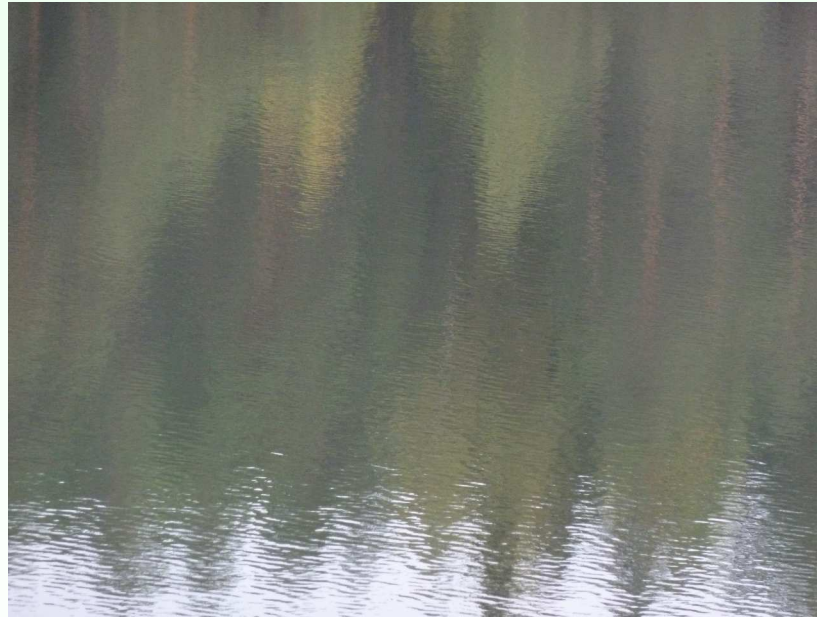


Funktion raja-arvo

Hannu Lehto
Lahden Lyseon lukio



Raja-arvo numeerisesti

- Raja-arvo numeerisesti

- Raja-arvo graafisesti
- Funktion raja-arvo
- Raja-arvon laskusäännöt
- Raja-arvon laskeminen
- Paloittain määritellyn funktion raja-arvo

Tutkitaan funktion $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ arvoja, kun x lähestyy lukua 2.

Raja-arvo numeerisesti

- Raja-arvo numeerisesti

- Raja-arvo graafisesti
- Funktion raja-arvo
- Raja-arvon laskusäännöt
- Raja-arvon laskeminen
- Paloittain määritellyn funktion raja-arvo

Tutkitaan funktion $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ arvoja, kun x lähestyy lukua 2.

<u>x</u>	<u>f(x)</u>
----------	-------------

Raja-arvo numeerisesti

- Raja-arvo numeerisesti

- Raja-arvo graafisesti
- Funktion raja-arvo
- Raja-arvon laskusäännöt
- Raja-arvon laskeminen
- Paloittain määritellyn funktion raja-arvo

Tutkitaan funktion $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ arvoja, kun x lähestyy lukua 2.

x	$f(x)$
1,9	3,9

Raja-arvo numeerisesti

- Raja-arvo numeerisesti

- Raja-arvo graafisesti
- Funktion raja-arvo
- Raja-arvon laskusäännöt
- Raja-arvon laskeminen
- Paloittain määritellyn funktion raja-arvo

Tutkitaan funktion $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ arvoja, kun x lähestyy lukua 2.

x	$f(x)$
1,9	3,9
1,99	3,99

Raja-arvo numeerisesti

- Raja-arvo numeerisesti

- Raja-arvo graafisesti
- Funktion raja-arvo
- Raja-arvon laskusäännöt
- Raja-arvon laskeminen
- Paloittain määritellyn funktion raja-arvo

Tutkitaan funktion $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ arvoja, kun x lähestyy lukua 2.

x	$f(x)$
1,9	3,9
1,99	3,99
1,999	3,999

Raja-arvo numeerisesti

- Raja-arvo numeerisesti

- Raja-arvo graafisesti
- Funktion raja-arvo
- Raja-arvon laskusäännöt
- Raja-arvon laskeminen
- Paloittain määritellyn funktion raja-arvo

Tutkitaan funktion $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ arvoja, kun x lähestyy lukua 2.

x	$f(x)$
1,9	3,9
1,99	3,99
1,999	3,999
↓	↓
2-	4

Raja-arvo numeerisesti

- Raja-arvo numeerisesti

- Raja-arvo graafisesti
- Funktion raja-arvo
- Raja-arvon laskusäännöt
- Raja-arvon laskeminen
- Paloittain määritellyn funktion raja-arvo

Tutkitaan funktion $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ arvoja, kun x lähestyy lukua 2.

x	$f(x)$
1,9	3,9
1,99	3,99
1,999	3,999
↓	↓
2-	4

x lähestyy lukua 2 *vasemmal-*
ta,

Raja-arvo numeerisesti

- Raja-arvo numeerisesti

- Raja-arvo graafisesti
- Funktion raja-arvo
- Raja-arvon laskusäännöt
- Raja-arvon laskeminen
- Paloittain määritellyn funktion raja-arvo

Tutkitaan funktion $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ arvoja, kun x lähestyy lukua 2.

x	f(x)
1,9	3,9
1,99	3,99
1,999	3,999
↓	↓
2-	4

x lähestyy lukua 2 *vasemmalta*, funktion *vasemmanpuolinen raja-arvo* kohdassa $x = 2$ on (ilmeisesti!) 4.

Raja-arvo numeerisesti

- Raja-arvo numeerisesti

- Raja-arvo graafisesti
- Funktion raja-arvo
- Raja-arvon laskusäännöt
- Raja-arvon laskeminen
- Paloittain määritellyn funktion raja-arvo

Tutkitaan funktion $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ arvoja, kun x lähestyy lukua 2.

x	f(x)
1,9	3,9
1,99	3,99
1,999	3,999
↓	↓
2-	4

x	f(x)
---	------

x lähestyy lukua 2 *vasemmalta*, funktion *vasemmanpuolinen raja-arvo* kohdassa $x = 2$ on (ilmeisesti!) 4.

Raja-arvo numeerisesti

- Raja-arvo numeerisesti

- Raja-arvo graafisesti
- Funktion raja-arvo
- Raja-arvon laskusäännöt
- Raja-arvon laskeminen
- Paloittain määritellyn funktion raja-arvo

Tutkitaan funktion $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ arvoja, kun x lähestyy lukua 2.

x	f(x)
1,9	3,9
1,99	3,99
1,999	3,999
↓	↓
2-	4

x	f(x)
2,1	4,1

x lähestyy lukua 2 *vasemmalta*, funktion *vasemmanpuolinen raja-arvo* kohdassa $x = 2$ on (ilmeisesti!) 4.

Raja-arvo numeerisesti

- Raja-arvo numeerisesti

- Raja-arvo graafisesti
- Funktion raja-arvo
- Raja-arvon laskusäännöt
- Raja-arvon laskeminen
- Paloittain määritellyn funktion raja-arvo

Tutkitaan funktion $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ arvoja, kun x lähestyy lukua 2.

x	f(x)
1,9	3,9
1,99	3,99
1,999	3,999
↓	↓
2-	4

x	f(x)
2,1	4,1
2,01	4,01

x lähestyy lukua 2 *vasemmalta*, funktion *vasemmanpuolinen raja-arvo* kohdassa $x = 2$ on (ilmeisesti!) 4.

Raja-arvo numeerisesti

- Raja-arvo numeerisesti

- Raja-arvo graafisesti
- Funktion raja-arvo
- Raja-arvon laskusäännöt
- Raja-arvon laskeminen
- Paloittain määritellyn funktion raja-arvo

Tutkitaan funktion $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ arvoja, kun x lähestyy lukua 2.

x	f(x)
1,9	3,9
1,99	3,99
1,999	3,999
↓	↓
2-	4

x	f(x)
2,1	4,1
2,01	4,01
2,001	4,001

x lähestyy lukua 2 *vasemmalta*, funktion *vasemmanpuolinen raja-arvo* kohdassa $x = 2$ on (ilmeisesti!) 4.

Raja-arvo numeerisesti

- Raja-arvo numeerisesti

- Raja-arvo graafisesti
- Funktion raja-arvo
- Raja-arvon laskusäännöt
- Raja-arvon laskeminen
- Paloittain määritellyn funktion raja-arvo

Tutkitaan funktion $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ arvoja, kun x lähestyy lukua 2.

x	f(x)
1,9	3,9
1,99	3,99
1,999	3,999
↓	↓
2-	4

x lähestyy lukua 2 *vasemmalta*, funktion *vasemmanpuolinen raja-arvo* kohdassa $x = 2$ on (ilmeisesti!) 4.

x	f(x)
2,1	4,1
2,01	4,01
2,001	4,001
↓	↓
2+	4

x lähestyy lukua 2 *oikealta*,

Raja-arvo numeerisesti

- Raja-arvo numeerisesti

- Raja-arvo graafisesti
- Funktion raja-arvo
- Raja-arvon laskusäännöt
- Raja-arvon laskeminen
- Paloittain määritellyn funktion raja-arvo

Tutkitaan funktion $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ arvoja, kun x lähestyy lukua 2.

x	f(x)
1,9	3,9
1,99	3,99
1,999	3,999
↓	↓
2-	4

x lähestyy lukua 2 *vasemmalta*, funktion *vasemmanpuolinen raja-arvo* kohdassa $x = 2$ on (ilmeisesti!) 4.

x	f(x)
2,1	4,1
2,01	4,01
2,001	4,001
↓	↓
2+	4

x lähestyy lukua 2 *oikealta*, funktion *oikeanpuolinen raja-arvo* kohdassa $x = 2$ on (ilmeisesti!) 4.

Raja-arvo numeerisesti

- Raja-arvo numeerisesti

- Raja-arvo graafisesti
- Funktion raja-arvo
- Raja-arvon laskusäännöt
- Raja-arvon laskeminen
- Paloittain määritellyn funktion raja-arvo

Tutkitaan funktion $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ arvoja, kun x lähestyy lukua 2.

x	f(x)
1,9	3,9
1,99	3,99
1,999	3,999
↓	↓
2-	4

x lähestyy lukua 2 *vasemmalta*, funktion *vasemmanpuolinen raja-arvo* kohdassa $x = 2$ on (ilmeisesti!) 4.

x	f(x)
2,1	4,1
2,01	4,01
2,001	4,001
↓	↓
2+	4

x lähestyy lukua 2 *oikealta*, funktion *oikeanpuolinen raja-arvo* kohdassa $x = 2$ on (ilmeisesti!) 4.

Funktion f raja-arvo kohdassa $x = 2$ on 4.

Raja-arvo numeerisesti

- Raja-arvo numeerisesti

- Raja-arvo graafisesti
- Funktion raja-arvo
- Raja-arvon laskusäännöt
- Raja-arvon laskeminen
- Paloittain määritellyn funktion raja-arvo

Tutkitaan funktion $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ arvoja, kun x lähestyy lukua 2.

x	f(x)
1,9	3,9
1,99	3,99
1,999	3,999
↓	↓
2-	4

x lähestyy lukua 2 *vasemmalta*, funktion *vasemmanpuolinen raja-arvo* kohdassa $x = 2$ on (ilmeisesti!) 4.

x	f(x)
2,1	4,1
2,01	4,01
2,001	4,001
↓	↓
2+	4

x lähestyy lukua 2 *oikealta*, funktion *oikeanpuolinen raja-arvo* kohdassa $x = 2$ on (ilmeisesti!) 4.

Funktion f raja-arvo kohdassa $x = 2$ on 4.

$$f(x) \rightarrow 4, \text{ kun } x \rightarrow 2$$

Raja-arvo numeerisesti

- Raja-arvo numeerisesti

- Raja-arvo graafisesti
- Funktion raja-arvo
- Raja-arvon laskusäännöt
- Raja-arvon laskeminen
- Paloittain määritellyn funktion raja-arvo

Tutkitaan funktion $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ arvoja, kun x lähestyy lukua 2.

x	f(x)
1,9	3,9
1,99	3,99
1,999	3,999
↓	↓
2-	4

x lähestyy lukua 2 *vasemmalta*, funktion *vasemmanpuolinen raja-arvo* kohdassa $x = 2$ on (ilmeisesti!) 4.

x	f(x)
2,1	4,1
2,01	4,01
2,001	4,001
↓	↓
2+	4

x lähestyy lukua 2 *oikealta*, funktion *oikeanpuolinen raja-arvo* kohdassa $x = 2$ on (ilmeisesti!) 4.

Funktion f raja-arvo kohdassa $x = 2$ on 4.

$$f(x) \rightarrow 4, \text{ kun } x \rightarrow 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$$

Raja-arvo graafisesti

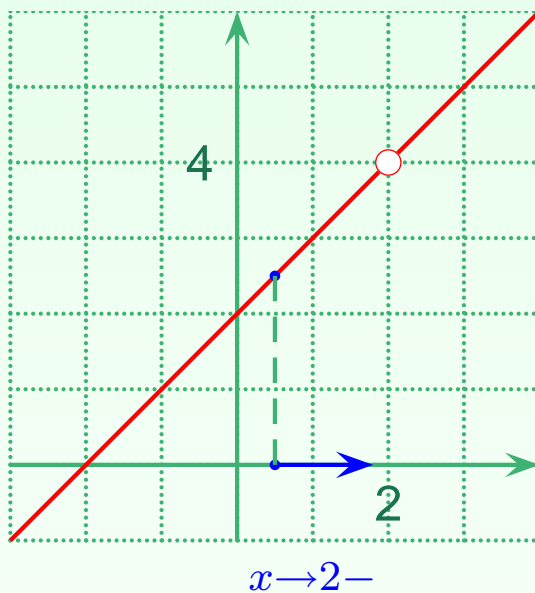
- Raja-arvo numeerisesti
- Raja-arvo graafisesti
- Funktion raja-arvo
- Raja-arvon laskusäännöt
- Raja-arvon laskeminen
- Paloittain määritellyn funktion raja-arvo

Tutkitaan funktion $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ arvoja, kun x lähestyy lukua 2.

Raja-arvo graafisesti

- Raja-arvo numeerisesti
- **Raja-arvo graafisesti**
- Funktion raja-arvo
- Raja-arvon laskusäännöt
- Raja-arvon laskeminen
- Paloittain määritellyn funktion raja-arvo

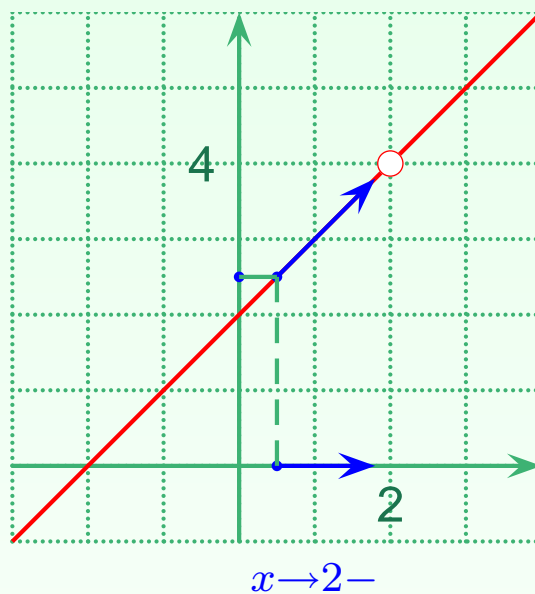
Tutkitaan funktion $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ arvoja, kun x lähestyy lukua 2.



Raja-arvo graafisesti

- Raja-arvo numeerisesti
- **Raja-arvo graafisesti**
- Funktion raja-arvo
- Raja-arvon laskusäännöt
- Raja-arvon laskeminen
- Paloittain määritellyn funktion raja-arvo

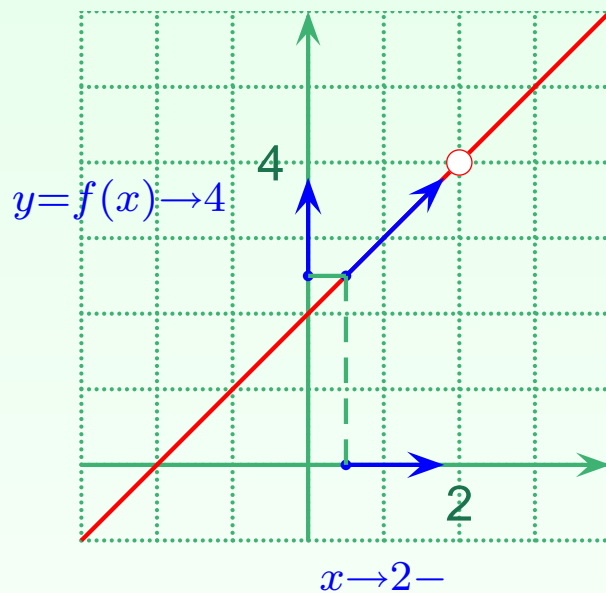
Tutkitaan funktion $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ arvoja, kun x lähestyy lukua 2.



Raja-arvo graafisesti

- Raja-arvo numeerisesti
- **Raja-arvo graafisesti**
- Funktion raja-arvo
- Raja-arvon laskusäännöt
- Raja-arvon laskeminen
- Paloittain määritellyn funktion raja-arvo

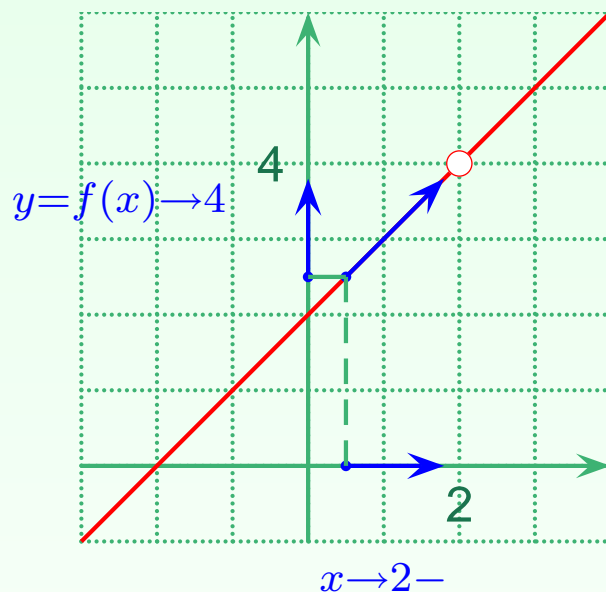
Tutkitaan funktion $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ arvoja, kun x lähestyy lukua 2.



Raja-arvo graafisesti

- Raja-arvo numeerisesti
- **Raja-arvo graafisesti**
- Funktion raja-arvo
- Raja-arvon laskusäännöt
- Raja-arvon laskeminen
- Paloittain määritellyn funktion raja-arvo

Tutkitaan funktion $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ arvoja, kun x lähestyy lukua 2.



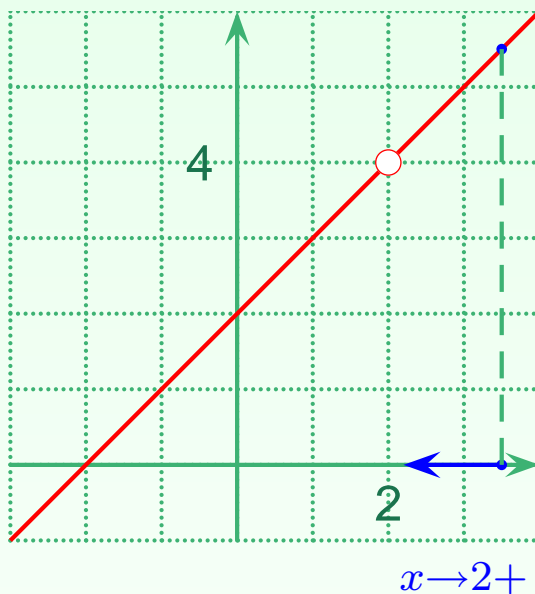
$$\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = 4 \text{ eli } f(x) \rightarrow 4, \text{ kun } x \rightarrow 2-$$

(Funktion vasemmanpuolinen raja-arvo kohdassa $x = 2$ on 4.)

Raja-arvo graafisesti

- Raja-arvo numeerisesti
- **Raja-arvo graafisesti**
- Funktion raja-arvo
- Raja-arvon laskusäännöt
- Raja-arvon laskeminen
- Paloittain määritellyn funktion raja-arvo

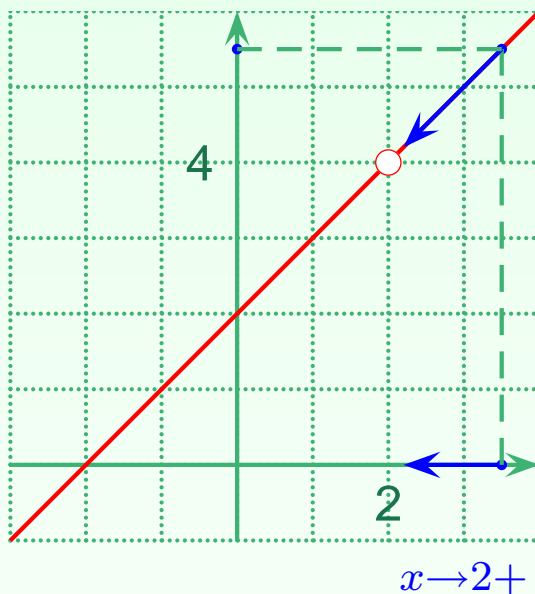
Tutkitaan funktion $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ arvoja, kun x lähestyy lukua 2.



Raja-arvo graafisesti

- Raja-arvo numeerisesti
- **Raja-arvo graafisesti**
- Funktion raja-arvo
- Raja-arvon laskusäännöt
- Raja-arvon laskeminen
- Paloittain määritellyn funktion raja-arvo

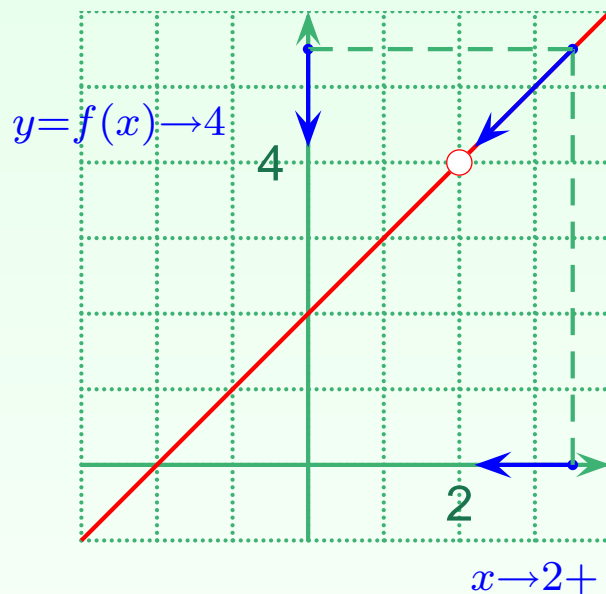
Tutkitaan funktion $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ arvoja, kun x lähestyy lukua 2.



Raja-arvo graafisesti

- Raja-arvo numeerisesti
- **Raja-arvo graafisesti**
- Funktion raja-arvo
- Raja-arvon laskusäännöt
- Raja-arvon laskeminen
- Paloittain määritellyn funktion raja-arvo

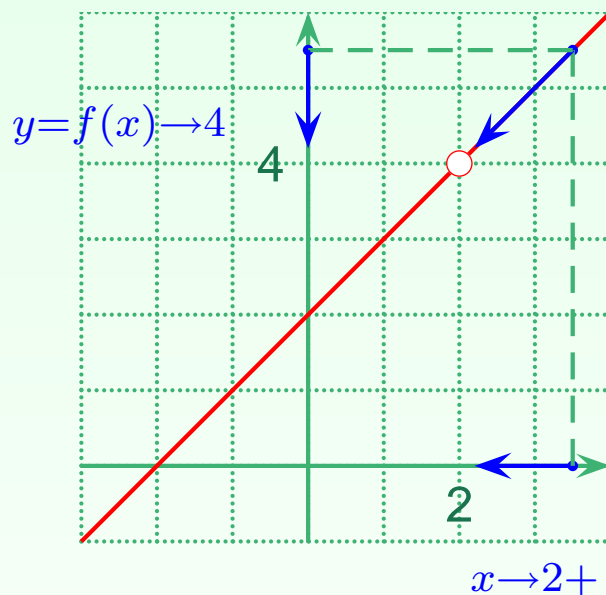
Tutkitaan funktion $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ arvoja, kun x lähestyy lukua 2.



Raja-arvo graafisesti

- Raja-arvo numeerisesti
- **Raja-arvo graafisesti**
- Funktion raja-arvo
- Raja-arvon laskusäännöt
- Raja-arvon laskeminen
- Paloittain määritellyn funktion raja-arvo

Tutkitaan funktion $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ arvoja, kun x lähestyy lukua 2.



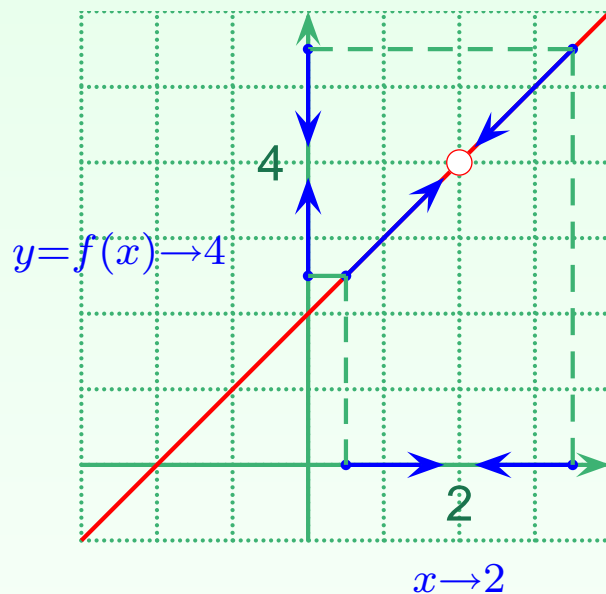
$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4 \text{ eli } f(x) \rightarrow 4, \text{ kun } x \rightarrow 2^+$$

(Funktion oikeanpuolinen raja-arvo kohdassa $x = 2$ on 4.)

Raja-arvo graafisesti

- Raja-arvo numeerisesti
- Raja-arvo graafisesti
- Funktion raja-arvo
- Raja-arvon laskusäännöt
- Raja-arvon laskeminen
- Paloittain määritellyn funktion raja-arvo

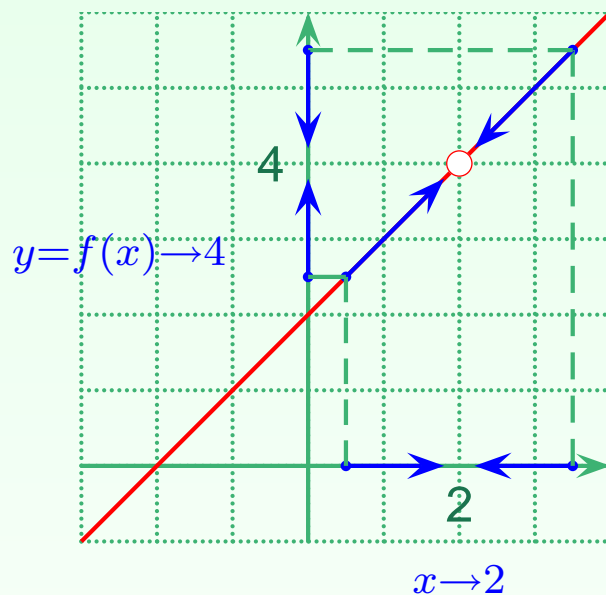
Tutkitaan funktion $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ arvoja, kun x lähestyy lukua 2.



Raja-arvo graafisesti

- Raja-arvo numeerisesti
- Raja-arvo graafisesti
- Funktion raja-arvo
- Raja-arvon laskusäännöt
- Raja-arvon laskeminen
- Paloittain määritellyn funktion raja-arvo

Tutkitaan funktion $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ arvoja, kun x lähestyy lukua 2.

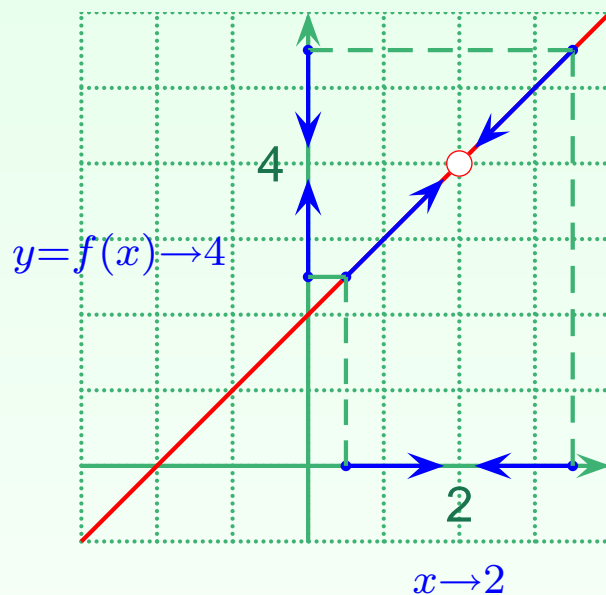


$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$ eli $f(x) \rightarrow 4$, kun $x \rightarrow 2$
(Funktion raja-arvo kohdassa $x = 2$ on 4.)

Raja-arvo graafisesti

- Raja-arvo numeerisesti
- Raja-arvo graafisesti
- Funktion raja-arvo
- Raja-arvon laskusäännöt
- Raja-arvon laskeminen
- Paloittain määritellyn funktion raja-arvo

Tutkitaan funktion $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ arvoja, kun x lähestyy lukua 2.



$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4 \text{ eli } f(x) \rightarrow 4, \text{ kun } x \rightarrow 2$$

(Funktion raja-arvo kohdassa $x = 2$ on 4.)

Huom. Funktiolla on raja-arvo kohdassa $x = 2$, vaikka funktiota ei ole määritelty kohdassa $x = 2$!

Funktion raja-arvo

- Raja-arvo numeerisesti
- Raja-arvo graafisesti
- **Funktion raja-arvo**
- Raja-arvon laskusäännöt
- Raja-arvon laskeminen
- Paloittain määritellyn funktion raja-arvo

Olkoon funktio f määritelty kohdan $x = x_0$ molemmilla puolilla välillä $[x_0 - r, x_0 + r]$, $r > 0$ mahdollisesti kohtaa x_0 lukuunottamatta.

Funktion raja-arvo

- Raja-arvo numeerisesti
- Raja-arvo graafisesti
- **Funktion raja-arvo**
- Raja-arvon laskusäännöt
- Raja-arvon laskeminen
- Paloittain määritellyn funktion raja-arvo

Olkoon funktio f määritelty kohdan $x = x_0$ molemmilla puolilla välillä $[x_0 - r, x_0 + r]$, $r > 0$ mahdollisesti kohtaa x_0 lukuunottamatta.

Funktiolla f on kohdassa x_0 raja-arvo a , jos muuttujan x lähestyessä rajatta x_0 :aa kummalta puolelta tahansa funktion f arvot lähestyvät a :ta.

- Raja-arvo numeerisesti
- Raja-arvo graafisesti
- **Funktion raja-arvo**
- Raja-arvon laskusäännöt
- Raja-arvon laskeminen
- Paloittain määritellyn funktion raja-arvo

Funktion raja-arvo

Olkoon funktio f määritelty kohdan $x = x_0$ molemmilla puolilla välillä $[x_0 - r, x_0 + r]$, $r > 0$ mahdollisesti kohtaa x_0 lukuunottamatta.

Funktiolla f on kohdassa x_0 raja-arvo a , jos muuttujan x lähestyessä rajatta x_0 :aa kummalta puolelta tahansa funktion f arvot lähestyvät a :ta.

Siis tulemalla riittävän lähelle lukua x_0 funktion arvot tulevat mielivaltaisen lähelle a :ta.

Raja-arvon laskusäännöt

- Raja-arvo numeerisesti
- Raja-arvo graafisesti
- Funktion raja-arvo
- Raja-arvon laskusäännöt
- Raja-arvon laskeminen
- Paloittain määritellyn funktion raja-arvo

Olkoon $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ ja $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$ ja c vakio. Silloin on

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} (cf(x)) = ca,$

Raja-arvon laskusäännöt

- Raja-arvo numeerisesti
- Raja-arvo graafisesti
- Funktion raja-arvo
- Raja-arvon laskusäännöt
- Raja-arvon laskeminen
- Paloittain määriteltyyn funktion raja-arvo

Olkoon $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ ja $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$ ja c vakio. Silloin on

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} (cf(x)) = ca,$

2. $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = a + b,$

Raja-arvon laskusäännöt

- Raja-arvo numeerisesti
- Raja-arvo graafisesti
- Funktion raja-arvo
- Raja-arvon laskusäännöt
- Raja-arvon laskeminen
- Paloittain määritellyn funktion raja-arvo

Olkoon $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ ja $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$ ja c vakio. Silloin on

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} (cf(x)) = ca,$

2. $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = a + b,$

3. $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x)) = ab,$

Raja-arvon laskusäännöt

- Raja-arvo numeerisesti
- Raja-arvo graafisesti
- Funktion raja-arvo
- Raja-arvon laskusäännöt
- Raja-arvon laskeminen
- Paloittain määriteltyyn funktion raja-arvo

Olkoon $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ ja $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$ ja c vakio. Silloin on

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} (cf(x)) = ca,$

2. $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = a + b,$

3. $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x)) = ab,$

4. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b},$ kun $b \neq 0.$

Raja-arvon laskeminen

- Raja-arvo numeerisesti
- Raja-arvo graafisesti
- Funktion raja-arvo
- Raja-arvon laskusäännöt
- **Raja-arvon laskeminen**
- Paloittain määriteltyyn funktion raja-arvo

- Polynomifunktion raja-arvo

$$\lim_{x \rightarrow x_0} p(x) = p(x_0)$$

Raja-arvon laskeminen

- Raja-arvo numeerisesti
- Raja-arvo graafisesti
- Funktion raja-arvo
- Raja-arvon laskusäännöt
- **Raja-arvon laskeminen**
- Paloittain määriteltyyn funktion raja-arvo

- Polynomifunktion raja-arvo

$$\lim_{x \rightarrow x_0} p(x) = p(x_0)$$

- Rationaalifunktion $\frac{p(x)}{q(x)}$ raja-arvo kohdassa x_0 , jossa

- $q(x_0) \neq 0$:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(x_0)}{q(x_0)}$$

Raja-arvon laskeminen

- Raja-arvo numeerisesti
- Raja-arvo graafisesti
- Funktion raja-arvo
- Raja-arvon laskusäännöt
- **Raja-arvon laskeminen**
- Paloittain määritellyn funktion raja-arvo

- Polynomifunktion raja-arvo

$$\lim_{x \rightarrow x_0} p(x) = p(x_0)$$

- Rationaalifunktion $\frac{p(x)}{q(x)}$ raja-arvo kohdassa x_0 , jossa

- $q(x_0) \neq 0$:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(x_0)}{q(x_0)}$$

- $q(x_0) = 0$: pyritään supistamaan muotoon, joka on määritelty kohdassa x_0 .

Raja-arvon laskeminen

- Raja-arvo numeerisesti
- Raja-arvo graafisesti
- Funktion raja-arvo
- Raja-arvon laskusäännöt
- **Raja-arvon laskeminen**
- Paloittain määritellyn funktion raja-arvo

$$1. \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 3x + 1)$$

Raja-arvon laskeminen

- Raja-arvo numeerisesti
- Raja-arvo graafisesti
- Funktion raja-arvo
- Raja-arvon laskusäännöt
- Raja-arvon laskeminen
- Paloittain määritellyn funktion raja-arvo

$$1. \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 3x + 1)$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4}{3x - 6}$$

Raja-arvon laskeminen

- Raja-arvo numeerisesti
- Raja-arvo graafisesti
- Funktion raja-arvo
- Raja-arvon laskusäännöt
- Raja-arvon laskeminen
- Paloittain määriteltyyn funktion raja-arvo

$$1. \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 3x + 1)$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4}{3x - 6}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{3x - 6}$$

Raja-arvon laskeminen

- Raja-arvo numeerisesti
- Raja-arvo graafisesti
- Funktion raja-arvo
- Raja-arvon laskusäännöt
- Raja-arvon laskeminen
- Paloittain määriteltyyn funktion raja-arvo

$$1. \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 3x + 1)$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4}{3x - 6}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{3x - 6}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 1} \left(1 - \frac{1}{x}\right) : (x - 1)$$

Raja-arvon laskeminen

- Raja-arvo numeerisesti
- Raja-arvo graafisesti
- Funktion raja-arvo
- Raja-arvon laskusäännöt
- **Raja-arvon laskeminen**
- Paloittain määriteltyyn funktion raja-arvo

$$1. \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 3x + 1)$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4}{3x - 6}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{3x - 6}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 1} \left(1 - \frac{1}{x}\right) : (x - 1)$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x - 1} - 2}{x - 5}$$

Paloittain määritellyn funktion raja-arvo

- Raja-arvo numeerisesti
- Raja-arvo graafisesti
- Funktion raja-arvo
- Raja-arvon laskusäännöt
- Raja-arvon laskeminen
- **Paloittain määritellyn funktion raja-arvo**

Esimerkki 1. Olkoon $f(x) = \begin{cases} -2x^2 + 3, & x \leq 1 \\ -x + 2, & x > 1 \end{cases}$. Tutki raja-arvoja **a)** $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ ja **b)** $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

Paloittain määritellyn funktion raja-arvo

- Raja-arvo numeerisesti
- Raja-arvo graafisesti
- Funktion raja-arvo
- Raja-arvon laskusäännöt
- Raja-arvon laskeminen
- **Paloittain määritellyn funktion raja-arvo**

Esimerkki 1. Olkoon $f(x) = \begin{cases} -2x^2 + 3, & x \leq 1 \\ -x + 2, & x > 1 \end{cases}$. Tutki

raja-arvoja **a)** $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ ja **b)** $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

$$\mathbf{a)} \lim_{x \rightarrow 3} f(x) =$$

Paloittain määritellyn funktion raja-arvo

- Raja-arvo numeerisesti
- Raja-arvo graafisesti
- Funktion raja-arvo
- Raja-arvon laskusäännöt
- Raja-arvon laskeminen
- **Paloittain määritellyn funktion raja-arvo**

Esimerkki 1. Olkoon $f(x) = \begin{cases} -2x^2 + 3, & x \leq 1 \\ -x + 2, & x > 1 \end{cases}$. Tutki raja-arvoja **a)** $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ ja **b)** $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

$$\mathbf{a)} \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} (-x + 2)$$

Paloittain määritellyn funktion raja-arvo

- Raja-arvo numeerisesti
- Raja-arvo graafisesti
- Funktion raja-arvo
- Raja-arvon laskusäännöt
- Raja-arvon laskeminen
- **Paloittain määritellyn funktion raja-arvo**

Esimerkki 1. Olkoon $f(x) = \begin{cases} -2x^2 + 3, & x \leq 1 \\ -x + 2, & x > 1 \end{cases}$. Tutki raja-arvoja **a)** $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ ja **b)** $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

$$\mathbf{a)} \quad \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} (-x + 2) = -3 + 2 = -1$$

Paloittain määritellyn funktion raja-arvo

- Raja-arvo numeerisesti
- Raja-arvo graafisesti
- Funktion raja-arvo
- Raja-arvon laskusäännöt
- Raja-arvon laskeminen
- Paloittain määritellyn funktion raja-arvo

Esimerkki 1. Olkoon $f(x) = \begin{cases} -2x^2 + 3, & x \leq 1 \\ -x + 2, & x > 1 \end{cases}$. Tutki raja-arvoja **a)** $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ ja **b)** $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

$$\mathbf{a)} \quad \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} (-x + 2) = -3 + 2 = -1$$

$$\mathbf{b)} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) =$$

Paloittain määritellyn funktion raja-arvo

- Raja-arvo numeerisesti
- Raja-arvo graafisesti
- Funktion raja-arvo
- Raja-arvon laskusäännöt
- Raja-arvon laskeminen
- Paloittain määritellyn funktion raja-arvo

Esimerkki 1. Olkoon $f(x) = \begin{cases} -2x^2 + 3, & x \leq 1 \\ -x + 2, & x > 1 \end{cases}$. Tutki

raja-arvoja **a)** $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ ja **b)** $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

$$\mathbf{a)} \quad \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} (-x + 2) = -3 + 2 = -1$$

$$\mathbf{b)} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-2x^2 + 3) =$$

Paloittain määritellyn funktion raja-arvo

- Raja-arvo numeerisesti
- Raja-arvo graafisesti
- Funktion raja-arvo
- Raja-arvon laskusäännöt
- Raja-arvon laskeminen
- Paloittain määritellyn funktion raja-arvo

Esimerkki 1. Olkoon $f(x) = \begin{cases} -2x^2 + 3, & x \leq 1 \\ -x + 2, & x > 1 \end{cases}$. Tutki raja-arvoja **a)** $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ ja **b)** $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

$$\mathbf{a)} \quad \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} (-x + 2) = -3 + 2 = -1$$

$$\mathbf{b)} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-2x^2 + 3) = 1$$

Paloittain määritellyn funktion raja-arvo

- Raja-arvo numeerisesti
- Raja-arvo graafisesti
- Funktion raja-arvo
- Raja-arvon laskusäännöt
- Raja-arvon laskeminen
- Paloittain määritellyn funktion raja-arvo

Esimerkki 1. Olkoon $f(x) = \begin{cases} -2x^2 + 3, & x \leq 1 \\ -x + 2, & x > 1 \end{cases}$. Tutki raja-arvoja **a)** $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ ja **b)** $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

$$\mathbf{a)} \quad \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} (-x + 2) = -3 + 2 = -1$$

$$\mathbf{b)} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-2x^2 + 3) = 1$$
$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) =$$

Paloittain määritellyn funktion raja-arvo

- Raja-arvo numeerisesti
- Raja-arvo graafisesti
- Funktion raja-arvo
- Raja-arvon laskusäännöt
- Raja-arvon laskeminen
- Paloittain määritellyn funktion raja-arvo

Esimerkki 1. Olkoon $f(x) = \begin{cases} -2x^2 + 3, & x \leq 1 \\ -x + 2, & x > 1 \end{cases}$. Tutki raja-arvoja **a)** $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ ja **b)** $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

$$\mathbf{a)} \quad \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} (-x + 2) = -3 + 2 = -1$$

$$\mathbf{b)} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-2x^2 + 3) = 1$$
$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (-x + 2) =$$

Paloittain määritellyn funktion raja-arvo

- Raja-arvo numeerisesti
- Raja-arvo graafisesti
- Funktion raja-arvo
- Raja-arvon laskusäännöt
- Raja-arvon laskeminen
- Paloittain määritellyn funktion raja-arvo

Esimerkki 1. Olkoon $f(x) = \begin{cases} -2x^2 + 3, & x \leq 1 \\ -x + 2, & x > 1 \end{cases}$. Tutki raja-arvoja **a)** $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ ja **b)** $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

$$\mathbf{a)} \quad \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} (-x + 2) = -3 + 2 = -1$$

$$\mathbf{b)} \quad \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} (-2x^2 + 3) = 1$$
$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} (-x + 2) = 1$$

Paloittain määritellyn funktion raja-arvo

- Raja-arvo numeerisesti
- Raja-arvo graafisesti
- Funktion raja-arvo
- Raja-arvon laskusäännöt
- Raja-arvon laskeminen
- **Paloittain määritellyn funktion raja-arvo**

Esimerkki 1. Olkoon $f(x) = \begin{cases} -2x^2 + 3, & x \leq 1 \\ -x + 2, & x > 1 \end{cases}$. Tutki

raja-arvoja **a)** $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ ja **b)** $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

$$\mathbf{a)} \quad \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} (-x + 2) = -3 + 2 = -1$$

$$\mathbf{b)} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-2x^2 + 3) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (-x + 2) = 1$$

$$\text{Koska } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1, \text{ niin}$$

Paloittain määritellyn funktion raja-arvo

- Raja-arvo numeerisesti
- Raja-arvo graafisesti
- Funktion raja-arvo
- Raja-arvon laskusäännöt
- Raja-arvon laskeminen
- **Paloittain määritellyn funktion raja-arvo**

Esimerkki 1. Olkoon $f(x) = \begin{cases} -2x^2 + 3, & x \leq 1 \\ -x + 2, & x > 1 \end{cases}$. Tutki

raja-arvoja **a)** $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ ja **b)** $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

$$\mathbf{a)} \quad \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} (-x + 2) = -3 + 2 = -1$$

$$\mathbf{b)} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-2x^2 + 3) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (-x + 2) = 1$$

$$\text{Koska } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1, \text{ niin } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$$

Paloittain määritellyn funktion raja-arvo

- Raja-arvo numeerisesti
- Raja-arvo graafisesti
- Funktion raja-arvo
- Raja-arvon laskusäännöt
- Raja-arvon laskeminen
- **Paloittain määritellyn funktion raja-arvo**

Esimerkki 1. Olkoon $f(x) = \begin{cases} -2x^2 + 3, & x \leq 1 \\ -x + 2, & x > 1 \end{cases}$. Tutki

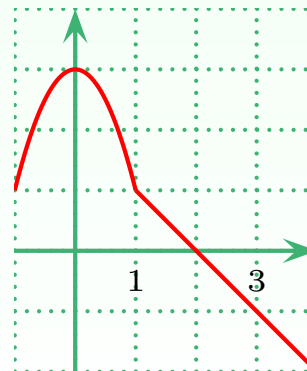
raja-arvoja **a)** $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ ja **b)** $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

$$\mathbf{a)} \quad \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} (-x + 2) = -3 + 2 = -1$$

$$\mathbf{b)} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-2x^2 + 3) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (-x + 2) = 1$$

$$\text{Koska } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1, \text{ niin } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$$



Paloittain määritellyn funktion raja-arvo

- Raja-arvo numeerisesti
- Raja-arvo graafisesti
- Funktion raja-arvo
- Raja-arvon laskusäännöt
- Raja-arvon laskeminen
- Paloittain määritellyn funktion raja-arvo

Esimerkki 2. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{|3x - 9|}{x^2 - 9}$

Paloittain määritellyn funktion raja-arvo

- Raja-arvo numeerisesti
- Raja-arvo graafisesti
- Funktion raja-arvo
- Raja-arvon laskusäännöt
- Raja-arvon laskeminen
- Paloittain määritellyn funktion raja-arvo

Esimerkki 2. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{|3x - 9|}{x^2 - 9}$

$$|3x - 9| =$$

Paloittain määritellyn funktion raja-arvo

- Raja-arvo numeerisesti
- Raja-arvo graafisesti
- Funktion raja-arvo
- Raja-arvon laskusäännöt
- Raja-arvon laskeminen
- Paloittain määritellyn funktion raja-arvo

Esimerkki 2. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{|3x - 9|}{x^2 - 9}$

$$|3x - 9| = \begin{cases} -3x + 9, & \text{kun } x < 3 \\ 3x - 9, & \text{kun } x \geq 3 \end{cases}$$

Paloittain määritellyn funktion raja-arvo

- Raja-arvo numeerisesti
- Raja-arvo graafisesti
- Funktion raja-arvo
- Raja-arvon laskusäännöt
- Raja-arvon laskeminen
- Paloittain määritellyn funktion raja-arvo

Esimerkki 2. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{|3x - 9|}{x^2 - 9}$

$$|3x - 9| = \begin{cases} -3x + 9, & \text{kun } x < 3 \\ 3x - 9, & \text{kun } x \geq 3 \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{|3x - 9|}{x^2 - 9} =$$

Paloittain määritellyn funktion raja-arvo

- Raja-arvo numeerisesti
- Raja-arvo graafisesti
- Funktion raja-arvo
- Raja-arvon laskusäännöt
- Raja-arvon laskeminen
- Paloittain määritellyn funktion raja-arvo

Esimerkki 2. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{|3x - 9|}{x^2 - 9}$

$$|3x - 9| = \begin{cases} -3x + 9, & \text{kun } x < 3 \\ 3x - 9, & \text{kun } x \geq 3 \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{|3x - 9|}{x^2 - 9} = \begin{cases} \frac{-3x + 9}{x^2 - 9}, & \text{kun } x < 3 \wedge x \neq -3 \\ \frac{3x - 9}{x^2 - 9}, & \text{kun } x > 3 \end{cases}$$

Paloittain määritellyn funktion raja-arvo

- Raja-arvo numeerisesti
- Raja-arvo graafisesti
- Funktion raja-arvo
- Raja-arvon laskusäännöt
- Raja-arvon laskeminen
- Paloittain määritellyn funktion raja-arvo

Esimerkki 2. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{|3x - 9|}{x^2 - 9}$

$$|3x - 9| = \begin{cases} -3x + 9, & \text{kun } x < 3 \\ 3x - 9, & \text{kun } x \geq 3 \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{|3x - 9|}{x^2 - 9} = \begin{cases} \frac{-3x + 9}{x^2 - 9}, & \text{kun } x < 3 \wedge x \neq -3 \\ \frac{3x - 9}{x^2 - 9}, & \text{kun } x > 3 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) =$$

Paloittain määritellyn funktion raja-arvo

- Raja-arvo numeerisesti
- Raja-arvo graafisesti
- Funktion raja-arvo
- Raja-arvon laskusäännöt
- Raja-arvon laskeminen
- Paloittain määritellyn funktion raja-arvo

Esimerkki 2. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{|3x - 9|}{x^2 - 9}$

$$|3x - 9| = \begin{cases} -3x + 9, & \text{kun } x < 3 \\ 3x - 9, & \text{kun } x \geq 3 \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{|3x - 9|}{x^2 - 9} = \begin{cases} \frac{-3x + 9}{x^2 - 9}, & \text{kun } x < 3 \wedge x \neq -3 \\ \frac{3x - 9}{x^2 - 9}, & \text{kun } x > 3 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-3(x - 3)}{(x - 3)(x + 3)} =$$

Paloittain määritellyn funktion raja-arvo

- Raja-arvo numeerisesti
- Raja-arvo graafisesti
- Funktion raja-arvo
- Raja-arvon laskusäännöt
- Raja-arvon laskeminen
- Paloittain määritellyn funktion raja-arvo

Esimerkki 2. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{|3x - 9|}{x^2 - 9}$

$$|3x - 9| = \begin{cases} -3x + 9, & \text{kun } x < 3 \\ 3x - 9, & \text{kun } x \geq 3 \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{|3x - 9|}{x^2 - 9} = \begin{cases} \frac{-3x + 9}{x^2 - 9}, & \text{kun } x < 3 \wedge x \neq -3 \\ \frac{3x - 9}{x^2 - 9}, & \text{kun } x > 3 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-3(x - 3)}{(x - 3)(x + 3)} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-3}{x + 3} =$$

Paloittain määritellyn funktion raja-arvo

- Raja-arvo numeerisesti
- Raja-arvo graafisesti
- Funktion raja-arvo
- Raja-arvon laskusäännöt
- Raja-arvon laskeminen
- Paloittain määritellyn funktion raja-arvo

Esimerkki 2. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{|3x - 9|}{x^2 - 9}$

$$|3x - 9| = \begin{cases} -3x + 9, & \text{kun } x < 3 \\ 3x - 9, & \text{kun } x \geq 3 \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{|3x - 9|}{x^2 - 9} = \begin{cases} \frac{-3x + 9}{x^2 - 9}, & \text{kun } x < 3 \wedge x \neq -3 \\ \frac{3x - 9}{x^2 - 9}, & \text{kun } x > 3 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-3(x - 3)}{(x - 3)(x + 3)} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-3}{x + 3} = \frac{-1}{2}$$

Paloittain määritellyn funktion raja-arvo

- Raja-arvo numeerisesti
- Raja-arvo graafisesti
- Funktion raja-arvo
- Raja-arvon laskusäännöt
- Raja-arvon laskeminen
- Paloittain määritellyn funktion raja-arvo

Esimerkki 2. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{|3x - 9|}{x^2 - 9}$

$$|3x - 9| = \begin{cases} -3x + 9, & \text{kun } x < 3 \\ 3x - 9, & \text{kun } x \geq 3 \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{|3x - 9|}{x^2 - 9} = \begin{cases} \frac{-3x + 9}{x^2 - 9}, & \text{kun } x < 3 \wedge x \neq -3 \\ \frac{3x - 9}{x^2 - 9}, & \text{kun } x > 3 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-3(x - 3)}{(x - 3)(x + 3)} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-3}{x + 3} = \frac{-1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) =$$

Paloittain määritellyn funktion raja-arvo

- Raja-arvo numeerisesti
- Raja-arvo graafisesti
- Funktion raja-arvo
- Raja-arvon laskusäännöt
- Raja-arvon laskeminen
- Paloittain määritellyn funktion raja-arvo

Esimerkki 2. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{|3x - 9|}{x^2 - 9}$

$$|3x - 9| = \begin{cases} -3x + 9, & \text{kun } x < 3 \\ 3x - 9, & \text{kun } x \geq 3 \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{|3x - 9|}{x^2 - 9} = \begin{cases} \frac{-3x + 9}{x^2 - 9}, & \text{kun } x < 3 \wedge x \neq -3 \\ \frac{3x - 9}{x^2 - 9}, & \text{kun } x > 3 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-3(x - 3)}{(x - 3)(x + 3)} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-3}{x + 3} = \frac{-1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3(x - 3)}{(x - 3)(x + 3)} =$$

Paloittain määritellyn funktion raja-arvo

- Raja-arvo numeerisesti
- Raja-arvo graafisesti
- Funktion raja-arvo
- Raja-arvon laskusäännöt
- Raja-arvon laskeminen
- Paloittain määritellyn funktion raja-arvo

Esimerkki 2. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{|3x - 9|}{x^2 - 9}$

$$|3x - 9| = \begin{cases} -3x + 9, & \text{kun } x < 3 \\ 3x - 9, & \text{kun } x \geq 3 \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{|3x - 9|}{x^2 - 9} = \begin{cases} \frac{-3x + 9}{x^2 - 9}, & \text{kun } x < 3 \wedge x \neq -3 \\ \frac{3x - 9}{x^2 - 9}, & \text{kun } x > 3 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-3(x - 3)}{(x - 3)(x + 3)} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-3}{x + 3} = \frac{-1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3(x - 3)}{(x - 3)(x + 3)} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3}{x + 3} =$$

Paloittain määritellyn funktion raja-arvo

- Raja-arvo numeerisesti
- Raja-arvo graafisesti
- Funktion raja-arvo
- Raja-arvon laskusäännöt
- Raja-arvon laskeminen
- Paloittain määritellyn funktion raja-arvo

Esimerkki 2. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{|3x - 9|}{x^2 - 9}$

$$|3x - 9| = \begin{cases} -3x + 9, & \text{kun } x < 3 \\ 3x - 9, & \text{kun } x \geq 3 \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{|3x - 9|}{x^2 - 9} = \begin{cases} \frac{-3x + 9}{x^2 - 9}, & \text{kun } x < 3 \wedge x \neq -3 \\ \frac{3x - 9}{x^2 - 9}, & \text{kun } x > 3 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-3(x - 3)}{(x - 3)(x + 3)} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-3}{x + 3} = \frac{-1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3(x - 3)}{(x - 3)(x + 3)} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3}{x + 3} = \frac{1}{2}$$

Paloittain määritellyn funktion raja-arvo

- Raja-arvo numeerisesti
- Raja-arvo graafisesti
- Funktion raja-arvo
- Raja-arvon laskusäännöt
- Raja-arvon laskeminen
- Paloittain määritellyn funktion raja-arvo

Esimerkki 2. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{|3x - 9|}{x^2 - 9}$

$$|3x - 9| = \begin{cases} -3x + 9, & \text{kun } x < 3 \\ 3x - 9, & \text{kun } x \geq 3 \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{|3x - 9|}{x^2 - 9} = \begin{cases} \frac{-3x + 9}{x^2 - 9}, & \text{kun } x < 3 \wedge x \neq -3 \\ \frac{3x - 9}{x^2 - 9}, & \text{kun } x > 3 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-3(x - 3)}{(x - 3)(x + 3)} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-3}{x + 3} = \frac{-1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3(x - 3)}{(x - 3)(x + 3)} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3}{x + 3} = \frac{1}{2}$$

Koska $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$, niin

Paloittain määritellyn funktion raja-arvo

- Raja-arvo numeerisesti
- Raja-arvo graafisesti
- Funktion raja-arvo
- Raja-arvon laskusäännöt
- Raja-arvon laskeminen
- Paloittain määritellyn funktion raja-arvo

Esimerkki 2. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{|3x - 9|}{x^2 - 9}$

$$|3x - 9| = \begin{cases} -3x + 9, & \text{kun } x < 3 \\ 3x - 9, & \text{kun } x \geq 3 \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{|3x - 9|}{x^2 - 9} = \begin{cases} \frac{-3x + 9}{x^2 - 9}, & \text{kun } x < 3 \wedge x \neq -3 \\ \frac{3x - 9}{x^2 - 9}, & \text{kun } x > 3 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-3(x - 3)}{(x - 3)(x + 3)} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-3}{x + 3} = \frac{-1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3(x - 3)}{(x - 3)(x + 3)} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3}{x + 3} = \frac{1}{2}$$

Koska $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$, niin $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ ei ole olemassa.

Paloittain määritellyn funktion raja-arvo

- Raja-arvo numeerisesti
- Raja-arvo graafisesti
- Funktion raja-arvo
- Raja-arvon laskusäännöt
- Raja-arvon laskeminen
- Paloittain määritellyn funktion raja-arvo

Esimerkki 2 jatkuu

