Funktion raja-arvo

Hannu Lehto
Lahden Lyseon lukio

Raja-arvo numeerisesti

Tutkitaan funktion $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ arvoja, kun x lähestyy lukua 2.

x	f(x)
1,9	3,9
1,99	3,99
1,999	3,999
$\downarrow$	$\downarrow$
2-	4

x lähestyy lukua 2 *vasemmalta*, funktion *vasemmanpuolinen raja-arvo* kohdassa $x = 2$ on (ilmeisesti!) 4.

x	f(x)
2,1	4,1
2,01	4,01
2,001	4,001
$\downarrow$	$\downarrow$
2+	4

x lähestyy lukua 2 *oikealta*, funktion *oikeanpuolinen raja-arvo* kohdassa $x = 2$ on (ilmeisesti!) 4.

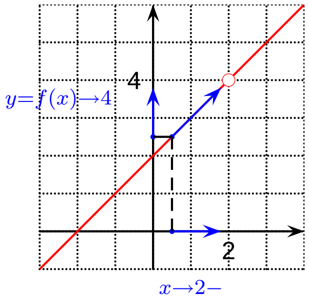
Funktion f raja-arvo kohdassa $x = 2$ on 4.

$f(x) \to 4,$ kun $x \to 2$

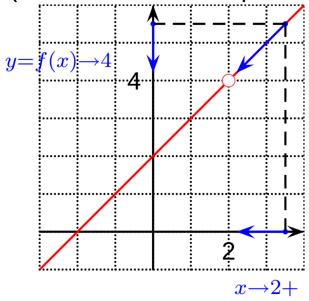
$\lim_{x \to 2} f(x) = 4$

Raja-arvo graafisesti

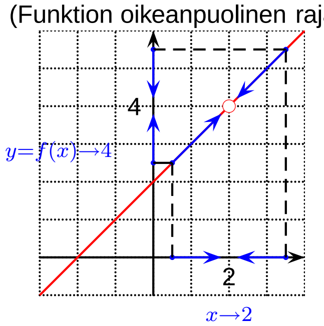
Tutkitaan funktion $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ arvoja, kun x lähestyy lukua 2.



$\lim\limits_{x \to 2-} f(x) = 4$ eli $f(x) \to 4$, kun $x \to 2-$
(Funktion vasemmanpuolinen raja-arvo kohdassa $x = 2$ on 4.)



$\lim\limits_{x \to 2+} f(x) = 4$ eli $f(x) \to 4$, kun $x \to 2+$
(Funktion oikeanpuolinen raja-arvo kohdassa $x = 2$ on 4.)



$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 4$ eli $f(x) \to 4$, kun $x \to 2$
(Funktion raja-arvo kohdassa $x = 2$ on 4.)
Huom. Funktiolla on raja-arvo kohdassa $x = 2$, vaikka funktiota ei ole määritelty kohdassa $x = 2$!

3 / 10

Funktion raja-arvo

Olkoon funktio f määritelty kohdan $x = x_0$ molemmilla puolilla välillä $[x_0 - r, x_0 + r]$, $r > 0$ mahdollisesti kohtaa x_0 lukuunottamatta.

Funktiolla f on kohdassa x_0 raja-arvo a, jos muuttujan x lähestyessä rajatta x_0:aa kummalta puolelta tahansa funktion f arvot lähestyvät a:ta.

Siis tulemalla riitävän lähelle lukua x_0 funktion arvot tulevat mielivaltaisen lähelle a:ta.

4 / 10

Raja-arvon laskusäännöt

Olkoon $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$ ja $\lim_{x \to x_0} g(x) = b$ ja c vakio. Silloin on

1. $\lim_{x \to x_0} (cf(x)) = ca$,
2. $\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = a + b$,
3. $\lim_{x \to x_0} (f(x)g(x)) = ab$,
4. $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$, kun $b \neq 0$.

5 / 10

Raja-arvon laskeminen

- Polynomifunktion raja-arvo

$$\lim_{x \to x_0} p(x) = p(x_0)$$

- Rationaalifunktion $\frac{p(x)}{q(x)}$ raja-arvo kohdassa x_0, jossa
  - $q(x_0) \neq 0$:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(x_0)}{q(x_0)}$$

  - $q(x_0) = 0$: pyritään supistamaan muotoon, joka on määritelty kohdassa x_0.

6 / 10

Raja-arvon laskeminen

1. $\lim_{x \to 2} \left(x^2 - 3x + 1\right)$
2. $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 4}{3x - 6}$
3. $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{3x - 6}$
4. $\lim_{x \to 1} \left(1 - \frac{1}{x}\right) : (x - 1)$
5. $\lim_{x \to 5} \frac{\sqrt{x - 1} - 2}{x - 5}$

7 / 10

Paloittain määritellyn funktion raja-arvo

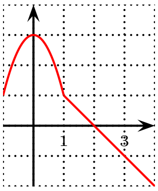
Esimerkki 1. Olkoon $f(x) = \begin{cases} -2x^2+3, & x \le 1 \\ -x+2, & x > 1 \end{cases}$. Tutki raja-arvoja **a)** $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ ja **b)** $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

a) $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = \lim\limits_{x\to 3}(-x+2) = -3+2 = -1$

b) $\lim\limits_{x\to 1-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1-} (-2x^2+3) = 1$

$\lim\limits_{x\to 1+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1+} (-x+2) = 1$

Koska $\lim\limits_{x\to 1-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1+} f(x) = 1$, niin $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$



Paloittain määritellyn funktion raja-arvo

Esimerkki 2. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{|3x-9|}{x^2-9}$

$$|3x-9| = \begin{cases} -3x+9, & \text{kun} \quad x < 3 \\ 3x-9, & \text{kun} \quad x \ge 3 \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{|3x-9|}{x^2-9} = \begin{cases} \dfrac{-3x+9}{x^2-9}, & \text{kun} \quad x < 3 \wedge x \ne -3 \\[2ex] \dfrac{3x-9}{x^2-9}, & \text{kun} \quad x > 3 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 3-} f(x) = \lim_{x\to 3-} \frac{-3(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x\to 3-} \frac{-3}{x+3} = \frac{-1}{2}$$

$$\lim_{x\to 3+} f(x) = \lim_{x\to 3+} \frac{3(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x\to 3+} \frac{3}{x+3} = \frac{1}{2}$$

Koska $\lim\limits_{x\to 3-} f(x) \ne \lim\limits_{x\to 3+} f(x)$, niin $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ ei olemassa.

Paloittain määritellyn funktion raja-arvo

Esimerkki 2 jatkuu