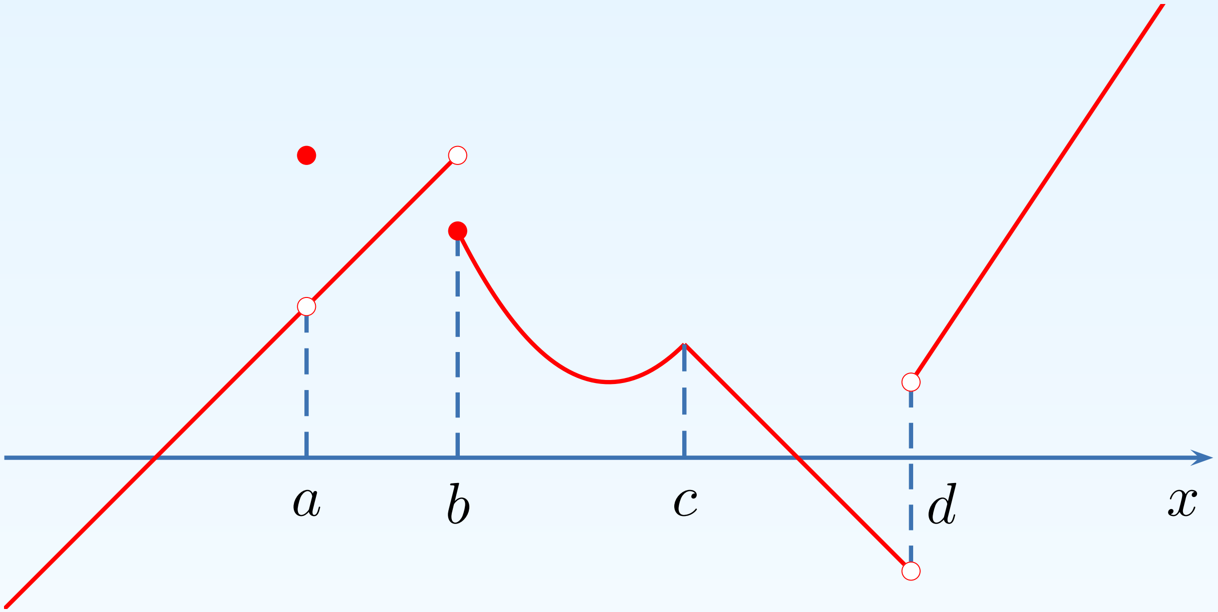


Epäjatkuva kohdassa

- $x = a$, $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$

Funktion jatkuvuus

Alla on erään funktion $y = f(x)$ kuvaaja.

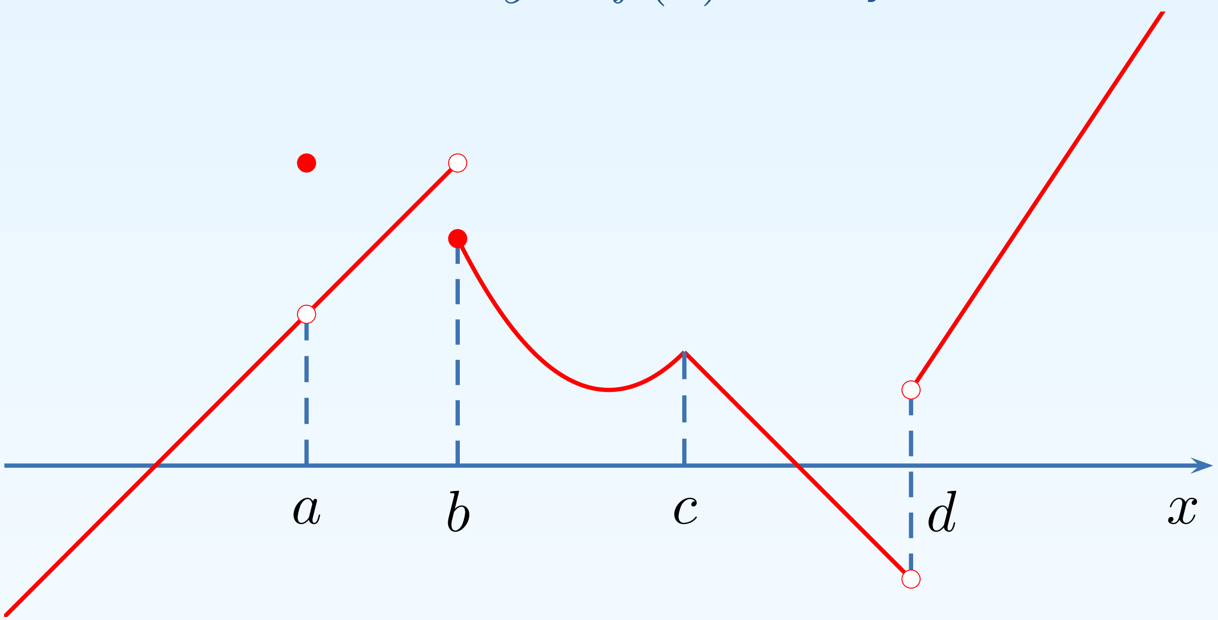


Epäjatkuva kohdassa

- $x = a$, $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$
- $x = b$,

Funktion jatkuvuus

Alla on erään funktion $y = f(x)$ kuvaaja.

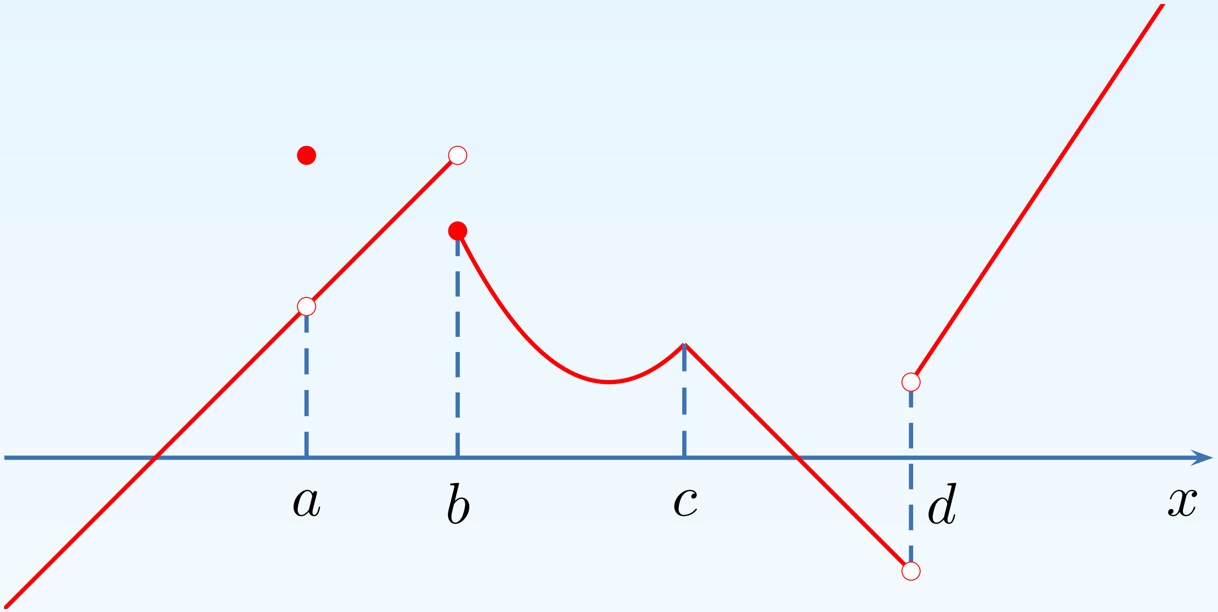


Epäjatkuva kohdassa

- $x = a$, $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$
- $x = b$, $\lim_{x \to b-} f(x) \neq \lim_{x \to b+} f(x)$ eli

Funktion jatkuvuus

Alla on erään funktion $y = f(x)$ kuvaaja.

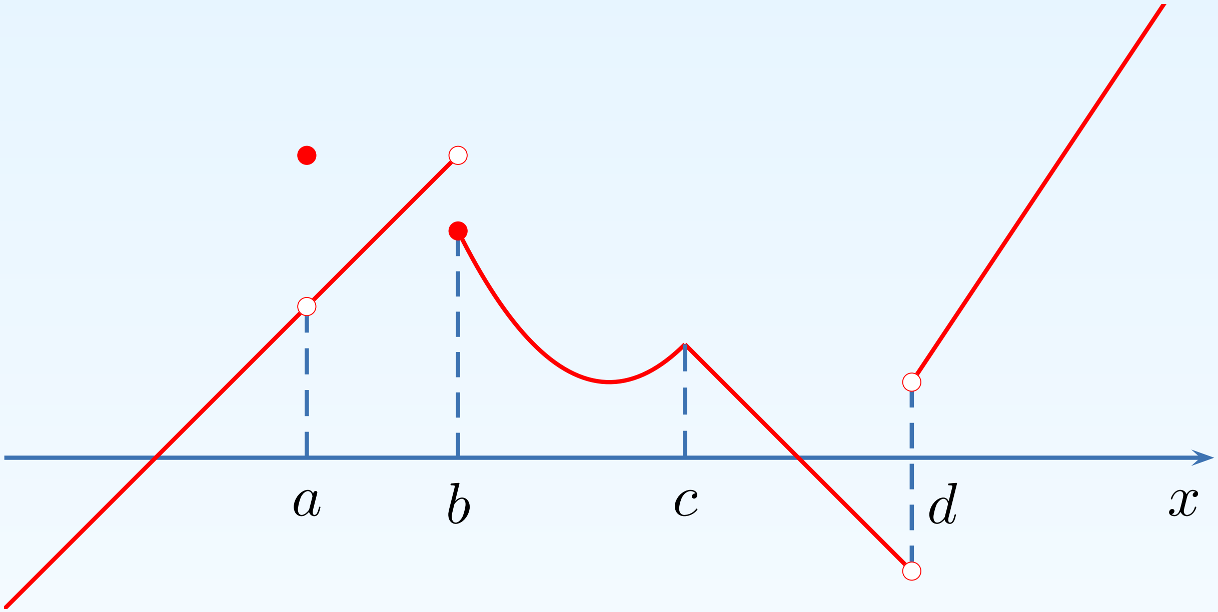


Epäjatkuva kohdassa

- $x = a$, $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$
- $x = b$, $\lim_{x \to b-} f(x) \neq \lim_{x \to b+} f(x)$ eli $\lim_{x \to b} f(x)$ ei olemassa

Funktion jatkuvuus

Alla on erään funktion $y = f(x)$ kuvaaja.



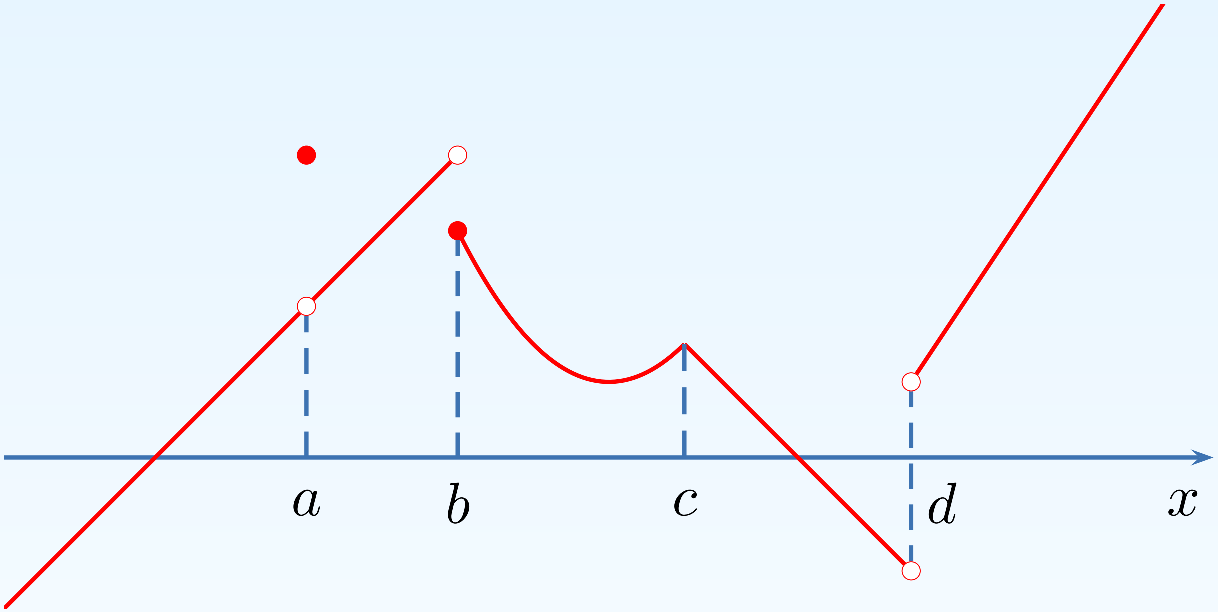
Epäjatkuva kohdassa

- $x = a$, $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$
- $x = b$, $\lim_{x \to b-} f(x) \neq \lim_{x \to b+} f(x)$ eli $\lim_{x \to b} f(x)$ ei olemassa

Jatkuva kohdassa

Funktion jatkuvuus

Alla on erään funktion $y = f(x)$ kuvaaja.



Epäjatkuva kohdassa

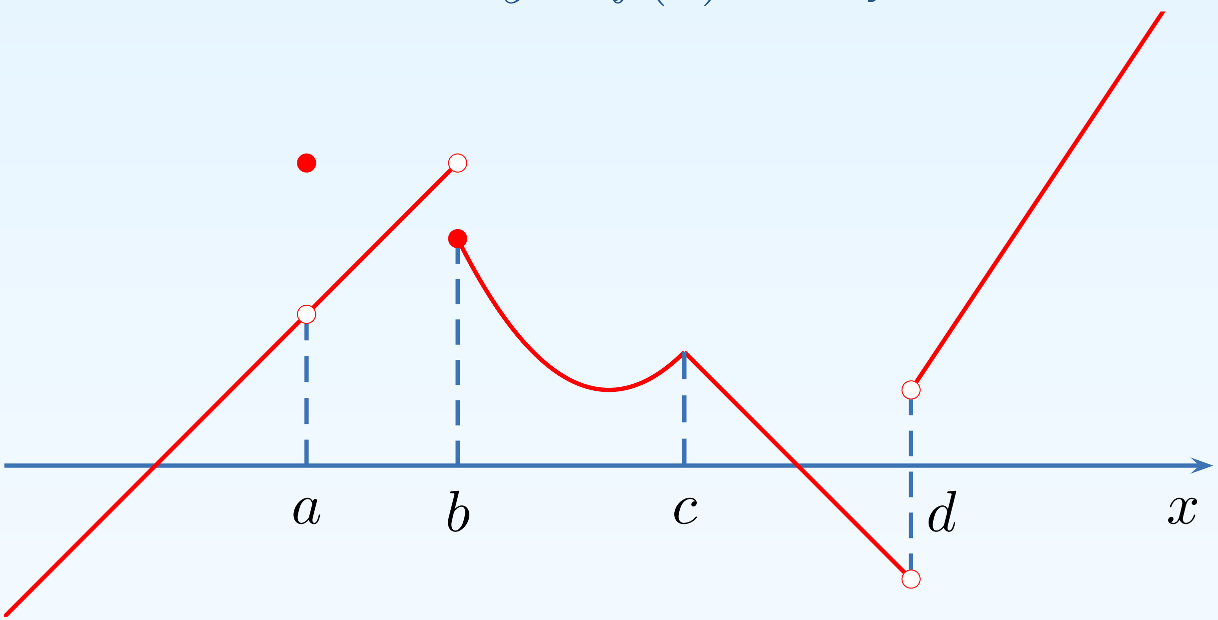
- $x = a$, $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$
- $x = b$, $\lim_{x \to b-} f(x) \neq \lim_{x \to b+} f(x)$ eli $\lim_{x \to b} f(x)$ ei olemassa

Jatkuva kohdassa

- $x = c$,

Funktion jatkuvuus

Alla on erään funktion $y = f(x)$ kuvaaja.



Epäjatkuva kohdassa

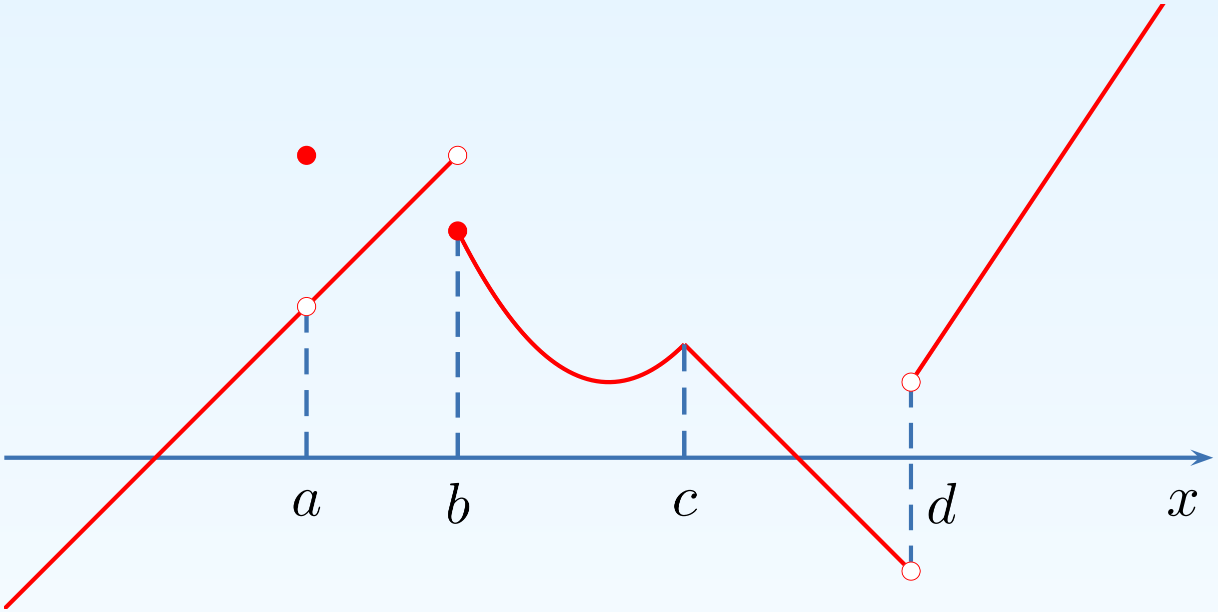
- $x = a$, $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$
- $x = b$, $\lim_{x \to b-} f(x) \neq \lim_{x \to b+} f(x)$ eli $\lim_{x \to b} f(x)$ ei olemassa

Jatkuva kohdassa

- $x = c$, $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

Funktion jatkuvuus

Alla on erään funktion $y = f(x)$ kuvaaja.



Epäjatkuva kohdassa

- $x = a$, $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$
- $x = b$, $\lim_{x \to b-} f(x) \neq \lim_{x \to b+} f(x)$ eli $\lim_{x \to b} f(x)$ ei olemassa

Jatkuva kohdassa

- $x = c$, $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

Ei ole määritelty kohdassa $x = d$.

Jatkuvuuden määritelmä

Määritelmä 1. Olkoon funktio f määritelty välillä $]x_0 - r, x_0 + r[, r > 0$. Funktio f on *jatkuva kohdassa* $x = x_0$, jos

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).}$$

Muussa tapauksessa f on *epäjatkuva kohdassa* $x = x_0$.

Jatkuvuuden määritelmä

Määritelmä 1. Olkoon funktio f määritelty välillä $]x_0 - r, x_0 + r[, r > 0$. Funktio f on *jatkuva kohdassa* $x = x_0$, jos

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).}$$

Muussa tapauksessa f on *epäjatkuva kohdassa* $x = x_0$.

Määritelmä 2. Funktio f on jatkuva välillä I, jos se on jatkuva välin jokaisessa pisteessä.

Esimerkki

Onko funktio $f(x) = \begin{cases} -x^2+5, & x \leq 2 \\ 2x^2-3x, & x > 2 \end{cases}$ jatkuva kohdassa $x = 2$?

Esimerkki

- Funktion jatkuvuus
- Jatkuvuuden määritelmä
- Joidenkin funktioiden jatkuvuus

Onko funktio $f(x) = \begin{cases} -x^2+5, & x \le 2 \\ 2x^2-3x, & x > 2 \end{cases}$ jatkuva kohdassa $x = 2$?

$$\lim_{x \to 2-} f(x) =$$

- Funktion jatkuvuus
- Jatkuvuuden määritelmä
- Joidenkin funktioiden jatkuvuus

Esimerkki

Onko funktio $f(x) = \begin{cases} -x^2+5, & x \le 2 \\ 2x^2-3x, & x > 2 \end{cases}$ jatkuva kohdassa $x = 2$?

$$\lim_{x \to 2-} f(x) = \lim_{x \to 2-} (-x^2+5) =$$

Esimerkki

Onko funktio $f(x) = \begin{cases} -x^2+5, & x \le 2 \\ 2x^2-3x, & x > 2 \end{cases}$ jatkuva kohdassa $x = 2$?

$$\lim_{x \to 2-} f(x) = \lim_{x \to 2-} (-x^2+5) = 1$$

Esimerkki

Onko funktio $f(x) = \begin{cases} -x^2+5, & x \leq 2 \\ 2x^2-3x, & x > 2 \end{cases}$ jatkuva kohdassa $x = 2$?

$$\lim_{x \to 2-} f(x) = \lim_{x \to 2-} (-x^2+5) = 1$$
$$\lim_{x \to 2+} f(x) =$$

- Funktion jatkuvuus
- Jatkuvuuden määritelmä
- Joidenkin funktioiden jatkuvuus

Esimerkki

Onko funktio $f(x) = \begin{cases} -x^2+5, & x \leq 2 \\ 2x^2-3x, & x > 2 \end{cases}$ jatkuva kohdassa $x = 2$?

$$\lim_{x\to 2-} f(x) = \lim_{x\to 2-} (-x^2+5) = 1$$

$$\lim_{x\to 2+} f(x) = \lim_{x\to 2+} (2x^2-3x) =$$

Esimerkki

Onko funktio $f(x) = \begin{cases} -x^2+5, & x \leq 2 \\ 2x^2-3x, & x > 2 \end{cases}$ jatkuva kohdassa $x = 2$?

$$\lim_{x \to 2-} f(x) = \lim_{x \to 2-} (-x^2+5) = 1$$
$$\lim_{x \to 2+} f(x) = \lim_{x \to 2+} (2x^2-3x) = 2$$

- Funktion jatkuvuus
- Jatkuvuuden määritelmä
- Joidenkin funktioiden jatkuvuus

Esimerkki

Onko funktio $f(x) = \begin{cases} -x^2+5, & x \le 2 \\ 2x^2-3x, & x > 2 \end{cases}$ jatkuva kohdassa $x = 2$?

$$\lim_{x \to 2-} f(x) = \lim_{x \to 2-} (-x^2+5) = 1$$
$$\lim_{x \to 2+} f(x) = \lim_{x \to 2+} (2x^2-3x) = 2$$

Koska $\lim_{x \to 2-} f(x) \neq \lim_{x \to 2+} f(x)$, niin

- Funktion jatkuvuus
- Jatkuvuuden määritelmä
- Joidenkin funktioiden jatkuvuus

Esimerkki

Onko funktio $f(x) = \begin{cases} -x^2+5, & x \le 2 \\ 2x^2-3x, & x > 2 \end{cases}$ jatkuva kohdassa $x = 2$?

$$\lim_{x \to 2-} f(x) = \lim_{x \to 2-} (-x^2+5) = 1$$
$$\lim_{x \to 2+} f(x) = \lim_{x \to 2+} (2x^2-3x) = 2$$

Koska $\lim_{x \to 2-} f(x) \ne \lim_{x \to 2+} f(x)$, niin $\lim_{x \to 2} f(x)$ ei ole olemassa, joten

- Funktion jatkuvuus
- Jatkuvuuden määritelmä
- Joidenkin funktioiden jatkuvuus

Esimerkki

Onko funktio $f(x) = \begin{cases} -x^2+5, & x \leq 2 \\ 2x^2-3x, & x > 2 \end{cases}$ jatkuva kohdassa $x = 2$?

$$\lim_{x \to 2-} f(x) = \lim_{x \to 2-} (-x^2+5) = 1$$
$$\lim_{x \to 2+} f(x) = \lim_{x \to 2+} (2x^2-3x) = 2$$

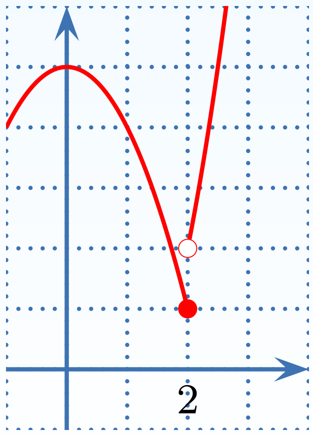
Koska $\lim_{x \to 2-} f(x) \neq \lim_{x \to 2+} f(x)$, niin $\lim_{x \to 2} f(x)$ ei ole olemassa, joten f ei ole jatkuva kohdassa $x = 2$.

Esimerkki

Onko funktio $f(x) = \begin{cases} -x^2+5, & x \le 2 \\ 2x^2-3x, & x > 2 \end{cases}$ jatkuva kohdassa $x = 2$?

$$\lim_{x\to 2-} f(x) = \lim_{x\to 2-} (-x^2+5) = 1$$
$$\lim_{x\to 2+} f(x) = \lim_{x\to 2+} (2x^2-3x) = 2$$

Koska $\lim_{x\to 2-} f(x) \neq \lim_{x\to 2+} f(x)$, niin $\lim_{x\to 2} f(x)$ ei ole olemassa, joten f ei ole jatkuva kohdassa $x = 2$.



Joidenkin funktioiden jatkuvuus

1. Jos f ja g ovat jatkuvia välillä I, niin $f+g$, $f-g$ ja fg ovat jatkuvia välillä I. Lisäksi $\dfrac{f}{g}$ on jatkuva kaikissa sellaisissa kohdissa x_0, joissa $g(x_0) \neq 0$.
2. Polynomifunktio on jatkuva koko $\mathbb{R}$:ssä.
3. Rationaalifunktio on jatkuva koko määrittelyjoukossaan.

Esimerkki

Tutki funktion $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x \leq 2 \\ \dfrac{x+1}{x-1}, & x > 2 \end{cases}$ jatkuvuutta.

Esimerkki

Tutki funktion $f(x) = \begin{cases} 2x-1, & x \leq 2 \\ \dfrac{x+1}{x-1}, & x > 2 \end{cases}$ jatkuvuutta.

$\mathbf{x < 2:}\ f(x) = 2x - 1$

Esimerkki

Tutki funktion $f(x) = \begin{cases} 2x-1, & x \leq 2 \\ \dfrac{x+1}{x-1}, & x > 2 \end{cases}$ jatkuvuutta.

$\mathbf{x < 2:}\ f(x) = 2x - 1$ jatkuva polynomifunktiona

Esimerkki

- Funktion jatkuvuus
- Jatkuvuuden määritelmä
- Joidenkin funktioiden jatkuvuus

Tutki funktion $f(x) = \begin{cases} 2x-1, & x \leq 2 \\ \dfrac{x+1}{x-1}, & x > 2 \end{cases}$ jatkuvuutta.

$\mathbf{x < 2:}\ f(x) = 2x - 1$ jatkuva polynomifunktiona

$\mathbf{x > 2:}\ f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

Esimerkki

- Funktion jatkuvuus
- Jatkuvuuden määritelmä
- Joidenkin funktioiden jatkuvuus

Tutki funktion $f(x) = \begin{cases} 2x-1, & x \leq 2 \\ \dfrac{x+1}{x-1}, & x > 2 \end{cases}$ jatkuvuutta.

$\mathbf{x < 2:}\ f(x) = 2x - 1$ jatkuva polynomifunktiona

$\mathbf{x > 2:}\ f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ on määritelty (nimittäjä ei saa arvoa 0) ja rationaalifunktiona jatkuva

- Funktion jatkuvuus
- Jatkuvuuden määritelmä
- Joidenkin funktioiden jatkuvuus

Esimerkki

Tutki funktion $f(x) = \begin{cases} 2x-1, & x \le 2 \\ \dfrac{x+1}{x-1}, & x > 2 \end{cases}$ jatkuvuutta.

$\mathbf{x < 2:}$ $f(x) = 2x - 1$ jatkuva polynomifunktiona

$\mathbf{x > 2:}$ $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ on määritelty (nimittäjä ei saa arvoa 0) ja rationaalifunktiona jatkuva

$\mathbf{x = 2:}$

Esimerkki

Tutki funktion $f(x) = \begin{cases} 2x-1, & x \leq 2 \\ \dfrac{x+1}{x-1}, & x > 2 \end{cases}$ jatkuvuutta.

$\mathbf{x < 2:}$ $f(x) = 2x - 1$ jatkuva polynomifunktiona

$\mathbf{x > 2:}$ $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ on määritelty (nimittäjä ei saa arvoa 0) ja rationaalifunktiona jatkuva

$\mathbf{x = 2:}$

- $\lim\limits_{x \to 2-} f(x) =$

- Funktion jatkuvuus
- Jatkuvuuden määritelmä
- Joidenkin funktioiden jatkuvuus

Esimerkki

Tutki funktion $f(x) = \begin{cases} 2x-1, & x \leq 2 \\ \dfrac{x+1}{x-1}, & x > 2 \end{cases}$ jatkuvuutta.

$\mathbf{x < 2:}$ $f(x) = 2x - 1$ jatkuva polynomifunktiona

$\mathbf{x > 2:}$ $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ on määritelty (nimittäjä ei saa arvoa 0) ja rationaalifunktiona jatkuva

$\mathbf{x = 2:}$

- $\lim\limits_{x \to 2-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2-} (2x-1) = 3$

Esimerkki

- Funktion jatkuvuus
- Jatkuvuuden määritelmä
- Joidenkin funktioiden jatkuvuus

Tutki funktion $f(x) = \begin{cases} 2x-1, & x \leq 2 \\ \dfrac{x+1}{x-1}, & x > 2 \end{cases}$ jatkuvuutta.

$\mathbf{x < 2:}$ $f(x) = 2x - 1$ jatkuva polynomifunktiona

$\mathbf{x > 2:}$ $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ on määritelty (nimittäjä ei saa arvoa 0) ja rationaalifunktiona jatkuva

$\mathbf{x = 2:}$

- $\lim\limits_{x \to 2-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2-} (2x - 1) = 3$

  $\lim\limits_{x \to 2+} f(x) =$

Esimerkki

- Funktion jatkuvuus
- Jatkuvuuden määritelmä
- Joidenkin funktioiden jatkuvuus

Tutki funktion $f(x) = \begin{cases} 2x-1, & x \leq 2 \\ \dfrac{x+1}{x-1}, & x > 2 \end{cases}$ jatkuvuutta.

$\mathbf{x < 2}:$ $f(x) = 2x - 1$ jatkuva polynomifunktiona

$\mathbf{x > 2}:$ $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ on määritelty (nimittäjä ei saa arvoa 0) ja rationaalifunktiona jatkuva

$\mathbf{x = 2}:$

- $\lim\limits_{x \to 2-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2-} (2x-1) = 3$

  $\lim\limits_{x \to 2+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2+} \dfrac{x+1}{x-1} = 3$

Esimerkki

Tutki funktion $f(x) = \begin{cases} 2x-1, & x \leq 2 \\ \dfrac{x+1}{x-1}, & x > 2 \end{cases}$ jatkuvuutta.

$\mathbf{x < 2}$: $f(x) = 2x - 1$ jatkuva polynomifunktiona

$\mathbf{x > 2}$: $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ on määritelty (nimittäjä ei saa arvoa 0) ja rationaalifunktiona jatkuva

$\mathbf{x = 2}$:

- $\lim\limits_{x \to 2-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2-} (2x - 1) = 3$

  $\lim\limits_{x \to 2+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2+} \dfrac{x+1}{x-1} = 3$

  Täten $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 3$

Esimerkki

- Funktion jatkuvuus
- Jatkuvuuden määritelmä
- Joidenkin funktioiden jatkuvuus

Tutki funktion $f(x) = \begin{cases} 2x-1, & x \leq 2 \\ \dfrac{x+1}{x-1}, & x > 2 \end{cases}$ jatkuvuutta.

$\mathbf{x < 2:}$ $f(x) = 2x - 1$ jatkuva polynomifunktiona

$\mathbf{x > 2:}$ $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ on määritelty (nimittäjä ei saa arvoa 0) ja rationaalifunktiona jatkuva

$\mathbf{x = 2:}$

- $\lim_{x \to 2-} f(x) = \lim_{x \to 2-} (2x-1) = 3$

  $\lim_{x \to 2+} f(x) = \lim_{x \to 2+} \dfrac{x+1}{x-1} = 3$

  Täten $\lim_{x \to 2} f(x) = 3$
- $f(2) = 2 \cdot 2 - 1 = 3$

Esimerkki

Tutki funktion $f(x) = \begin{cases} 2x-1, & x \leq 2 \\ \dfrac{x+1}{x-1}, & x > 2 \end{cases}$ jatkuvuutta.

$\mathbf{x < 2:}$ $f(x) = 2x - 1$ jatkuva polynomifunktiona

$\mathbf{x > 2:}$ $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ on määritelty (nimittäjä ei saa arvoa 0) ja rationaalifunktiona jatkuva

$\mathbf{x = 2:}$

- $\lim\limits_{x \to 2-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2-} (2x - 1) = 3$

  $\lim\limits_{x \to 2+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2+} \dfrac{x+1}{x-1} = 3$

  Täten $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 3$
- $f(2) = 2 \cdot 2 - 1 = 3$
- Täten $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$ ja

Esimerkki

- Funktion jatkuvuus
- Jatkuvuuden määritelmä
- Joidenkin funktioiden jatkuvuus

Tutki funktion $f(x) = \begin{cases} 2x-1, & x \leq 2 \\ \dfrac{x+1}{x-1}, & x > 2 \end{cases}$ jatkuvuutta.

$\mathbf{x < 2:}$ $f(x) = 2x - 1$ jatkuva polynomifunktiona

$\mathbf{x > 2:}$ $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ on määritelty (nimittäjä ei saa arvoa 0) ja rationaalifunktiona jatkuva

$\mathbf{x = 2:}$

- $\lim\limits_{x\to 2-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2-} (2x-1) = 3$

  $\lim\limits_{x\to 2+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2+} \dfrac{x+1}{x-1} = 3$

  Täten $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 3$
- $f(2) = 2 \cdot 2 - 1 = 3$
- Täten $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2)$ ja funktio on jatkuva kohdassa $x = 2$.

- Funktion jatkuvuus
- Jatkuvuuden määritelmä
- Joidenkin funktioiden jatkuvuus

Esimerkki

Tutki funktion $f(x) = \begin{cases} 2x-1, & x \le 2 \\ \dfrac{x+1}{x-1}, & x > 2 \end{cases}$ jatkuvuutta.

$\mathbf{x < 2:}$ $f(x) = 2x - 1$ jatkuva polynomifunktiona

$\mathbf{x > 2:}$ $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ on määritelty (nimittäjä ei saa arvoa 0) ja rationaalifunktiona jatkuva

$\mathbf{x = 2:}$

- $\lim\limits_{x\to 2-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2-} (2x-1) = 3$

  $\lim\limits_{x\to 2+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2+} \dfrac{x+1}{x-1} = 3$

  Täten $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 3$
- $f(2) = 2 \cdot 2 - 1 = 3$
- Täten $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2)$ ja funktio on jatkuva kohdassa $x = 2$.

Funktion on jatkuva joukossa $\mathbb{R}$.

Esimerkki jatkuu

- Funktion jatkuvuus
- Jatkuvuuden määritelmä
- Joidenkin funktioiden jatkuvuus