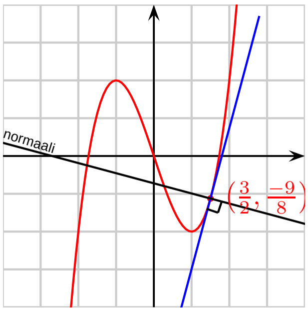
Käyrän tangentti ja normaali

Hannu Lehto
Lahden Lyseon lukio

Tangentin yhtälö, kun sivuamispiste tunnetaan 2
Tangentin yhtälö, kun kulmakerroin tunnetaan 3
Käyrän ulkopuolisesta pisteestä piirretyn tangentin yhtälö 4
Paraabelin huippu 5

Tangentin yhtälö, kun sivuamispiste tunnetaan

Esimerkki. Määritä käyrälle $y = x^3 - 3x$ kohtaan $x = 1\frac{1}{2}$ piirretyn *tangentin* ja *normaalin* yhtälöt.



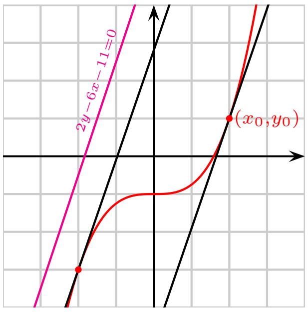
Sivuamispiste:
$x = 1\frac{1}{2}$, $y = \left(\frac{3}{2}\right)^3 - 3 \cdot \frac{3}{2} = -\frac{9}{8}$
Derivaatta $f'(x) = 3x^2 - 3$
Tangentin kulmakerroin:
$k = f'\left(\frac{3}{2}\right) = 3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3 = \frac{15}{4}$
Suoran yhtälö: $y - y_0 = k(x - x_0)$
Tangentin yhtälö:
$y - \left(\frac{-9}{8}\right) = \frac{15}{4}\left(x - \frac{3}{2}\right)$
$y = \frac{15}{4}x - \frac{27}{4}$
$\underline{15x - 4y - 27 = 0}$

Normaalin kulmakerroin on $\frac{-4}{15}$ (kohtisuoruusehto $k_1 k_2 = -1$)
Normaalin yhtälö on $y - \left(\frac{-9}{8}\right) = \frac{-4}{15}\left(x - \frac{3}{2}\right)$
$y = \frac{-4}{15}x - \frac{87}{120}$

2 / 5

Tangentin yhtälö, kun kulmakerroin tunnetaan

Esimerkki. Määritä käyrän $y = \frac{1}{4}x^3 - 1$ ne tangentit, jotka ovat suoran $2y - 6x - 11 = 0$ suuntaiset.



Tangentin kulmakerroin k:
$2y - 6x - 11 = 0 \Leftrightarrow y = 3x + \frac{11}{2}$, joten $k = 3$

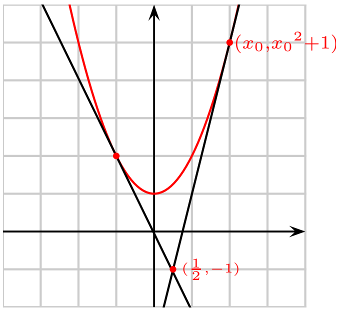
Sivuamispiste (x_0, y_0):
$f'(x_0) = 3$
$\frac{3}{4}{x_0}^2 = 3$
$\begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x_0 = -2 \\ y_0 = -3 \end{cases}$

Tangentin yhtälö:
$y - 1 = 3(x - 2) \quad \vee \quad y - (-3) = 3(x - (-2))$
$y = 3x - 5 \quad \vee \quad y = 3x + 3$

3 / 5

Käyrän ulkopuolisesta pisteestä piirretyn tangentin yhtälö

Esimerkki. Määritä käyrän $y = x^2 + 1$ ne tangentit, jotka kulkevat pisteen $(\frac{1}{2}, -1)$ kautta.



Sivuamispiste $(x_0, x_0{}^2 + 1)$:
Tangentin $k = f'(x_0) = 2x_0$
Toisaalta $k = \dfrac{x_0{}^2 + 1 - (-1)}{x_0 - \frac{1}{2}}$

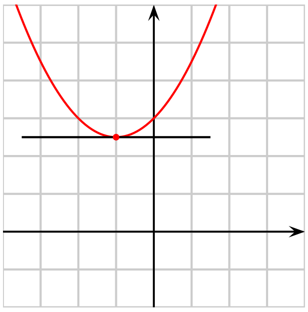
Täten $\dfrac{x_0{}^2 + 1 - (-1)}{x_0 - \frac{1}{2}} = 2x_0$,
josta $x_0 = 2 \ \vee \ x_0 = -1$
Kulmakerroin: $k = 4 \ \vee \ k = -2$

Tangentin yhtälö:
$$y - (-1) = 4(x - \tfrac{1}{2}) \quad \vee \quad y - (-1) = -2(x - \tfrac{1}{2})$$
$$y = 4x - 3 \quad \vee \quad y = -2x$$

4 / 5

Paraabelin huippu

Esimerkki. Määritä paraabelin $y = \frac{1}{2}x^2 + x + 3$ huippu.



$k = f'(x) = 0$
$f'(x) = x + 1 = 0$
$x = -1$
$y = \frac{1}{2}(-1)^2 + (-1) + 3 = 2\frac{1}{2}$

Huippu on $(-1, 2\frac{1}{2})$.

5 / 5