

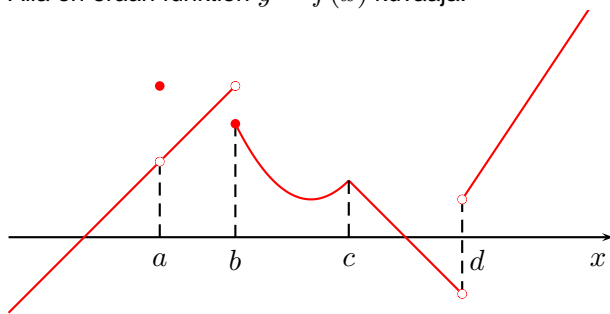
Funktion jatkuvuus

Hannu Lehto
Lahden Lyseon lukio

Funktion jatkuvuus.....	2
Jatkuvuuden määritelmä.....	3
Joidenkin funktioiden jatkuvuus.....	5

Funktion jatkuvuus

Alla on erään funktion $y = f(x)$ kuvaaja.



Epäjatkua kohdassa

- $x = a$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$
- $x = b$, $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow b^+} f(x)$ eli $\lim_{x \rightarrow b} f(x)$ ei ole massa

Jatkua kohdassa

- $x = c$, $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$

Ei ole määritelty kohdassa $x = d$.

2 / 6

Jatkuvuuden määritelmä

Määritelmä 1. Olkoon funktio f määritelty välillä $]x_0 - r, x_0 + r[$, $r > 0$. Funktio f on *jatkua kohdassa* $x = x_0$, jos

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Muussa tapauksessa f on *epäjatkua kohdassa* $x = x_0$.

Määritelmä 2. Funktio f on jatkuva välillä I , jos se on jatkuva välin jokaisessa pisteessä.

3 / 6

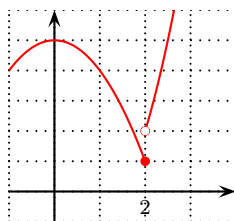
Esimerkki

Onko funktio $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 5, & x \leq 2 \\ 2x^2 - 3x, & x > 2 \end{cases}$ jatkuva kohdassa $x = 2$?

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (-x^2 + 5) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (2x^2 - 3x) = 2$$

Koska $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$, niin $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ ei ole olemassa, joten f ei ole jatkuva kohdassa $x = 2$.



4 / 6

Joidenkin funktioiden jatkuvuus

1. Jos f ja g ovat jatkuvia välillä I , niin $f + g$, $f - g$ ja fg ovat jatkuvia välillä I . Lisäksi $\frac{f}{g}$ on jatkuva kaikissa sellaisissa kohdissa x_0 , joissa $g(x_0) \neq 0$.
2. Polynomifunktio on jatkuva koko \mathbb{R} :ssä.
3. Rationaalifunktio on jatkuva koko määrittelyjoukossaan.

5 / 6

Esimerkki

Tutki funktion $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x \leq 2 \\ \frac{x+1}{x-1}, & x > 2 \end{cases}$ jatkuvuutta.

$x < 2$: $f(x) = 2x - 1$ jatkuva polynomifunktiona

$x > 2$: $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ on määritelty (nimittäjä ei saa arvoa 0) ja rationaalifunktiona jatkuva

$x = 2$:

$$\circ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (2x - 1) = 3$$

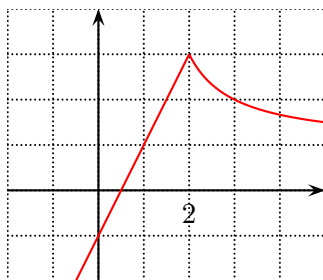
$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+1}{x-1} = 3$$

$$\text{Täten } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$$

$$\circ f(2) = 2 \cdot 2 - 1 = 3$$

$$\circ \text{Täten } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) \text{ ja funktio on jatkuva kohdassa } x = 2.$$

Funktio on jatkuva joukossa \mathbb{R} .



6 / 6