

Käyrän tangentti ja normaali

Hannu Lehto
Lahden Lyseon lukio



Tangentin yhtälö, kun sivuamispiste tunnetaan

- Tangentin yhtälö, kun sivuamispiste tunnetaan
- Tangentin yhtälö, kun kulmakerroin tunnetaan
- Käyrän ulkopuolisesta pisteestä piirretyn tangentin yhtälö
- Paraabelin huippu

Esimerkki. Määritä käyrälle $y = x^3 - 3x$ kohtaan $x = 1\frac{1}{2}$ piirretyn *tangentin* ja *normaalin* yhtälöt.

Tangentin yhtälö, kun sivuamispiste tunnetaan

- Tangentin yhtälö, kun sivuamispiste tunnetaan
- Tangentin yhtälö, kun kulmakerroin tunnetaan
- Käyrän ulkopuolisesta pisteestä piirretyn tangentin yhtälö
- Paraabelin huippu

Esimerkki. Määritä käyrälle $y = x^3 - 3x$ kohtaan $x = 1\frac{1}{2}$ piirretyn tangentin ja normaalin yhtälöt.



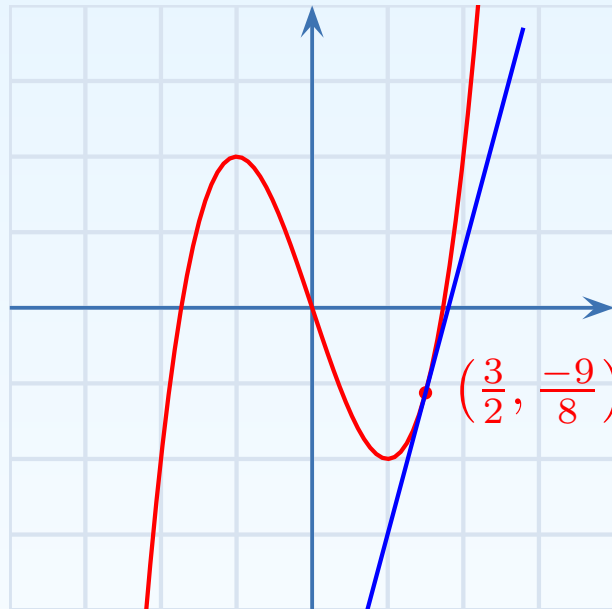
Sivuamispiste:

$$x = 1\frac{1}{2}, y =$$

Tangentin yhtälö, kun sivuamispiste tunnetaan

- Tangentin yhtälö, kun sivuamispiste tunnetaan
- Tangentin yhtälö, kun kulmakerroin tunnetaan
- Käyrän ulkopuolisesta pisteestä piirretyn tangentin yhtälö
- Paraabelin huippu

Esimerkki. Määritä käyrälle $y = x^3 - 3x$ kohtaan $x = 1\frac{1}{2}$ piirretyn tangentin ja normaalin yhtälöt.



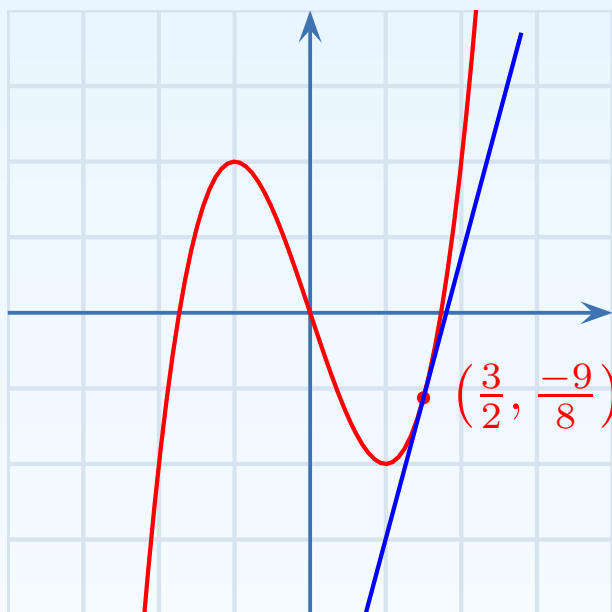
Sivuamispiste:

$$x = 1\frac{1}{2}, y = \left(\frac{3}{2}\right)^3 - 3 \cdot \frac{3}{2} = -\frac{9}{8}$$

Tangentin yhtälö, kun sivuamispiste tunnetaan

- Tangentin yhtälö, kun sivuamispiste tunnetaan
- Tangentin yhtälö, kun kulmakerroin tunnetaan
- Käyrän ulkopuolisesta pisteestä piirretyn tangentin yhtälö
- Paraabelin huippu

Esimerkki. Määritä käyrälle $y = x^3 - 3x$ kohtaan $x = 1\frac{1}{2}$ piirretyn tangentin ja normaalin yhtälöt.



Sivuamispiste:

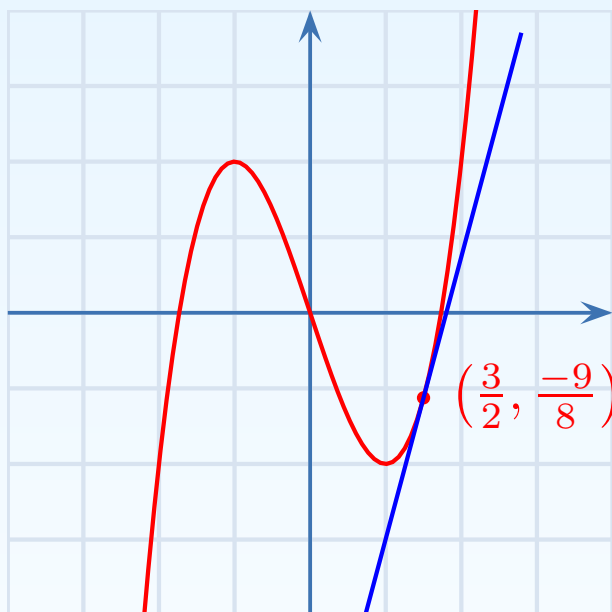
$$x = 1\frac{1}{2}, y = \left(\frac{3}{2}\right)^3 - 3 \cdot \frac{3}{2} = -\frac{9}{8}$$

$$\text{Derivaatta } f'(x) = 3x^2 - 3$$

Tangentin yhtälö, kun sivuamispiste tunnetaan

- Tangentin yhtälö, kun sivuamispiste tunnetaan
- Tangentin yhtälö, kun kulmakerroin tunnetaan
- Käyrän ulkopuolisesta pisteestä piirretyn tangentin yhtälö
- Paraabelin huippu

Esimerkki. Määritä käyrälle $y = x^3 - 3x$ kohtaan $x = 1\frac{1}{2}$ piirretyn tangentin ja normaalin yhtälöt.



Sivuamispiste:

$$x = 1\frac{1}{2}, y = \left(\frac{3}{2}\right)^3 - 3 \cdot \frac{3}{2} = -\frac{9}{8}$$

$$\text{Derivaatta } f'(x) = 3x^2 - 3$$

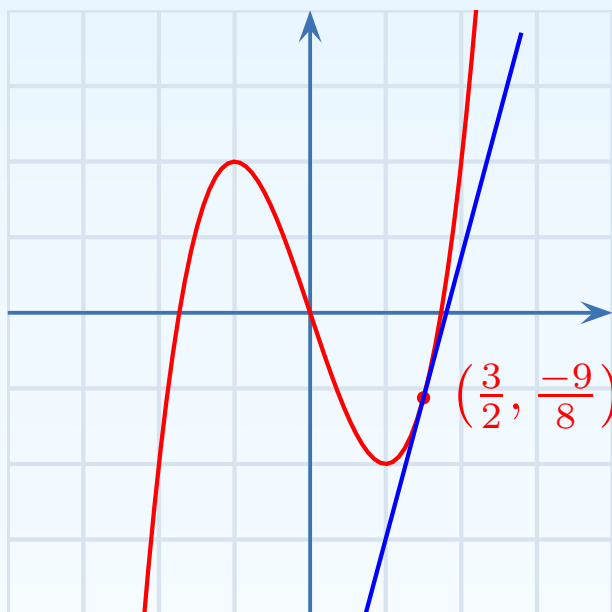
Tangentin kulmakerroin:

$$k =$$

Tangentin yhtälö, kun sivuamispiste tunnetaan

- Tangentin yhtälö, kun sivuamispiste tunnetaan
- Tangentin yhtälö, kun kulmakerroin tunnetaan
- Käyrän ulkopuolisesta pisteestä piirretyn tangentin yhtälö
- Paraabelin huippu

Esimerkki. Määritä käyrälle $y = x^3 - 3x$ kohtaan $x = 1\frac{1}{2}$ piirretyn tangentin ja normaalin yhtälöt.



Sivuamispiste:

$$x = 1\frac{1}{2}, y = \left(\frac{3}{2}\right)^3 - 3 \cdot \frac{3}{2} = -\frac{9}{8}$$

$$\text{Derivaatta } f'(x) = 3x^2 - 3$$

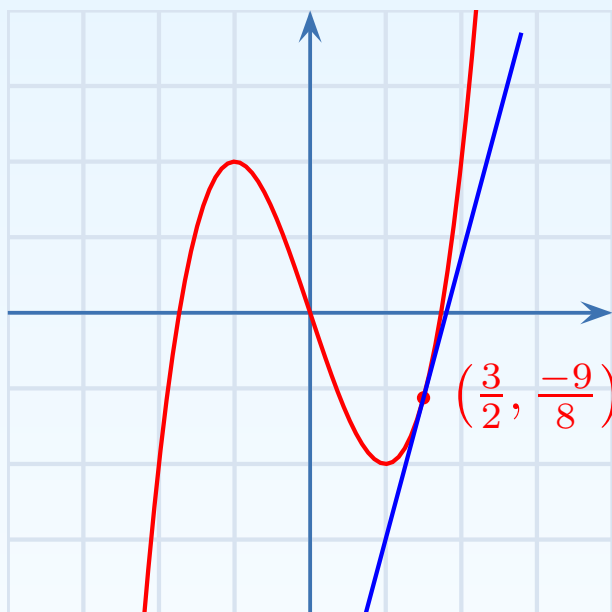
Tangentin kulmakerroin:

$$k = f'\left(\frac{3}{2}\right) = 3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3 = \frac{15}{4}$$

Tangentin yhtälö, kun sivuamispiste tunnetaan

- Tangentin yhtälö, kun sivuamispiste tunnetaan
- Tangentin yhtälö, kun kulmakerroin tunnetaan
- Käyrän ulkopuolisesta pisteestä piirretyn tangentin yhtälö
- Paraabelin huippu

Esimerkki. Määritä käyrälle $y = x^3 - 3x$ kohtaan $x = 1\frac{1}{2}$ piirretyn tangentin ja normaalin yhtälöt.



Sivuamispiste:

$$x = 1\frac{1}{2}, y = \left(\frac{3}{2}\right)^3 - 3 \cdot \frac{3}{2} = -\frac{9}{8}$$

$$\text{Derivaatta } f'(x) = 3x^2 - 3$$

Tangentin kulmakerroin:

$$k = f'\left(\frac{3}{2}\right) = 3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3 = \frac{15}{4}$$

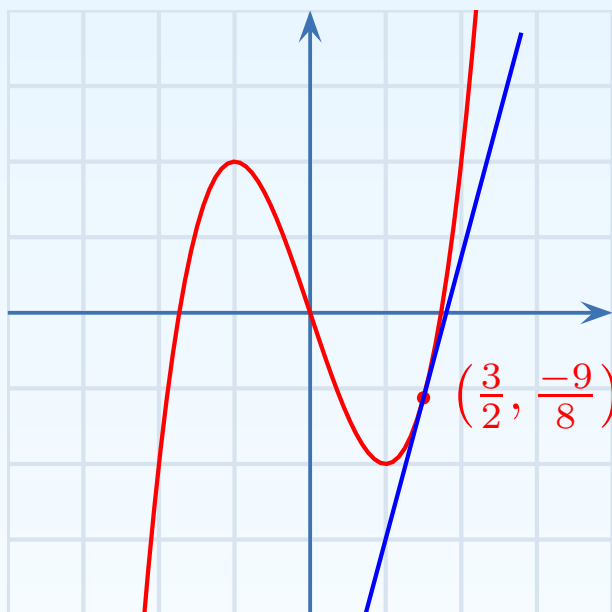
$$\text{Suoran yhtälö: } y - y_0 = k(x - x_0)$$

Tangentin yhtälö:

Tangentin yhtälö, kun sivuamispiste tunnetaan

- Tangentin yhtälö, kun sivuamispiste tunnetaan
- Tangentin yhtälö, kun kulmakerroin tunnetaan
- Käyrän ulkopuolisesta pisteestä piirretyn tangentin yhtälö
- Paraabelin huippu

Esimerkki. Määritä käyrälle $y = x^3 - 3x$ kohtaan $x = 1\frac{1}{2}$ piirretyn tangentin ja normaalin yhtälöt.



Sivuamispiste:

$$x = 1\frac{1}{2}, y = \left(\frac{3}{2}\right)^3 - 3 \cdot \frac{3}{2} = -\frac{9}{8}$$

$$\text{Derivaatta } f'(x) = 3x^2 - 3$$

Tangentin kulmakerroin:

$$k = f'\left(\frac{3}{2}\right) = 3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3 = \frac{15}{4}$$

$$\text{Suoran yhtälö: } y - y_0 = k(x - x_0)$$

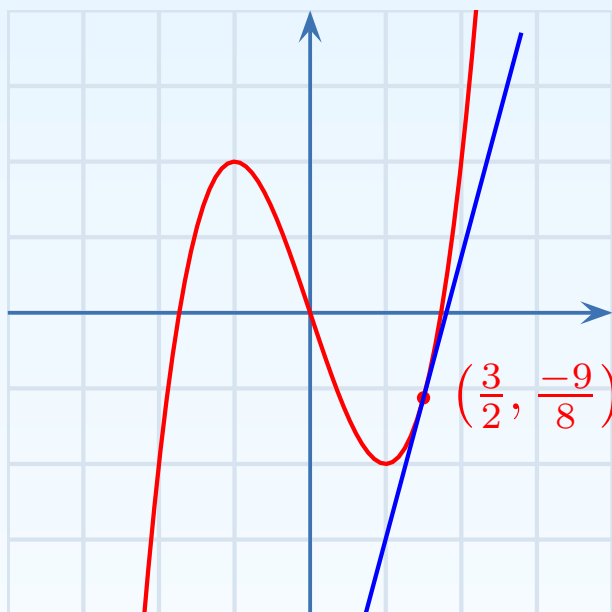
Tangentin yhtälö:

$$y - \left(-\frac{9}{8}\right) = \frac{15}{4} \left(x - \frac{3}{2}\right)$$

Tangentin yhtälö, kun sivuamispiste tunnetaan

- Tangentin yhtälö, kun sivuamispiste tunnetaan
- Tangentin yhtälö, kun kulmakerroin tunnetaan
- Käyrän ulkopuolisesta pisteestä piirretyn tangentin yhtälö
- Paraabelin huippu

Esimerkki. Määritä käyrälle $y = x^3 - 3x$ kohtaan $x = 1\frac{1}{2}$ piirretyn tangentin ja normaalin yhtälöt.



Sivuamispiste:

$$x = 1\frac{1}{2}, y = \left(\frac{3}{2}\right)^3 - 3 \cdot \frac{3}{2} = -\frac{9}{8}$$

$$\text{Derivaatta } f'(x) = 3x^2 - 3$$

Tangentin kulmakerroin:

$$k = f'\left(\frac{3}{2}\right) = 3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3 = \frac{15}{4}$$

$$\text{Suoran yhtälö: } y - y_0 = k(x - x_0)$$

Tangentin yhtälö:

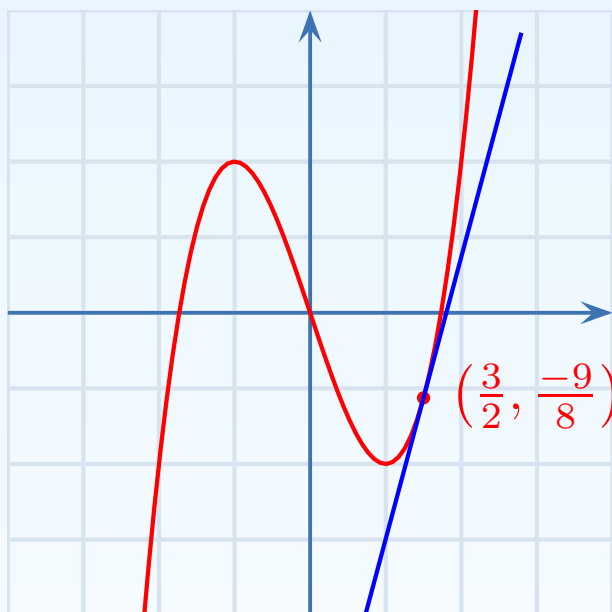
$$y - \left(-\frac{9}{8}\right) = \frac{15}{4} \left(x - \frac{3}{2}\right)$$

$$y = \frac{15}{4}x - \frac{27}{4}$$

Tangentin yhtälö, kun sivuamispiste tunnetaan

- Tangentin yhtälö, kun sivuamispiste tunnetaan
- Tangentin yhtälö, kun kulmakerroin tunnetaan
- Käyrän ulkopuolisesta pisteestä piirretyn tangentin yhtälö
- Paraabelin huippu

Esimerkki. Määritä käyrälle $y = x^3 - 3x$ kohtaan $x = 1\frac{1}{2}$ piirretyn tangentin ja normaalin yhtälöt.



Sivuamispiste:

$$x = 1\frac{1}{2}, y = \left(\frac{3}{2}\right)^3 - 3 \cdot \frac{3}{2} = -\frac{9}{8}$$

$$\text{Derivaatta } f'(x) = 3x^2 - 3$$

Tangentin kulmakerroin:

$$k = f'\left(\frac{3}{2}\right) = 3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3 = \frac{15}{4}$$

$$\text{Suoran yhtälö: } y - y_0 = k(x - x_0)$$

Tangentin yhtälö:

$$y - \left(-\frac{9}{8}\right) = \frac{15}{4} \left(x - \frac{3}{2}\right)$$

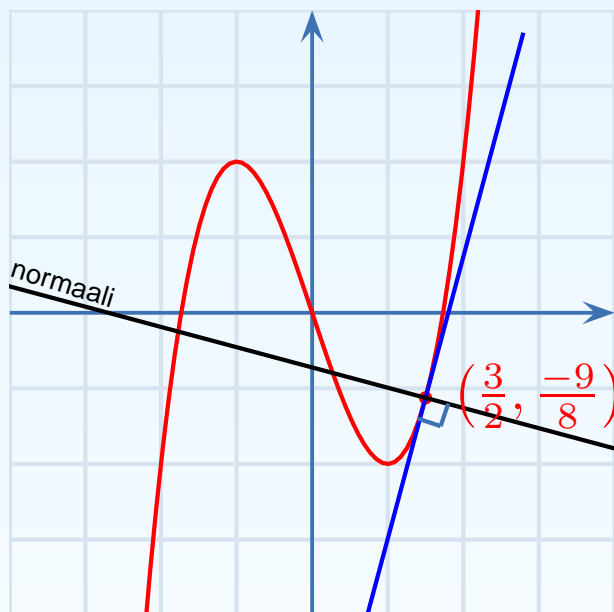
$$y = \frac{15}{4}x - \frac{27}{4}$$

$$\underline{15x - 4y - 27 = 0}$$

Tangentin yhtälö, kun sivuamispiste tunnetaan

- Tangentin yhtälö, kun sivuamispiste tunnetaan
- Tangentin yhtälö, kun kulmakerroin tunnetaan
- Käyrän ulkopuolisesta pisteestä piirretyn tangentin yhtälö
- Paraabelin huippu

Esimerkki. Määritä käyrälle $y = x^3 - 3x$ kohtaan $x = 1\frac{1}{2}$ piirretyn tangentin ja normaalin yhtälöt.



Normaalin kulmakerroin on

Sivuamispiste:

$$x = 1\frac{1}{2}, y = \left(\frac{3}{2}\right)^3 - 3 \cdot \frac{3}{2} = -\frac{9}{8}$$

$$\text{Derivaatta } f'(x) = 3x^2 - 3$$

Tangentin kulmakerroin:

$$k = f'\left(\frac{3}{2}\right) = 3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3 = \frac{15}{4}$$

$$\text{Suoran yhtälö: } y - y_0 = k(x - x_0)$$

Tangentin yhtälö:

$$y - \left(-\frac{9}{8}\right) = \frac{15}{4} \left(x - \frac{3}{2}\right)$$

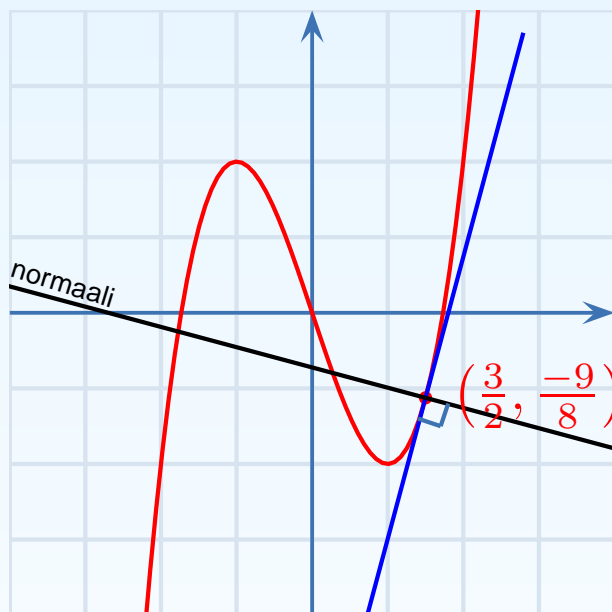
$$y = \frac{15}{4}x - \frac{27}{4}$$

$$\underline{15x - 4y - 27 = 0}$$

Tangentin yhtälö, kun sivuamispiste tunnetaan

- Tangentin yhtälö, kun sivuamispiste tunnetaan
- Tangentin yhtälö, kun kulmakerroin tunnetaan
- Käyrän ulkopuolisesta pisteestä piirretyn tangentin yhtälö
- Paraabelin huippu

Esimerkki. Määritä käyrälle $y = x^3 - 3x$ kohtaan $x = 1\frac{1}{2}$ piirretyn tangentin ja normaalin yhtälöt.



Sivuamispiste:

$$x = 1\frac{1}{2}, y = \left(\frac{3}{2}\right)^3 - 3 \cdot \frac{3}{2} = -\frac{9}{8}$$

$$\text{Derivaatta } f'(x) = 3x^2 - 3$$

Tangentin kulmakerroin:

$$k = f'\left(\frac{3}{2}\right) = 3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3 = \frac{15}{4}$$

$$\text{Suoran yhtälö: } y - y_0 = k(x - x_0)$$

Tangentin yhtälö:

$$y - \left(-\frac{9}{8}\right) = \frac{15}{4} \left(x - \frac{3}{2}\right)$$

$$y = \frac{15}{4}x - \frac{27}{4}$$

$$\underline{15x - 4y - 27 = 0}$$

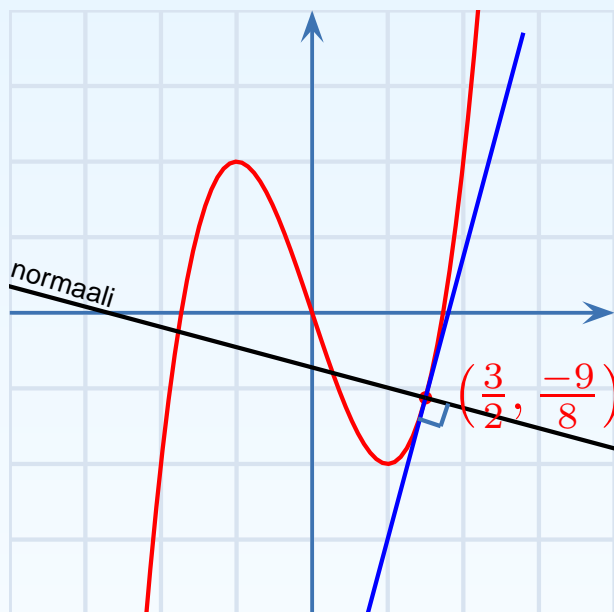
Normaalin kulmakerroin on $\frac{-4}{15}$ (kohtisuoruusehto $k_1 k_2 = -1$)

Normaalin yhtälö on

Tangentin yhtälö, kun sivuamispiste tunnetaan

- Tangentin yhtälö, kun sivuamispiste tunnetaan
- Tangentin yhtälö, kun kulmakerroin tunnetaan
- Käyrän ulkopuolisesta pisteestä piirretyn tangentin yhtälö
- Paraabelin huippu

Esimerkki. Määritä käyrälle $y = x^3 - 3x$ kohtaan $x = 1\frac{1}{2}$ piirretyn tangentin ja normaalin yhtälöt.



Sivuamispiste:

$$x = 1\frac{1}{2}, y = \left(\frac{3}{2}\right)^3 - 3 \cdot \frac{3}{2} = -\frac{9}{8}$$

$$\text{Derivaatta } f'(x) = 3x^2 - 3$$

Tangentin kulmakerroin:

$$k = f'\left(\frac{3}{2}\right) = 3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3 = \frac{15}{4}$$

$$\text{Suoran yhtälö: } y - y_0 = k(x - x_0)$$

Tangentin yhtälö:

$$y - \left(-\frac{9}{8}\right) = \frac{15}{4} \left(x - \frac{3}{2}\right)$$

$$y = \frac{15}{4}x - \frac{27}{4}$$

$$\underline{15x - 4y - 27 = 0}$$

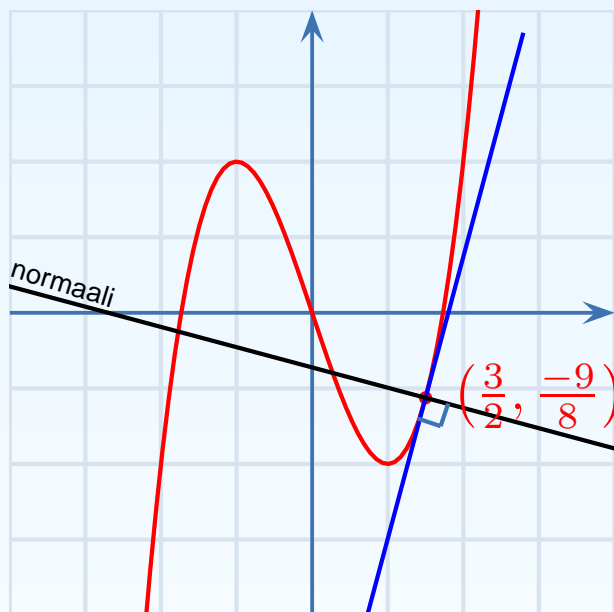
Normaalin kulmakerroin on $\frac{-4}{15}$ (kohtisuoruusehto $k_1 k_2 = -1$)

$$\text{Normaalin yhtälö on } y - \left(-\frac{9}{8}\right) = \frac{-4}{15} \left(x - \frac{3}{2}\right)$$

Tangentin yhtälö, kun sivuamispiste tunnetaan

- Tangentin yhtälö, kun sivuamispiste tunnetaan
- Tangentin yhtälö, kun kulmakerroin tunnetaan
- Käyrän ulkopuolisesta pisteestä piirretyn tangentin yhtälö
- Paraabelin huippu

Esimerkki. Määritä käyrälle $y = x^3 - 3x$ kohtaan $x = 1\frac{1}{2}$ piirretyn tangentin ja normaalin yhtälöt.



Sivuamispiste:

$$x = 1\frac{1}{2}, y = \left(\frac{3}{2}\right)^3 - 3 \cdot \frac{3}{2} = -\frac{9}{8}$$

$$\text{Derivaatta } f'(x) = 3x^2 - 3$$

Tangentin kulmakerroin:

$$k = f'\left(\frac{3}{2}\right) = 3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3 = \frac{15}{4}$$

$$\text{Suoran yhtälö: } y - y_0 = k(x - x_0)$$

Tangentin yhtälö:

$$y - \left(-\frac{9}{8}\right) = \frac{15}{4} \left(x - \frac{3}{2}\right)$$

$$y = \frac{15}{4}x - \frac{27}{4}$$

$$\underline{15x - 4y - 27 = 0}$$

Normaalin kulmakerroin on $\frac{-4}{15}$ (kohtisuoruusehto $k_1 k_2 = -1$)

$$\text{Normaalin yhtälö on } y - \left(-\frac{9}{8}\right) = \frac{-4}{15} \left(x - \frac{3}{2}\right)$$

$$y = \frac{-4}{15}x - \frac{87}{120}$$

Tangentin yhtälö, kun kulmakerroin tunnetaan

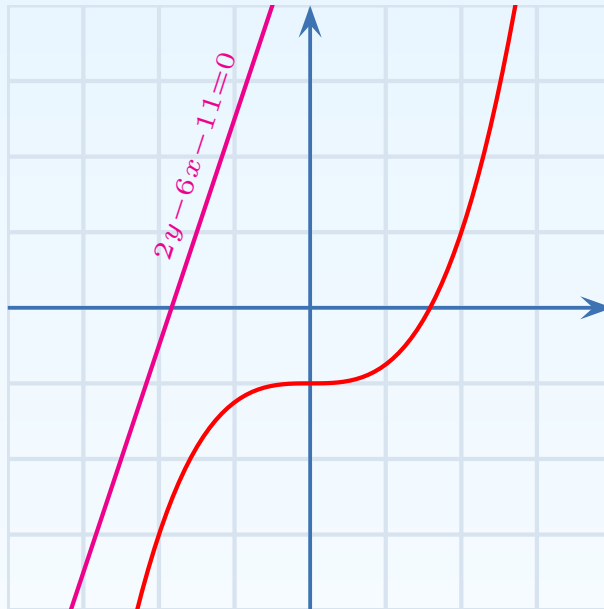
- Tangentin yhtälö, kun sivuamispiste tunnetaan
- Tangentin yhtälö, kun kulmakerroin tunnetaan
- Käyrän ulkopuolisesta pisteestä piirretyn tangentin yhtälö
- Paraabelin huippu

Esimerkki. Määritä käyrän $y = \frac{1}{4}x^3 - 1$ ne tangentit, jotka ovat suoran $2y - 6x - 11 = 0$ suuntaiset.

Tangentin yhtälö, kun kulmakerroin tunnetaan

- Tangentin yhtälö, kun sivuamispiste tunnetaan
- Tangentin yhtälö, kun kulmakerroin tunnetaan
- Käyrän ulkopuolisesta pisteestä piirretyn tangentin yhtälö
- Paraabelin huippu

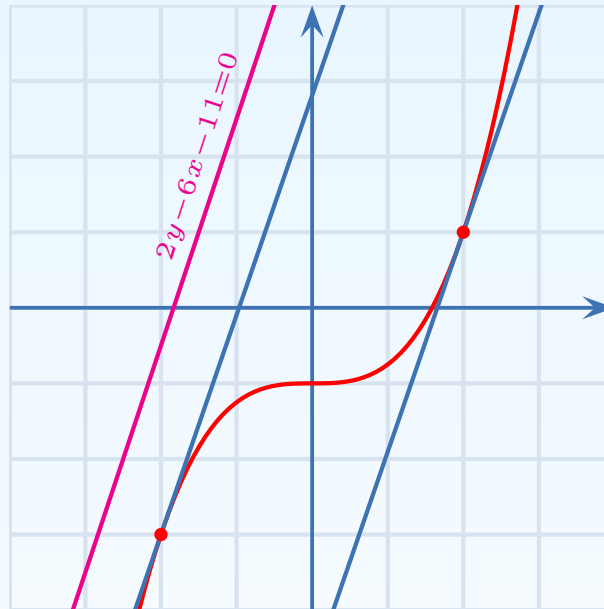
Esimerkki. Määritä käyrän $y = \frac{1}{4}x^3 - 1$ ne tangentit, jotka ovat suoran $2y - 6x - 11 = 0$ suuntaiset.



Tangentin yhtälö, kun kulmakerroin tunnetaan

- Tangentin yhtälö, kun sivuamispiste tunnetaan
- Tangentin yhtälö, kun kulmakerroin tunnetaan
- Käyrän ulkopuolisesta pisteestä piirretyn tangentin yhtälö
- Paraabelin huippu

Esimerkki. Määritä käyrän $y = \frac{1}{4}x^3 - 1$ ne tangentit, jotka ovat suoran $2y - 6x - 11 = 0$ suuntaiset.

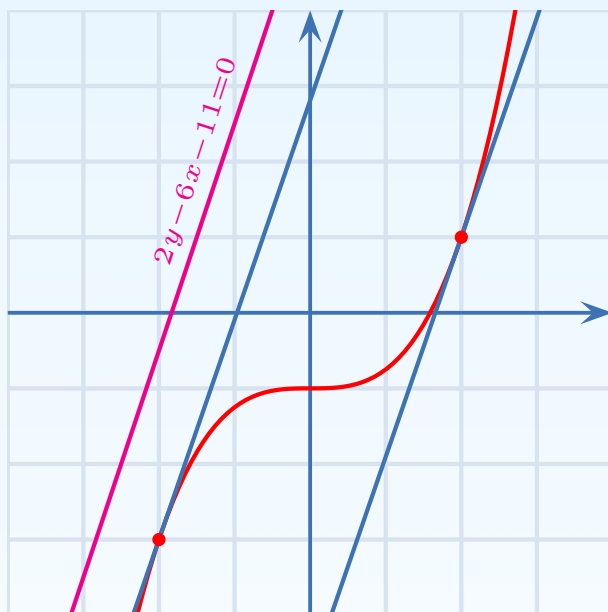


Tangentin kulmakerroin k :

Tangentin yhtälö, kun kulmakerroin tunnetaan

- Tangentin yhtälö, kun sivuamispiste tunnetaan
- Tangentin yhtälö, kun kulmakerroin tunnetaan
- Käyrän ulkopuolisesta pisteestä piirretyn tangentin yhtälö
- Paraabelin huippu

Esimerkki. Määritä käyrän $y = \frac{1}{4}x^3 - 1$ ne tangentit, jotka ovat suoran $2y - 6x - 11 = 0$ suuntaiset.



Tangentin kulmakerroin k :

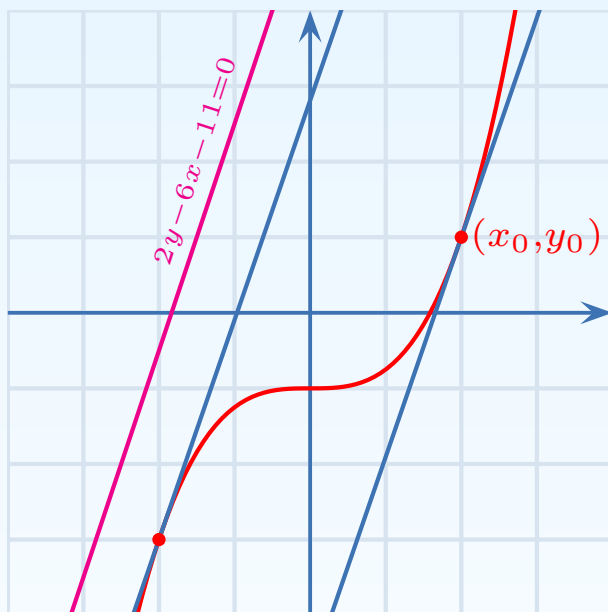
$$2y - 6x - 11 = 0 \Leftrightarrow y = 3x + \frac{11}{2},$$

joten $k = 3$

Tangentin yhtälö, kun kulmakerroin tunnetaan

- Tangentin yhtälö, kun sivuamispiste tunnetaan
- Tangentin yhtälö, kun kulmakerroin tunnetaan
- Käyrän ulkopuolisesta pisteestä piirretyn tangentin yhtälö
- Paraabelin huippu

Esimerkki. Määritä käyrän $y = \frac{1}{4}x^3 - 1$ ne tangentit, jotka ovat suoran $2y - 6x - 11 = 0$ suuntaiset.



Tangentin kulmakerroin k :

$$2y - 6x - 11 = 0 \Leftrightarrow y = 3x + \frac{11}{2},$$

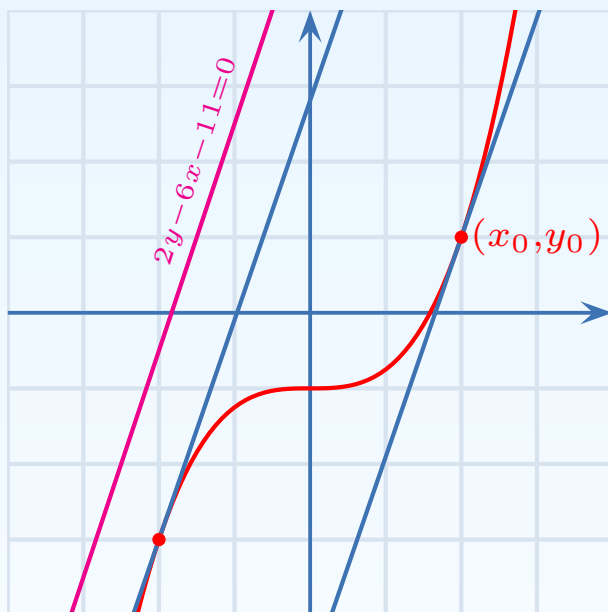
joten $k = 3$

Sivuamispiste (x_0, y_0) :

Tangentin yhtälö, kun kulmakerroin tunnetaan

- Tangentin yhtälö, kun sivuamispiste tunnetaan
- Tangentin yhtälö, kun kulmakerroin tunnetaan
- Käyrän ulkopuolisesta pisteestä piirretyn tangentin yhtälö
- Paraabelin huippu

Esimerkki. Määritä käyrän $y = \frac{1}{4}x^3 - 1$ ne tangentit, jotka ovat suoran $2y - 6x - 11 = 0$ suuntaiset.



Tangentin kulmakerroin k :

$$2y - 6x - 11 = 0 \Leftrightarrow y = 3x + \frac{11}{2},$$

joten $k = 3$

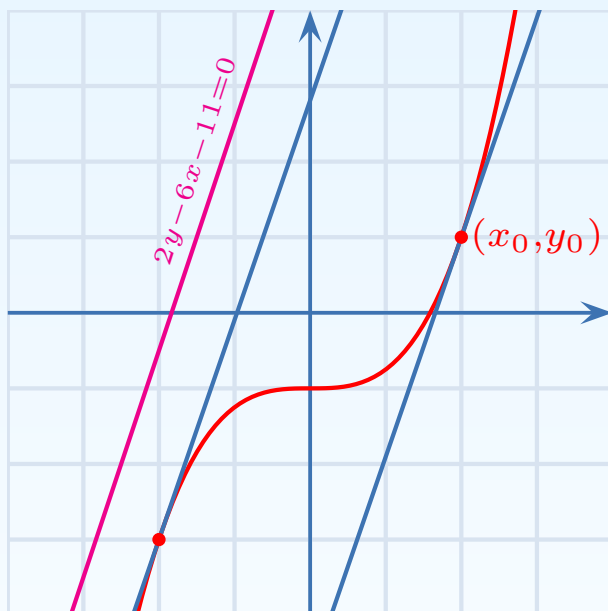
Sivuamispiste (x_0, y_0) :

$$f'(x_0) = 3$$

Tangentin yhtälö, kun kulmakerroin tunnetaan

- Tangentin yhtälö, kun sivuamispiste tunnetaan
- Tangentin yhtälö, kun kulmakerroin tunnetaan
- Käyrän ulkopuolisesta pisteestä piirretyn tangentin yhtälö
- Paraabelin huippu

Esimerkki. Määritä käyrän $y = \frac{1}{4}x^3 - 1$ ne tangentit, jotka ovat suoran $2y - 6x - 11 = 0$ suuntaiset.



Tangentin kulmakerroin k :

$$2y - 6x - 11 = 0 \Leftrightarrow y = 3x + \frac{11}{2},$$

joten $k = 3$

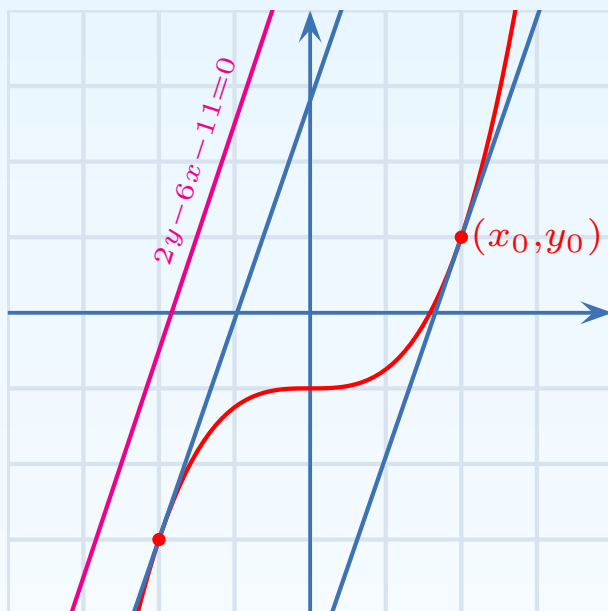
Sivuamispiste (x_0, y_0) :

$$f'(x_0) = 3$$
$$\frac{3}{4}x_0^2 = 3$$

Tangentin yhtälö, kun kulmakerroin tunnetaan

- Tangentin yhtälö, kun sivuamispiste tunnetaan
- Tangentin yhtälö, kun kulmakerroin tunnetaan
- Käyrän ulkopuolisesta pisteestä piirretyn tangentin yhtälö
- Paraabelin huippu

Esimerkki. Määritä käyrän $y = \frac{1}{4}x^3 - 1$ ne tangentit, jotka ovat suoran $2y - 6x - 11 = 0$ suuntaiset.



Tangentin kulmakerroin k :

$$2y - 6x - 11 = 0 \Leftrightarrow y = 3x + \frac{11}{2},$$

joten $k = 3$

Sivuamispiste (x_0, y_0) :

$$f'(x_0) = 3$$

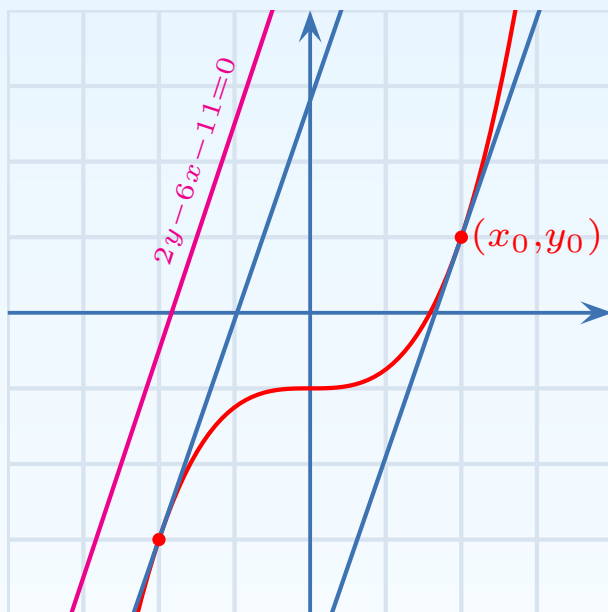
$$\frac{3}{4}x_0^2 = 3$$

$$x_0 = 2 \vee x_0 = -2$$

Tangentin yhtälö, kun kulmakerroin tunnetaan

- Tangentin yhtälö, kun sivuamispiste tunnetaan
- Tangentin yhtälö, kun kulmakerroin tunnetaan
- Käyrän ulkopuolisesta pisteestä piirretyn tangentin yhtälö
- Paraabelin huippu

Esimerkki. Määritä käyrän $y = \frac{1}{4}x^3 - 1$ ne tangentit, jotka ovat suoran $2y - 6x - 11 = 0$ suuntaiset.



Tangentin kulmakerroin k :

$$2y - 6x - 11 = 0 \Leftrightarrow y = 3x + \frac{11}{2},$$

joten $k = 3$

Sivuamispiste (x_0, y_0) :

$$f'(x_0) = 3$$

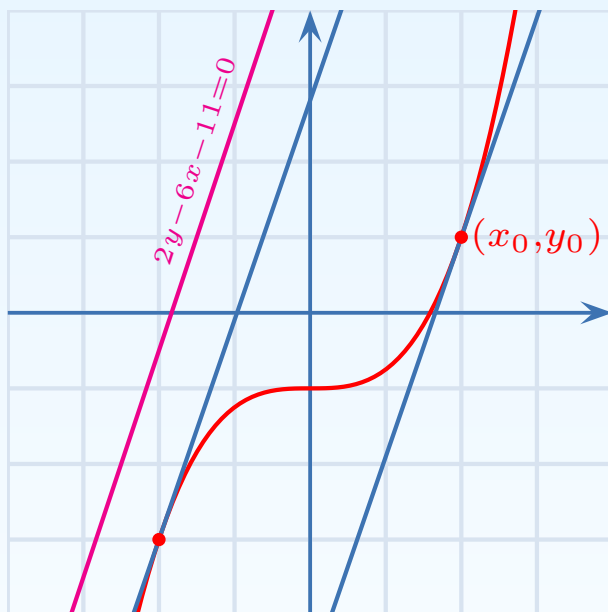
$$\frac{3}{4}x_0^2 = 3$$

$$\begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x_0 = -2 \\ y_0 = -3 \end{cases}$$

Tangentin yhtälö, kun kulmakerroin tunnetaan

- Tangentin yhtälö, kun sivuamispiste tunnetaan
- Tangentin yhtälö, kun kulmakerroin tunnetaan
- Käyrän ulkopuolisesta pisteestä piirretyn tangentin yhtälö
- Paraabelin huippu

Esimerkki. Määritä käyrän $y = \frac{1}{4}x^3 - 1$ ne tangentit, jotka ovat suoran $2y - 6x - 11 = 0$ suuntaiset.



Tangentin kulmakerroin k :

$$2y - 6x - 11 = 0 \Leftrightarrow y = 3x + \frac{11}{2},$$

joten $k = 3$

Sivuamispiste (x_0, y_0) :

$$f'(x_0) = 3$$

$$\frac{3}{4}x_0^2 = 3$$

$$\begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x_0 = -2 \\ y_0 = -3 \end{cases}$$

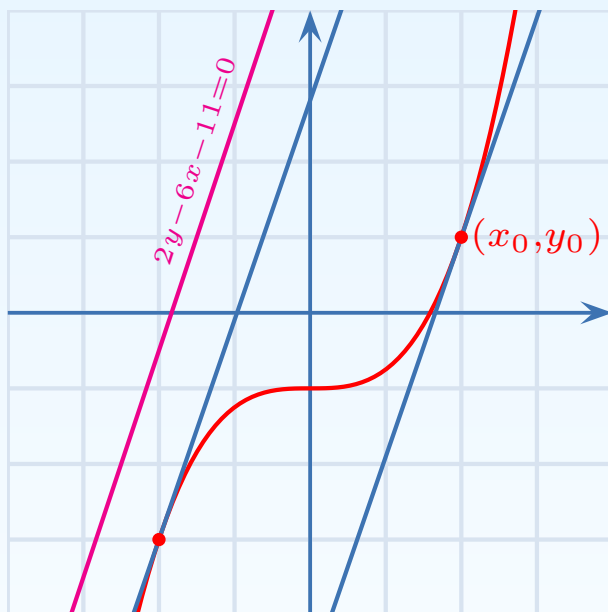
Tangentin yhtälö:

$$y - 1 = 3(x - 2) \quad \vee \quad y - (-3) = 3(x - (-2))$$

Tangentin yhtälö, kun kulmakerroin tunnetaan

- Tangentin yhtälö, kun sivuamispiste tunnetaan
- Tangentin yhtälö, kun kulmakerroin tunnetaan
- Käyrän ulkopuolisesta pisteestä piirretyn tangentin yhtälö
- Paraabelin huippu

Esimerkki. Määritä käyrän $y = \frac{1}{4}x^3 - 1$ ne tangentit, jotka ovat suoran $2y - 6x - 11 = 0$ suuntaiset.



Tangentin kulmakerroin k :

$$2y - 6x - 11 = 0 \Leftrightarrow y = 3x + \frac{11}{2},$$

joten $k = 3$

Sivuamispiste (x_0, y_0) :

$$f'(x_0) = 3$$

$$\frac{3}{4}x_0^2 = 3$$

$$\begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x_0 = -2 \\ y_0 = -3 \end{cases}$$

Tangentin yhtälö:

$$y - 1 = 3(x - 2) \quad \vee \quad y - (-3) = 3(x - (-2))$$

$$y = 3x - 5 \quad \vee \quad y = 3x + 3$$

Käyrän ulkopuolisesta pisteestä piirretyn tangentin yhtälö

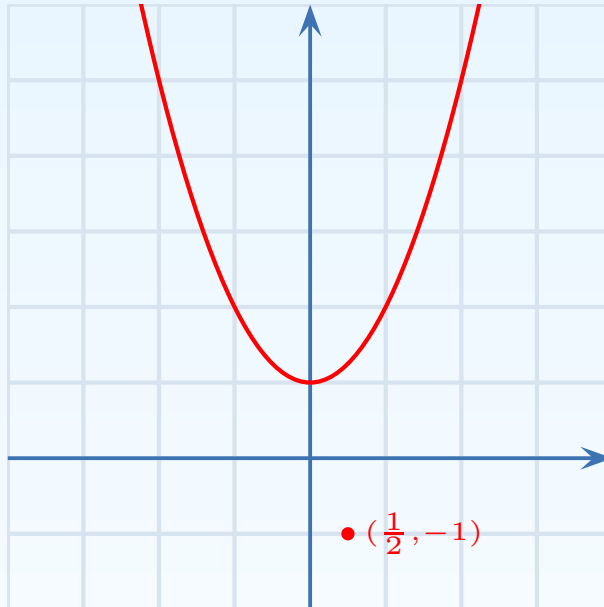
- Tangentin yhtälö, kun sivuamispiste tunnetaan
- Tangentin yhtälö, kun kulmakerroin tunnetaan
- Käyrän ulkopuolisesta pisteestä piirretyn tangentin yhtälö
- Paraabelin huippu

Esimerkki. Määritä käyrän $y = x^2 + 1$ ne tangentit, jotka kulkevat pisteen $(\frac{1}{2}, -1)$ kautta.

Käyrän ulkopuolisesta pisteestä piirretyn tangentin yhtälö

- Tangentin yhtälö, kun sivuamispiste tunnetaan
- Tangentin yhtälö, kun kulmakerroin tunnetaan
- Käyrän ulkopuolisesta pisteestä piirretyn tangentin yhtälö
- Paraabelin huippu

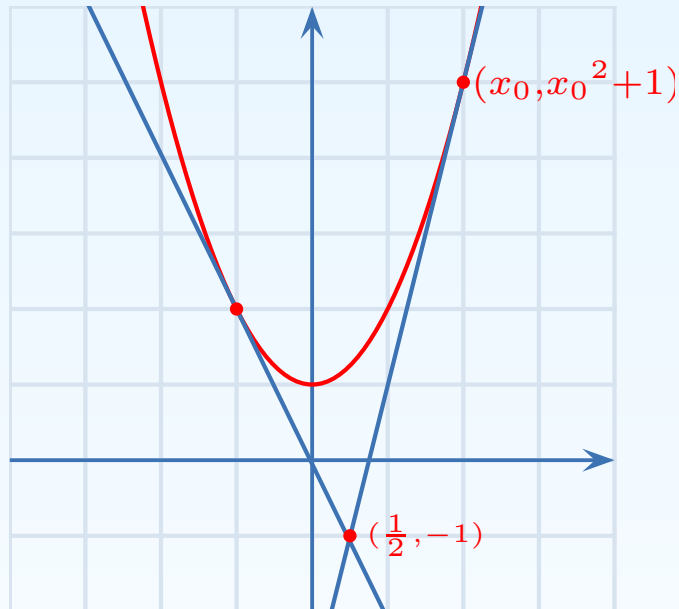
Esimerkki. Määritä käyrän $y = x^2 + 1$ ne tangentit, jotka kulkevat pisteen $(\frac{1}{2}, -1)$ kautta.



Käyrän ulkopuolisesta pisteestä piirretyn tangentin yhtälö

- Tangentin yhtälö, kun sivuamispiste tunnetaan
- Tangentin yhtälö, kun kulmakerroin tunnetaan
- Käyrän ulkopuolisesta pisteestä piirretyn tangentin yhtälö
- Paraabelin huippu

Esimerkki. Määritä käyrän $y = x^2 + 1$ ne tangentit, jotka kulkevat pisteen $(\frac{1}{2}, -1)$ kautta.

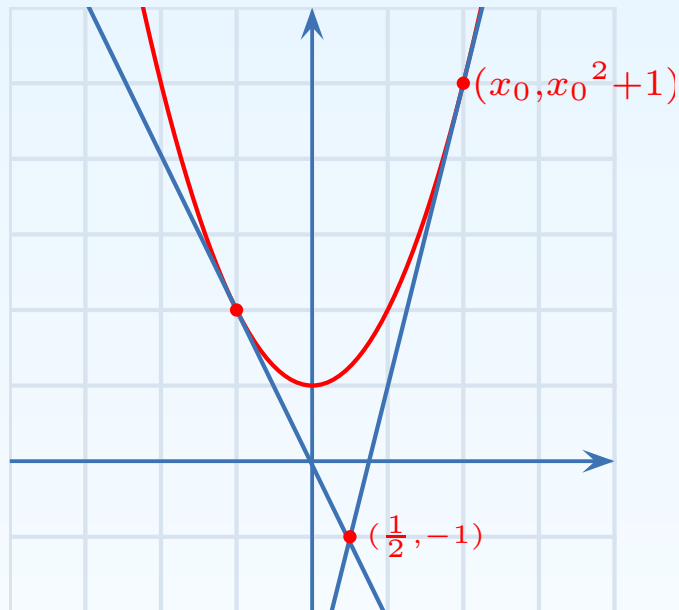


Sivuamispiste $(x_0, x_0^2 + 1)$:

Käyrän ulkopuolisesta pisteestä piirretyn tangentin yhtälö

- Tangentin yhtälö, kun sivuamispiste tunnetaan
- Tangentin yhtälö, kun kulmakerroin tunnetaan
- Käyrän ulkopuolisesta pisteestä piirretyn tangentin yhtälö
- Paraabelin huippu

Esimerkki. Määritä käyrän $y = x^2 + 1$ ne tangentit, jotka kulkevat pisteen $(\frac{1}{2}, -1)$ kautta.



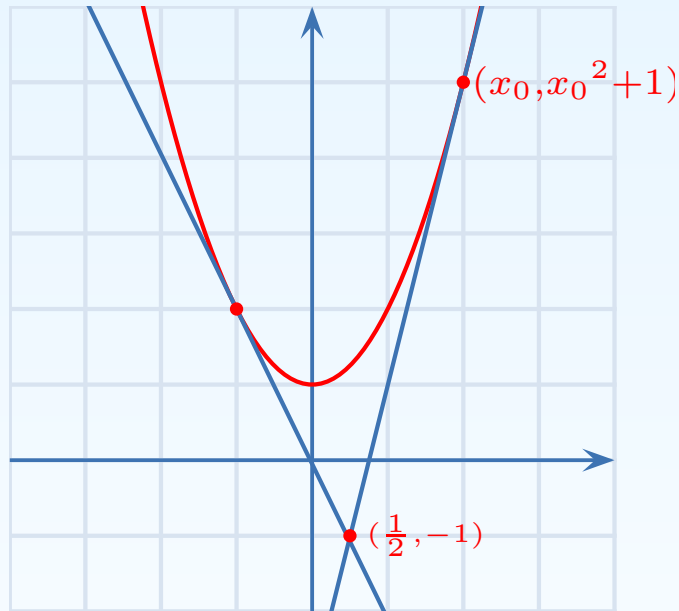
Sivuamispiste $(x_0, x_0^2 + 1)$:
Tangentin $k = f'(x_0) = 2x_0$

Toisaalta $k =$

Käyrän ulkopuolisesta pisteestä piirretyn tangentin yhtälö

- Tangentin yhtälö, kun sivuamispiste tunnetaan
- Tangentin yhtälö, kun kulmakerroin tunnetaan
- Käyrän ulkopuolisesta pisteestä piirretyn tangentin yhtälö
- Paraabelin huippu

Esimerkki. Määritä käyrän $y = x^2 + 1$ ne tangentit, jotka kulkevat pisteen $(\frac{1}{2}, -1)$ kautta.



Sivuamispiste $(x_0, x_0^2 + 1)$:

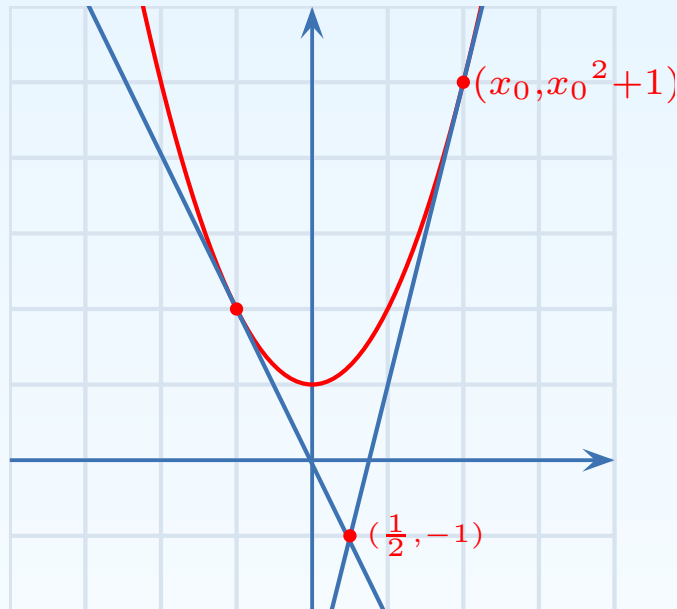
$$\text{Tangentin } k = f'(x_0) = 2x_0$$

$$\text{Toisaalta } k = \frac{x_0^2 + 1 - (-1)}{x_0 - \frac{1}{2}}$$

Käyrän ulkopuolisesta pisteestä piirretyn tangentin yhtälö

- Tangentin yhtälö, kun sivuamispiste tunnetaan
- Tangentin yhtälö, kun kulmakerroin tunnetaan
- Käyrän ulkopuolisesta pisteestä piirretyn tangentin yhtälö
- Paraabelin huippu

Esimerkki. Määritä käyrän $y = x^2 + 1$ ne tangentit, jotka kulkevat pisteen $(\frac{1}{2}, -1)$ kautta.



Sivuamispiste $(x_0, x_0^2 + 1)$:

Tangentin $k = f'(x_0) = 2x_0$

Toisaalta $k = \frac{x_0^2 + 1 - (-1)}{x_0 - \frac{1}{2}}$

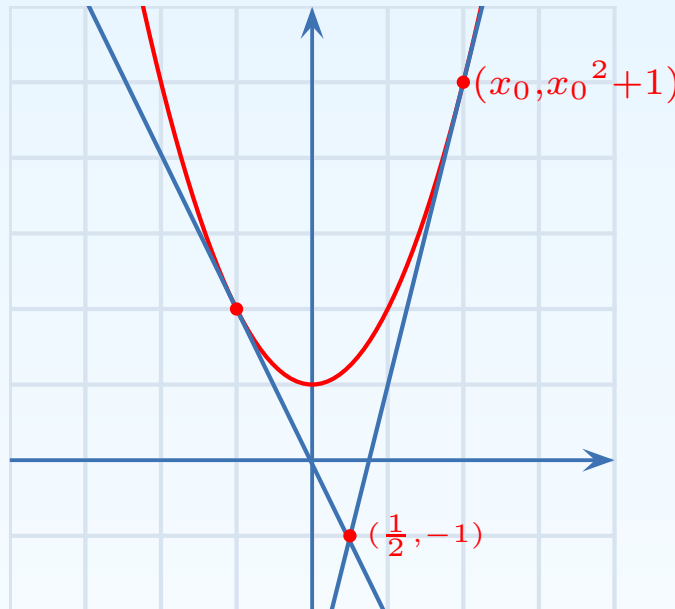
Täten $\frac{x_0^2 + 1 - (-1)}{x_0 - \frac{1}{2}} = 2x_0,$

josta

Käyrän ulkopuolisesta pisteestä piirretyn tangentin yhtälö

- Tangentin yhtälö, kun sivuamispiste tunnetaan
- Tangentin yhtälö, kun kulmakerroin tunnetaan
- Käyrän ulkopuolisesta pisteestä piirretyn tangentin yhtälö
- Paraabelin huippu

Esimerkki. Määritä käyrän $y = x^2 + 1$ ne tangentit, jotka kulkevat pisteen $(\frac{1}{2}, -1)$ kautta.



Sivuamispiste $(x_0, x_0^2 + 1)$:

$$\text{Tangentin } k = f'(x_0) = 2x_0$$

$$\text{Toisaalta } k = \frac{x_0^2 + 1 - (-1)}{x_0 - \frac{1}{2}}$$

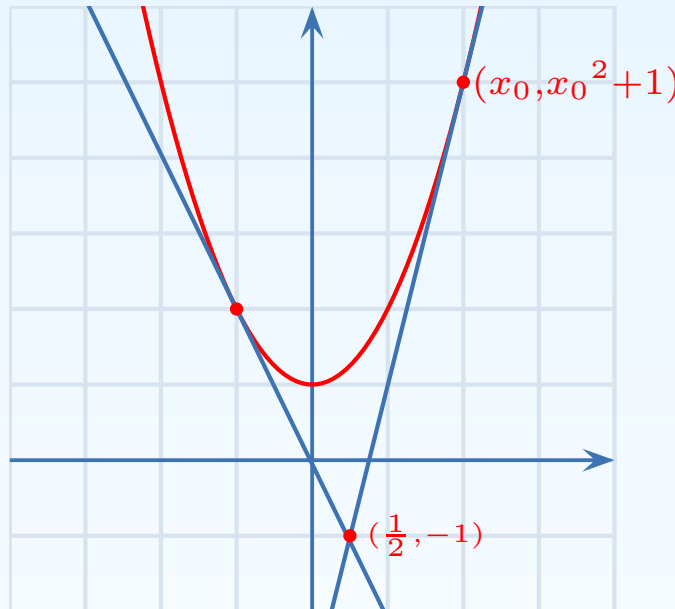
$$\text{Täten } \frac{x_0^2 + 1 - (-1)}{x_0 - \frac{1}{2}} = 2x_0,$$

$$\text{josta } x_0 = 2 \vee x_0 = -1$$

Käyrän ulkopuolisesta pisteestä piirretyn tangentin yhtälö

- Tangentin yhtälö, kun sivuamispiste tunnetaan
- Tangentin yhtälö, kun kulmakerroin tunnetaan
- Käyrän ulkopuolisesta pisteestä piirretyn tangentin yhtälö
- Paraabelin huippu

Esimerkki. Määritä käyrän $y = x^2 + 1$ ne tangentit, jotka kulkevat pisteen $(\frac{1}{2}, -1)$ kautta.



Sivuamispiste $(x_0, x_0^2 + 1)$:

Tangentin $k = f'(x_0) = 2x_0$

Toisaalta $k = \frac{x_0^2 + 1 - (-1)}{x_0 - \frac{1}{2}}$

Täten $\frac{x_0^2 + 1 - (-1)}{x_0 - \frac{1}{2}} = 2x_0,$

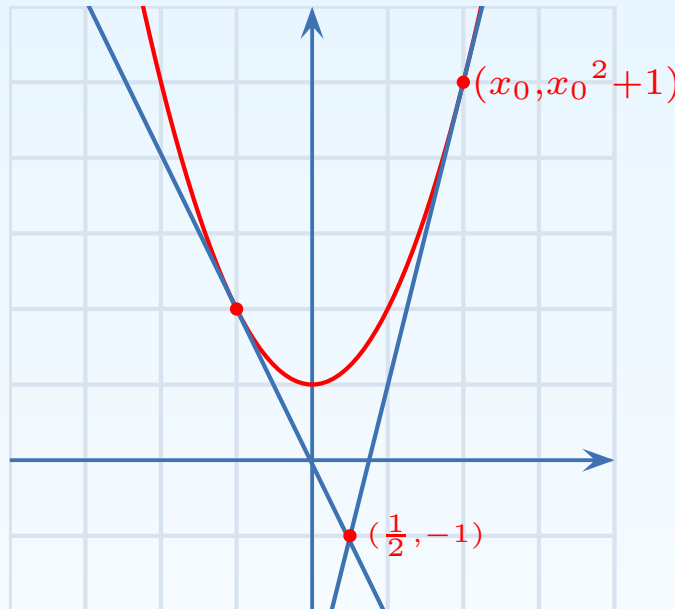
josta $x_0 = 2 \vee x_0 = -1$

Kulmakerroin: $k = 4 \vee k = -2$

Käyrän ulkopuolisesta pisteestä piirretyn tangentin yhtälö

- Tangentin yhtälö, kun sivuamispiste tunnetaan
- Tangentin yhtälö, kun kulmakerroin tunnetaan
- Käyrän ulkopuolisesta pisteestä piirretyn tangentin yhtälö
- Paraabelin huippu

Esimerkki. Määritä käyrän $y = x^2 + 1$ ne tangentit, jotka kulkevat pisteen $(\frac{1}{2}, -1)$ kautta.



Sivuamispiste $(x_0, x_0^2 + 1)$:

$$\text{Tangentin } k = f'(x_0) = 2x_0$$

$$\text{Toisaalta } k = \frac{x_0^2 + 1 - (-1)}{x_0 - \frac{1}{2}}$$

$$\text{Täten } \frac{x_0^2 + 1 - (-1)}{x_0 - \frac{1}{2}} = 2x_0,$$

$$\text{josta } x_0 = 2 \vee x_0 = -1$$

$$\text{Kulmakerroin: } k = 4 \vee k = -2$$

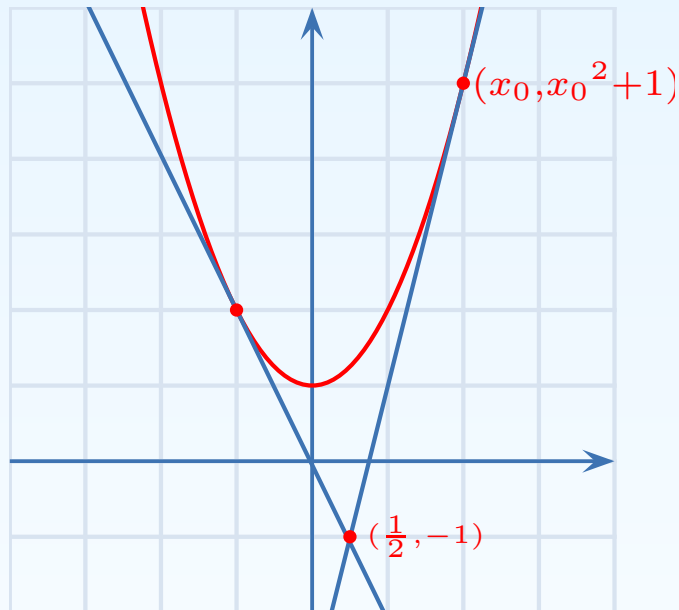
Tangentin yhtälö:

$$y - (-1) = 4(x - \frac{1}{2}) \quad \vee \quad y - (-1) = -2(x - \frac{1}{2})$$

Käyrän ulkopuolisesta pisteestä piirretyn tangentin yhtälö

- Tangentin yhtälö, kun sivuamispiste tunnetaan
- Tangentin yhtälö, kun kulmakerroin tunnetaan
- Käyrän ulkopuolisesta pisteestä piirretyn tangentin yhtälö
- Paraabelin huippu

Esimerkki. Määritä käyrän $y = x^2 + 1$ ne tangentit, jotka kulkevat pisteen $(\frac{1}{2}, -1)$ kautta.



Sivuamispiste $(x_0, x_0^2 + 1)$:

$$\text{Tangentin } k = f'(x_0) = 2x_0$$

$$\text{Toisaalta } k = \frac{x_0^2 + 1 - (-1)}{x_0 - \frac{1}{2}}$$

$$\text{Täten } \frac{x_0^2 + 1 - (-1)}{x_0 - \frac{1}{2}} = 2x_0,$$

$$\text{josta } x_0 = 2 \vee x_0 = -1$$

$$\text{Kulmakerroin: } k = 4 \vee k = -2$$

Tangentin yhtälö:

$$y - (-1) = 4(x - \frac{1}{2}) \quad \vee \quad y - (-1) = -2(x - \frac{1}{2})$$
$$y = 4x - 3 \quad \vee \quad y = -2x$$

Paraabelin huippu

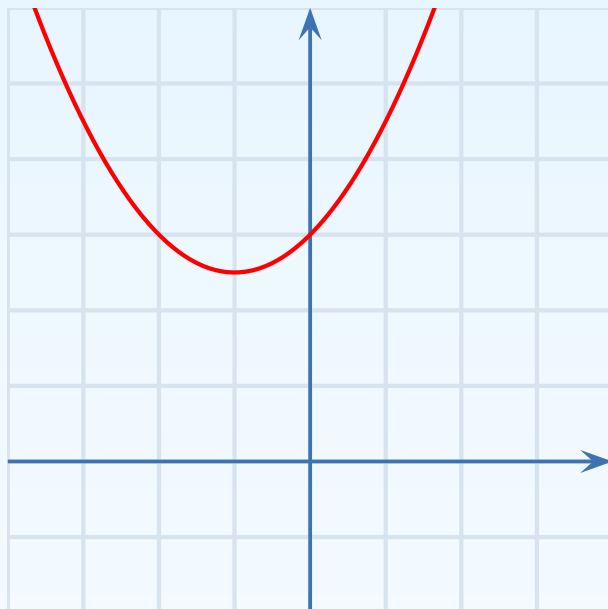
- Tangentin yhtälö, kun sivuamispiste tunnetaan
- Tangentin yhtälö, kun kulmakerroin tunnetaan
- Käyrän ulkopuolisesta pisteestä piirretyn tangentin yhtälö
- **Paraabelin huippu**

Esimerkki. Määritä paraabelin $y = \frac{1}{2}x^2 + x + 3$ huippu.

Paraabelin huippu

- Tangentin yhtälö, kun sivuamispiste tunnetaan
- Tangentin yhtälö, kun kulmakerroin tunnetaan
- Käyrän ulkopuolisesta pisteestä piirretyn tangentin yhtälö
- **Paraabelin huippu**

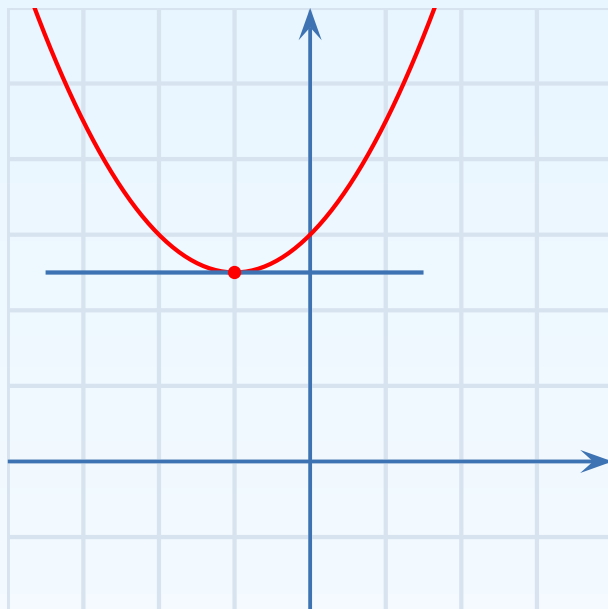
Esimerkki. Määritä paraabelin $y = \frac{1}{2}x^2 + x + 3$ huippu.



Paraabelin huippu

- Tangentin yhtälö, kun sivuamispiste tunnetaan
- Tangentin yhtälö, kun kulmakerroin tunnetaan
- Käyrän ulkopuolisesta pisteestä piirretyn tangentin yhtälö
- Paraabelin huippu

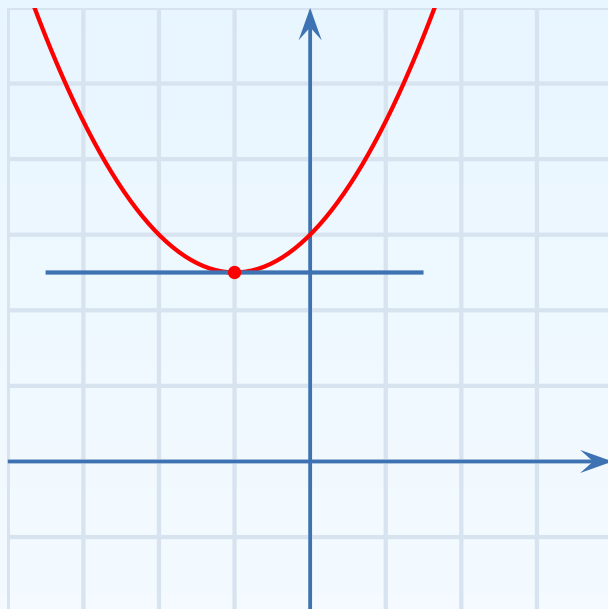
Esimerkki. Määritä paraabelin $y = \frac{1}{2}x^2 + x + 3$ huippu.



Paraabelin huippu

- Tangentin yhtälö, kun sivuamispiste tunnetaan
- Tangentin yhtälö, kun kulmakerroin tunnetaan
- Käyrän ulkopuolisesta pisteestä piirretyn tangentin yhtälö
- Paraabelin huippu

Esimerkki. Määritä paraabelin $y = \frac{1}{2}x^2 + x + 3$ huippu.

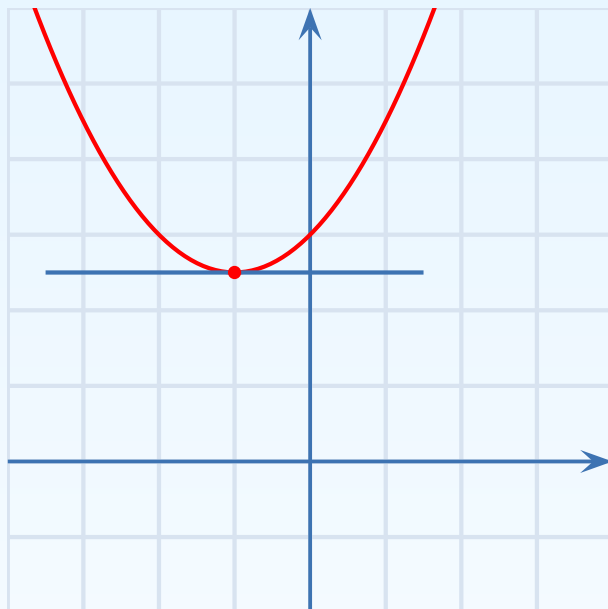


$$k = f'(x) = 0$$

Paraabelin huippu

- Tangentin yhtälö, kun sivuamispiste tunnetaan
- Tangentin yhtälö, kun kulmakerroin tunnetaan
- Käyrän ulkopuolisesta pisteestä piirretyn tangentin yhtälö
- **Paraabelin huippu**

Esimerkki. Määritä paraabelin $y = \frac{1}{2}x^2 + x + 3$ huippu.



$$k = f'(x) = 0$$

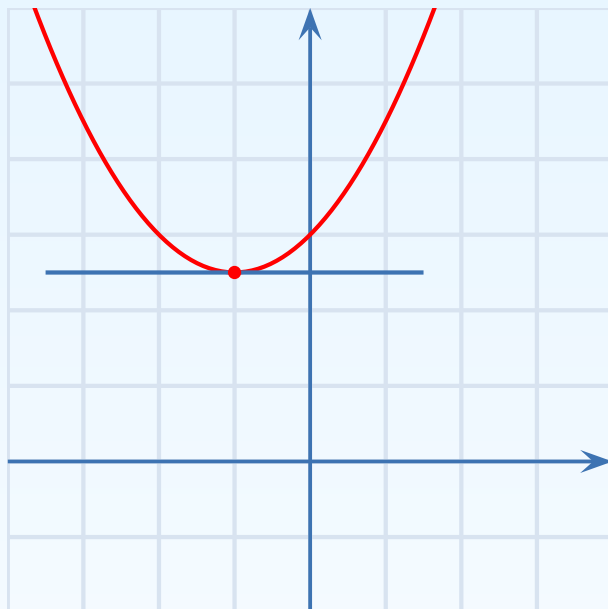
$$f'(x) = x + 1 = 0$$

$$x = -1$$

Paraabelin huippu

- Tangentin yhtälö, kun sivuamispiste tunnetaan
- Tangentin yhtälö, kun kulmakerroin tunnetaan
- Käyrän ulkopuolisesta pisteestä piirretyn tangentin yhtälö
- **Paraabelin huippu**

Esimerkki. Määritä paraabelin $y = \frac{1}{2}x^2 + x + 3$ huippu.



$$k = f'(x) = 0$$

$$f'(x) = x + 1 = 0$$

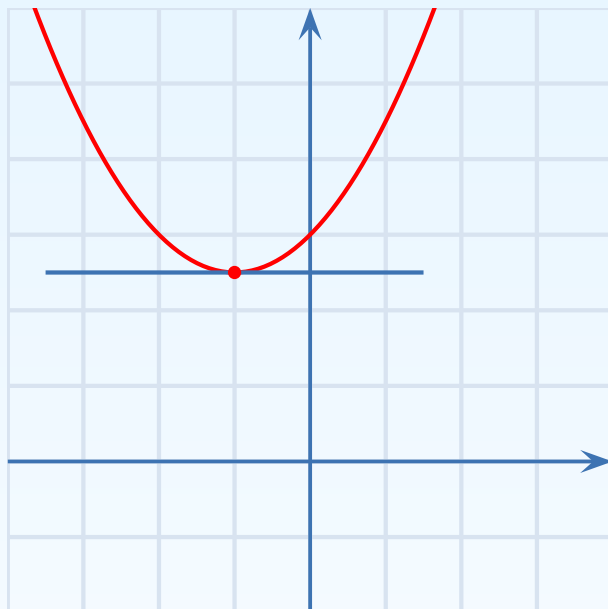
$$x = -1$$

$$y = \frac{1}{2}(-1)^2 + (-1) + 3 = 2\frac{1}{2}$$

Paraabelin huippu

- Tangentin yhtälö, kun sivuamispiste tunnetaan
- Tangentin yhtälö, kun kulmakerroin tunnetaan
- Käyrän ulkopuolisesta pisteestä piirretyn tangentin yhtälö
- **Paraabelin huippu**

Esimerkki. Määritä paraabelin $y = \frac{1}{2}x^2 + x + 3$ huippu.



$$k = f'(x) = 0$$

$$f'(x) = x + 1 = 0$$

$$x = -1$$

$$y = \frac{1}{2}(-1)^2 + (-1) + 3 = 2\frac{1}{2}$$

Huippu on $(-1, 2\frac{1}{2})$.