

Rationaaliyhtälöt ja -epäyhtälöt

Hannu Lehto
Lahden Lyseon lukio



Raationaaliyhtälöt

- Raationaaliyhtälöt
- Raationaaliepäyhtälöt

Ratkaisuperiaate:

Raationaaliyhtälöt

- Raationaaliyhtälöt
- Raationaaliepäyhtälöt

Ratkaisuperiaate:

1. Päättele määrittelyehto.

Raationaaliyhtälöt

- Raationaaliyhtälöt
- Raationaaliepäyhtälöt

Ratkaisuperiaate:

1. Päätele määrittelyehto.
2. Poista nimittäjät kertomalla yhtälö puolittain.

Raationaaliyhtälöt

- Raationaaliyhtälöt
- Raationaaliepäyhtälöt

Ratkaisuperiaate:

1. Päätele määrittelyehto.
2. Poista nimittäjät kertomalla yhtälö puolittain.
3. Ratkaise saatu polynomimuotoinen yhtälö.

Raationaaliyhtälöt

- Raationaaliyhtälöt
- Raationaaliepäyhtälöt

Ratkaisuperiaate:

1. Päätele määrittelyehto.
2. Poista nimittäjät kertomalla yhtälö puolittain.
3. Ratkaise saatu polynomimuotoinen yhtälö.
4. Kirjoita vastaus, huomioi määrittelyehto.

Raationaaliyhtälöt

- Raationaaliyhtälöt
- Raationaaliepäyhtälöt

Ratkaisuperiaate:

1. Päättele määrittelyehto.
2. Poista nimittäjät kertomalla yhtälö puolittain.
3. Ratkaise saatu polynomimuotoinen yhtälö.
4. Kirjoita vastaus, huomioi määrittelyehto.

Esimerkki. Ratkaise yhtälö

$$\frac{2}{x-1} - \frac{2}{x} = 1.$$

Raationaaliyhtälöt

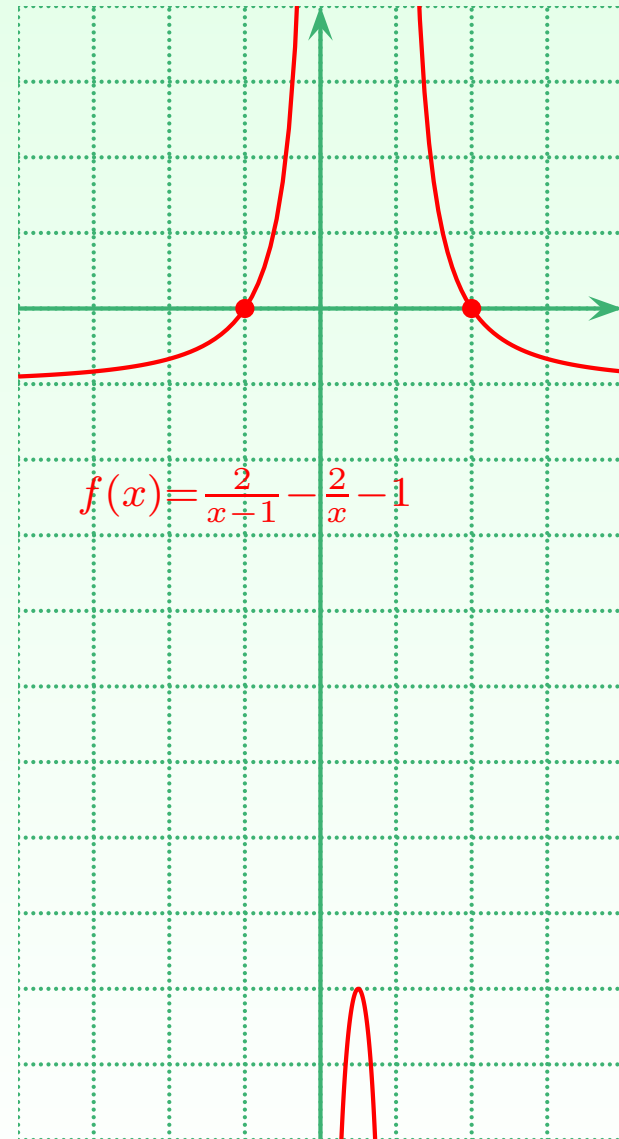
- Raationaaliyhtälöt
- Raationaaliepäyhtälöt

Ratkaisuperiaate:

1. Päätele määrittelyehto.
2. Poista nimittäjät kertomalla yhtälö puolittain.
3. Ratkaise saatu polynomimuotoinen yhtälö.
4. Kirjoita vastaus, huomioi määrittelyehto.

Esimerkki. Ratkaise yhtälö

$$\frac{2}{x-1} - \frac{2}{x} = 1.$$



Raationaaliepäyhtälöt

- Raationaaliyhtälöt
- Raationaaliepäyhtälöt

Ratkaisuperiaate:

Raationaaliepäyhtälöt

- Raationaaliyhtälöt
- Raationaaliepäyhtälöt

Ratkaisuperiaate:

1. Muuta epäyhtälö muotoon $\frac{p(x)}{q(x)} < 0$ (merkin $<$ sijasta voi olla $>$, \leq tai \geq).

Raationaaliepäyhtälöt

- Raationaaliyhtälöt
- Raationaaliepäyhtälöt

Ratkaisuperiaate:

1. Muuta epäyhtälö muotoon $\frac{p(x)}{q(x)} < 0$ (merkin $<$ sijasta voi olla $>$, \leq tai \geq).
2. Ratkaise osoittajan $p(x)$ nollakohdat.

Raationaaliepäyhtälöt

- Raationaaliyhtälöt
- Raationaaliepäyhtälöt

Ratkaisuperiaate:

1. Muuta epäyhtälö muotoon $\frac{p(x)}{q(x)} < 0$ (merkin $<$ sijasta voi olla $>$, \leq tai \geq).
2. Ratkaise osoittajan $p(x)$ nollakohdat.
3. Ratkaise nimittäjän $q(x)$ nollakohdat eli kohdat, joissa epäyhtälö ei ole määritelty.

Raationaaliepäyhtälöt

- Raationaaliyhtälöt
- Raationaaliepäyhtälöt

Ratkaisuperiaate:

1. Muuta epäyhtälö muotoon $\frac{p(x)}{q(x)} < 0$ (merkin $<$ sijasta voi olla $>$, \leq tai \geq).
2. Ratkaise osoittajan $p(x)$ nollakohdat.
3. Ratkaise nimittäjän $q(x)$ nollakohdat eli kohdat, joissa epäyhtälö ei ole määritelty.
4. Sijoita lukusuoralle osoittajan ja nimittäjän nollakohdat.

Raationaaliepäyhtälöt

- Raationaaliyhtälöt
- Raationaaliepäyhtälöt

Ratkaisuperiaate:

1. Muuta epäyhtälö muotoon $\frac{p(x)}{q(x)} < 0$ (merkin $<$ sijasta voi olla $>$, \leq tai \geq).
2. Ratkaise osoittajan $p(x)$ nollakohdat.
3. Ratkaise nimittäjän $q(x)$ nollakohdat eli kohdat, joissa epäyhtälö ei ole määritelty.
4. Sijoita lukusuoralle osoittajan ja nimittäjän nollakohdat.
5. Päättele lausekkeen $\frac{p(x)}{q(x)}$ merkki kaikilla syntyneillä väleillä.

Raationaaliepäyhtälöt

- Raationaaliyhtälöt
- Raationaaliepäyhtälöt

Ratkaisuperiaate:

1. Muuta epäyhtälö muotoon $\frac{p(x)}{q(x)} < 0$ (merkin $<$ sijasta voi olla $>$, \leq tai \geq).
2. Ratkaise osoittajan $p(x)$ nollakohdat.
3. Ratkaise nimittäjän $q(x)$ nollakohdat eli kohdat, joissa epäyhtälö ei ole määritelty.
4. Sijoita lukusuoralle osoittajan ja nimittäjän nollakohdat.
5. Päätele lausekkeen $\frac{p(x)}{q(x)}$ merkki kaikilla syntyneillä väleillä.
Tapa 1. Tarkastele osoittajan ja nimittäjän merkki erikseen, päätele niiden avulla osamäärän merkki.
Tapa 2. Päätele osamäärän merkki eri väleillä käyttäen *testiarvoja*.
6. Kirjoita vastaus.

Raationaaliepäyhtälöt

- Raationaaliyhtälöt
- Raationaaliepäyhtälöt

Esimerkki. Ratkaise epäyhtälö $\frac{5x - 3}{x + 1} \leq x$.

Raationaaliepäyhtälöt

- Raationaaliyhtälöt
- Raationaaliepäyhtälöt

Esimerkki. Ratkaise epäyhtälö $\frac{5x - 3}{x + 1} \leq x$.

$$\frac{5x - 3}{x + 1} - \overset{x+1)}{x} \leq 0$$

Raationaaliepäyhtälöt

- Raationaaliyhtälöt
- Raationaaliepäyhtälöt

Esimerkki. Ratkaise epäyhtälö $\frac{5x - 3}{x + 1} \leq x$.

$$\frac{5x - 3}{x + 1} - \overset{x+1)}{x} \leq 0$$

$$\frac{5x - 3 - x^2 - x}{x + 1} \leq 0$$

Raationaaliepäyhtälöt

- Raationaaliyhtälöt
- Raationaaliepäyhtälöt

Esimerkki. Ratkaise epäyhtälö $\frac{5x - 3}{x + 1} \leq x$.

$$\frac{5x - 3}{x + 1} - x \leq 0$$

$$\frac{5x - 3 - x^2 - x}{x + 1} \leq 0$$

$$\frac{-x^2 + 4x - 3}{x + 1} \leq 0$$

Raationaaliepäyhtälöt

- Raationaaliyhtälöt
- Raationaaliepäyhtälöt

Esimerkki. Ratkaise epäyhtälö $\frac{5x - 3}{x + 1} \leq x$.

$$\frac{5x - 3}{x + 1} - x \leq 0$$

$$\frac{5x - 3 - x^2 - x}{x + 1} \leq 0$$

$$\frac{-x^2 + 4x - 3}{x + 1} \leq 0$$

$$-x^2 + 4x - 3 = 0 \Leftrightarrow$$

Raationaaliepäyhtälöt

- Raationaaliyhtälöt
- Raationaaliepäyhtälöt

Esimerkki. Ratkaise epäyhtälö $\frac{5x - 3}{x + 1} \leq x$.

$$\frac{5x - 3}{x + 1} - {}^{x+1)} x \leq 0$$

$$\frac{5x - 3 - x^2 - x}{x + 1} \leq 0$$

$$\frac{-x^2 + 4x - 3}{x + 1} \leq 0$$

$$\begin{aligned} -x^2 + 4x - 3 = 0 &\Leftrightarrow \\ x = 3 \vee x = 1 & \end{aligned}$$

Raationaaliepäyhtälöt

- Raationaaliyhtälöt
- Raationaaliepäyhtälöt

Esimerkki. Ratkaise epäyhtälö $\frac{5x - 3}{x + 1} \leq x$.

$$\frac{5x - 3}{x + 1} - {}^{x+1)} x \leq 0$$

$$\frac{5x - 3 - x^2 - x}{x + 1} \leq 0$$

$$\frac{-x^2 + 4x - 3}{x + 1} \leq 0$$

$$-x^2 + 4x - 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 3 \vee x = 1$$

$$x + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

Raationaaliepäyhtälöt

- Raationaaliyhtälöt
- Raationaaliepäyhtälöt

Esimerkki. Ratkaise epäyhtälö $\frac{5x - 3}{x + 1} \leq x$.

$$\frac{5x - 3}{x + 1} - x \leq 0$$

$$\frac{5x - 3 - x^2 - x}{x + 1} \leq 0$$

$$\frac{-x^2 + 4x - 3}{x + 1} \leq 0$$

$$-x^2 + 4x - 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 3 \vee x = 1$$

$$x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

Raationaaliepäyhtälöt

- Raationaaliyhtälöt
- Raationaaliepäyhtälöt

Esimerkki. Ratkaise epäyhtälö $\frac{5x - 3}{x + 1} \leq x$.

$$\frac{5x - 3}{x + 1} - x \leq 0$$

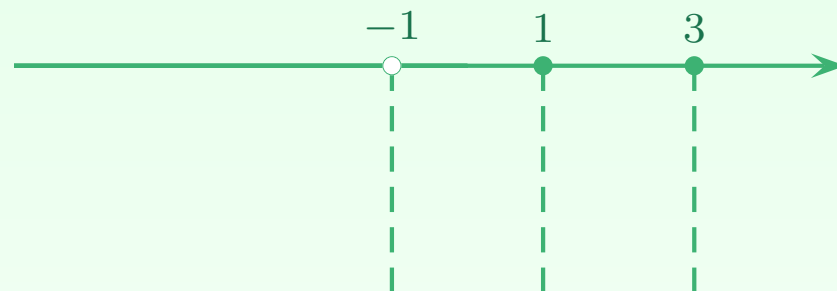
$$\frac{5x - 3 - x^2 - x}{x + 1} \leq 0$$

$$\frac{-x^2 + 4x - 3}{x + 1} \leq 0$$

$$-x^2 + 4x - 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 3 \vee x = 1$$

$$x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$$



Raationaaliepäyhtälöt

- Raationaaliyhtälöt
- Raationaaliepäyhtälöt

Esimerkki. Ratkaise epäyhtälö $\frac{5x - 3}{x + 1} \leq x$.

$$\frac{5x - 3}{x + 1} - x \leq 0$$

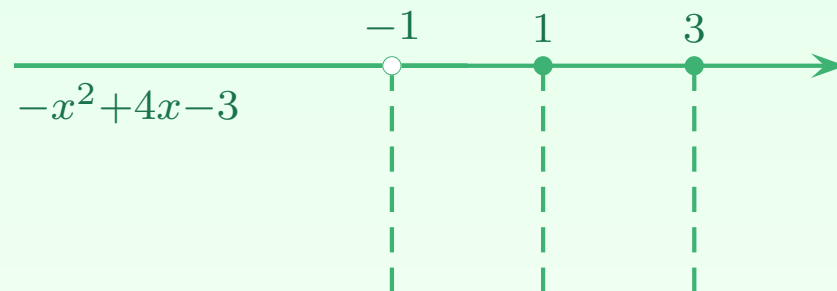
$$\frac{5x - 3 - x^2 - x}{x + 1} \leq 0$$

$$\frac{-x^2 + 4x - 3}{x + 1} \leq 0$$

$$-x^2 + 4x - 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 3 \vee x = 1$$

$$x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$$



Raationaaliepäyhtälöt

- Raationaaliyhtälöt
- Raationaaliepäyhtälöt

Esimerkki. Ratkaise epäyhtälö $\frac{5x - 3}{x + 1} \leq x$.

$$\frac{5x - 3}{x + 1} - x \leq 0$$

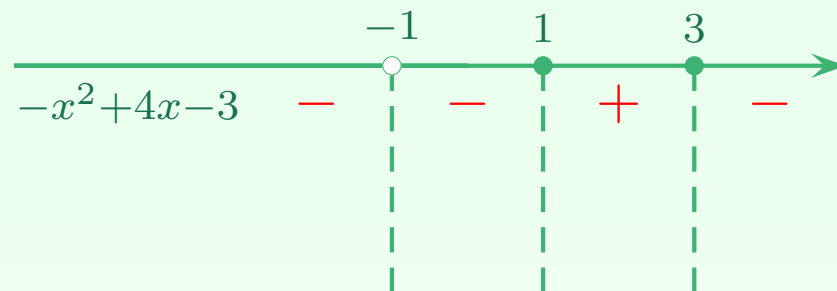
$$\frac{5x - 3 - x^2 - x}{x + 1} \leq 0$$

$$\frac{-x^2 + 4x - 3}{x + 1} \leq 0$$

$$-x^2 + 4x - 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 3 \vee x = 1$$

$$x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$$



Raationaaliepäyhtälöt

- Raationaaliyhtälöt
- Raationaaliepäyhtälöt

Esimerkki. Ratkaise epäyhtälö $\frac{5x - 3}{x + 1} \leq x$.

$$\frac{5x - 3}{x + 1} - x \leq 0$$

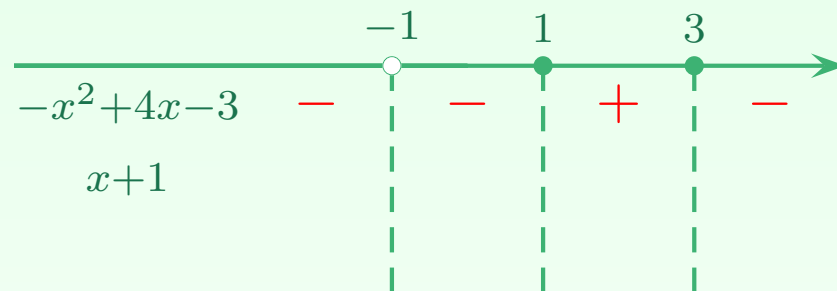
$$\frac{5x - 3 - x^2 - x}{x + 1} \leq 0$$

$$\frac{-x^2 + 4x - 3}{x + 1} \leq 0$$

$$-x^2 + 4x - 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 3 \vee x = 1$$

$$x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$$



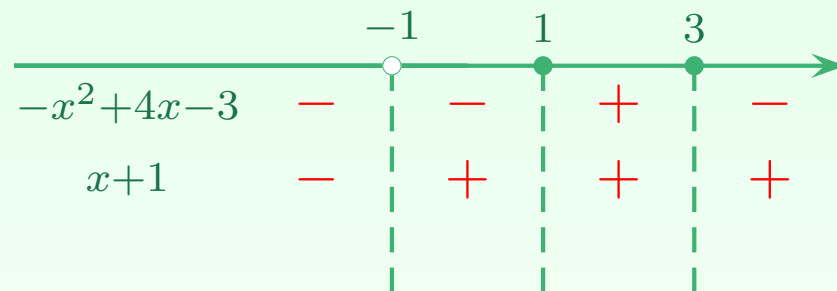
Raationaaliepäyhtälöt

- Raationaaliyhtälöt
- Raationaaliepäyhtälöt

Esimerkki. Ratkaise epäyhtälö $\frac{5x - 3}{x + 1} \leq x$.

$$\begin{aligned}\frac{5x - 3}{x + 1} - x &\leq 0 \\ \frac{5x - 3 - x^2 - x}{x + 1} &\leq 0 \\ \frac{-x^2 + 4x - 3}{x + 1} &\leq 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-x^2 + 4x - 3 = 0 &\Leftrightarrow \\ x = 3 \vee x = 1 & \\ x + 1 = 0 &\Leftrightarrow x = -1\end{aligned}$$



Raationaaliepäyhtälöt

- Raationaaliyhtälöt
- Raationaaliepäyhtälöt

Esimerkki. Ratkaise epäyhtälö $\frac{5x - 3}{x + 1} \leq x$.

$$\frac{5x - 3}{x + 1} - x \leq 0$$

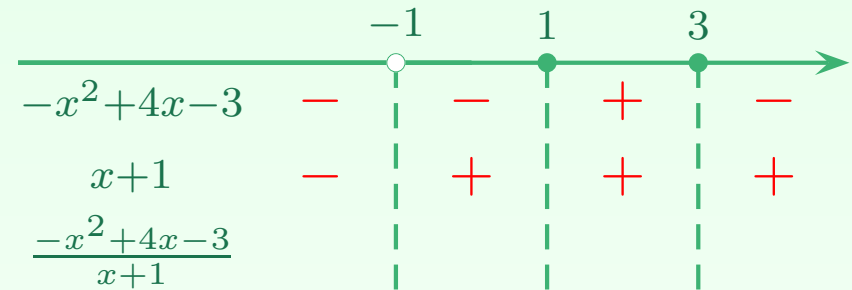
$$\frac{5x - 3 - x^2 - x}{x + 1} \leq 0$$

$$\frac{-x^2 + 4x - 3}{x + 1} \leq 0$$

$$-x^2 + 4x - 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 3 \vee x = 1$$

$$x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$$



Raationaaliepäyhtälöt

- Raationaaliyhtälöt
- Raationaaliepäyhtälöt

Esimerkki. Ratkaise epäyhtälö $\frac{5x - 3}{x + 1} \leq x$.

$$\frac{5x - 3}{x + 1} - x \leq 0$$

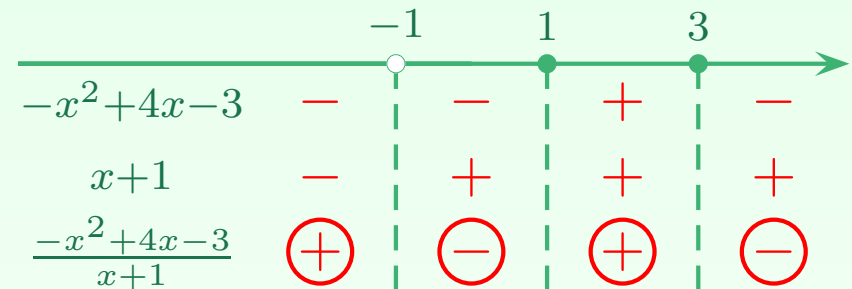
$$\frac{5x - 3 - x^2 - x}{x + 1} \leq 0$$

$$\frac{-x^2 + 4x - 3}{x + 1} \leq 0$$

$$-x^2 + 4x - 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 3 \vee x = 1$$

$$x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$$



Raationaaliepäyhtälöt

- Raationaaliyhtälöt
- Raationaaliepäyhtälöt

Esimerkki. Ratkaise epäyhtälö $\frac{5x - 3}{x + 1} \leq x$.

$$\frac{5x - 3}{x + 1} - x \leq 0$$

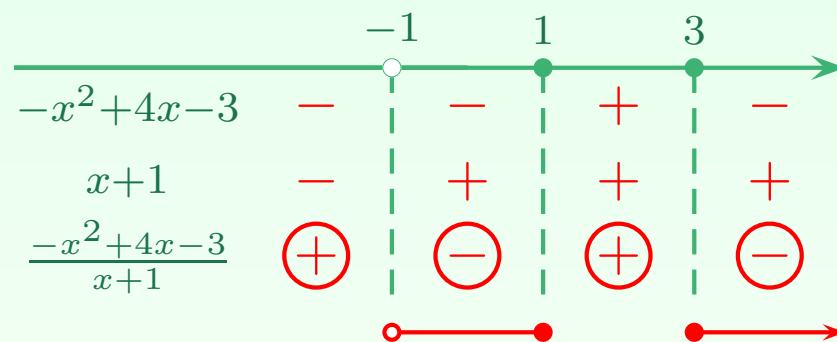
$$\frac{5x - 3 - x^2 - x}{x + 1} \leq 0$$

$$\frac{-x^2 + 4x - 3}{x + 1} \leq 0$$

$$-x^2 + 4x - 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 3 \vee x = 1$$

$$x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$$



Raationaaliepäyhtälöt

- Raationaaliyhtälöt
- Raationaaliepäyhtälöt

Esimerkki. Ratkaise epäyhtälö $\frac{5x - 3}{x + 1} \leq x$.

$$\frac{5x - 3}{x + 1} - x \leq 0$$

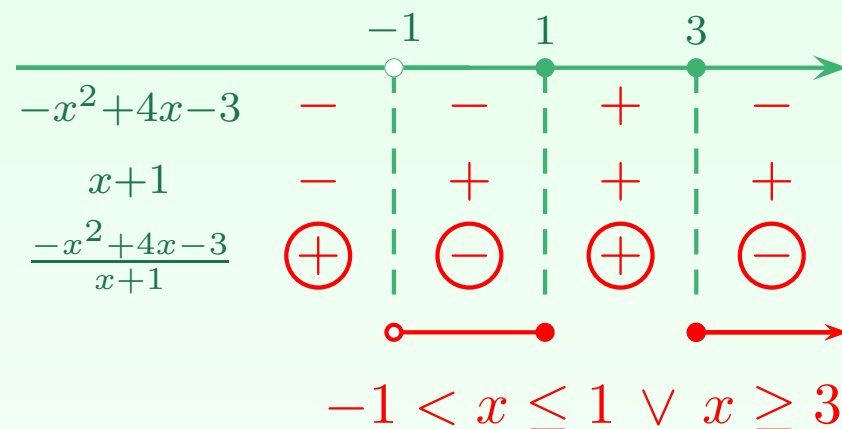
$$\frac{5x - 3 - x^2 - x}{x + 1} \leq 0$$

$$\frac{-x^2 + 4x - 3}{x + 1} \leq 0$$

$$-x^2 + 4x - 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 3 \vee x = 1$$

$$x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$$



Raationaaliepäyhtälöt

- Raationaaliyhtälöt
- Raationaaliepäyhtälöt

Esimerkki. Ratkaise epäyhtälö $\frac{5x - 3}{x + 1} \leq x$.

$$\frac{5x - 3}{x + 1} - x \leq 0$$

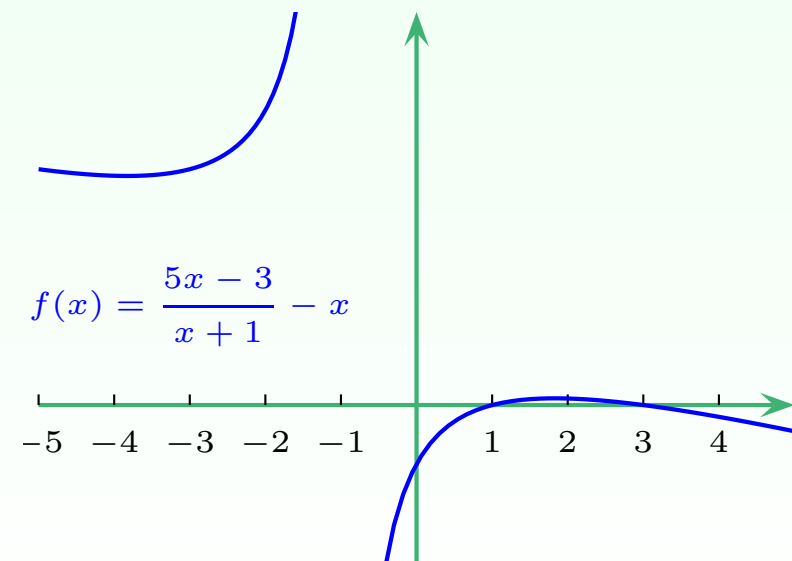
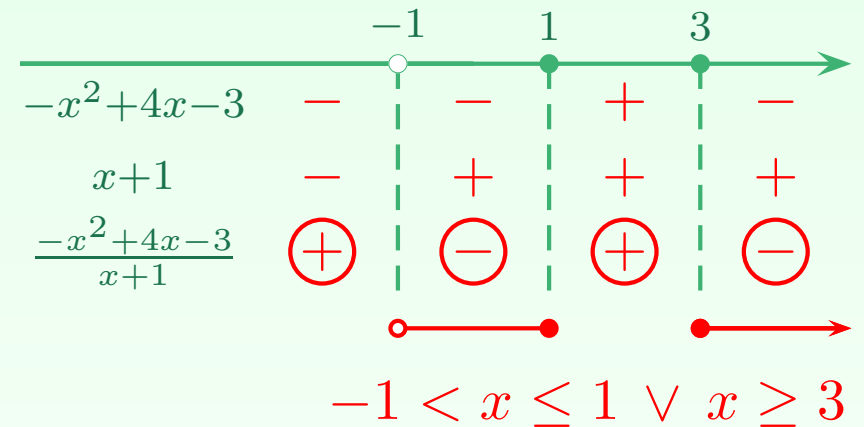
$$\frac{5x - 3 - x^2 - x}{x + 1} \leq 0$$

$$\frac{-x^2 + 4x - 3}{x + 1} \leq 0$$

$$-x^2 + 4x - 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 3 \vee x = 1$$

$$x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$$



Raationaaliepäyhtälöt

- Raationaaliyhtälöt
- Raationaaliepäyhtälöt

Esimerkki. Ratkaise epäyhtälö $\frac{5x - 3}{x + 1} \leq x$.

$$\frac{5x - 3}{x + 1} - x \leq 0$$

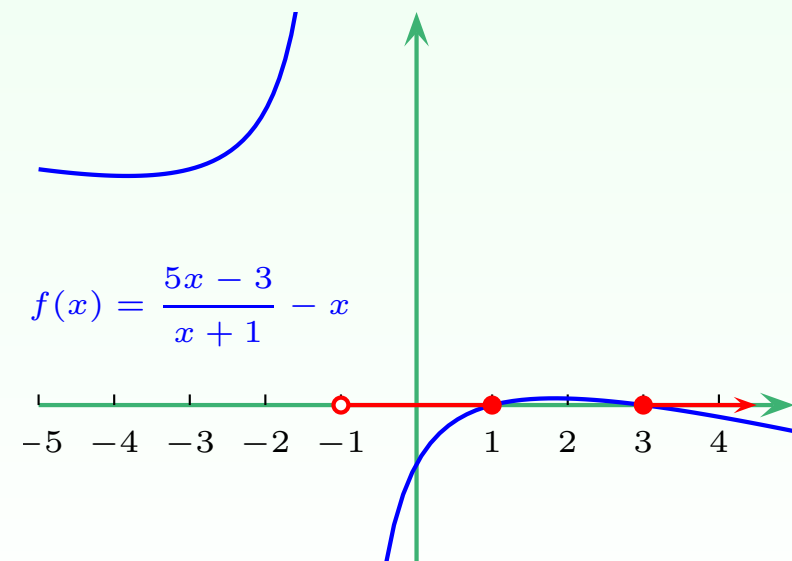
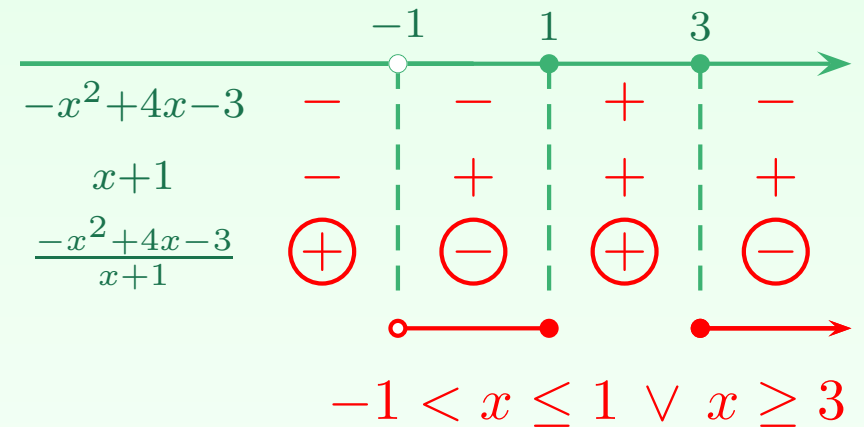
$$\frac{5x - 3 - x^2 - x}{x + 1} \leq 0$$

$$\frac{-x^2 + 4x - 3}{x + 1} \leq 0$$

$$-x^2 + 4x - 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 3 \vee x = 1$$

$$x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$$



Rationaaliepäyhtälöt

- Raationaaliyhtälöt
- Raationaaliepäyhtälöt

Esimerkki. Ratkaise epäyhtälö $\frac{1}{x} \geq x$

Rationaaliepäyhtälöt

- Raationaaliyhtälöt
- Raationaaliepäyhtälöt

Esimerkki. Ratkaise epäyhtälö $\frac{1}{x} \geq x$

$$\frac{1}{x} - x \geq 0$$

Rationaaliepäyhtälöt

- Raationaaliyhtälöt
- Raationaaliepäyhtälöt

Esimerkki. Ratkaise epäyhtälö $\frac{1}{x} \geq x$

$$\frac{1}{x} - x \geq 0$$

$$\underbrace{\frac{1 - x^2}{x}}_{f(x)} \geq 0$$

Rationaaliepäyhtälöt

- Raationaaliyhtälöt
- Raationaaliepäyhtälöt

Esimerkki. Ratkaise epäyhtälö $\frac{1}{x} \geq x$

$$\frac{1}{x} - x \geq 0$$

$$\underbrace{\frac{1 - x^2}{x}}_{f(x)} \geq 0$$

Osoittajan nollakohdat:

$$1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

Nimittäjän nollakohta:

$$x = 0$$

Rationaaliepäyhtälöt

- Raationaaliyhtälöt
- Raationaaliepäyhtälöt

Esimerkki. Ratkaise epäyhtälö $\frac{1}{x} \geq x$

$$\frac{1}{x} - x \geq 0$$

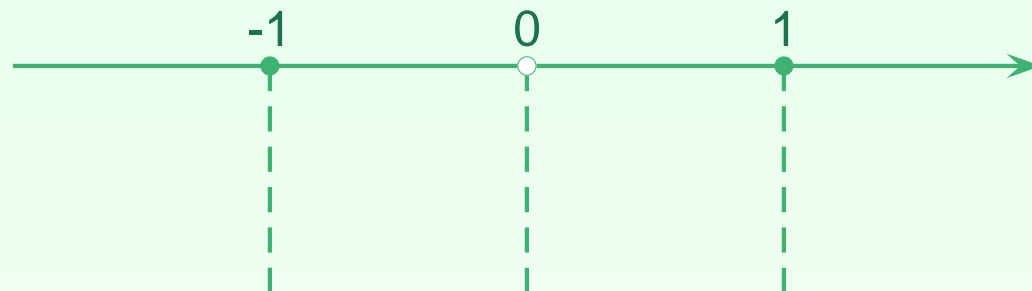
$$\underbrace{\frac{1 - x^2}{x}}_{f(x)} \geq 0$$

Osoittajan nollakohdat:

$$1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

Nimittäjän nollakohta:

$$x = 0$$



Rationaaliepäyhtälöt

- Raationaaliyhtälöt
- Raationaaliepäyhtälöt

Esimerkki. Ratkaise epäyhtälö $\frac{1}{x} \geq x$

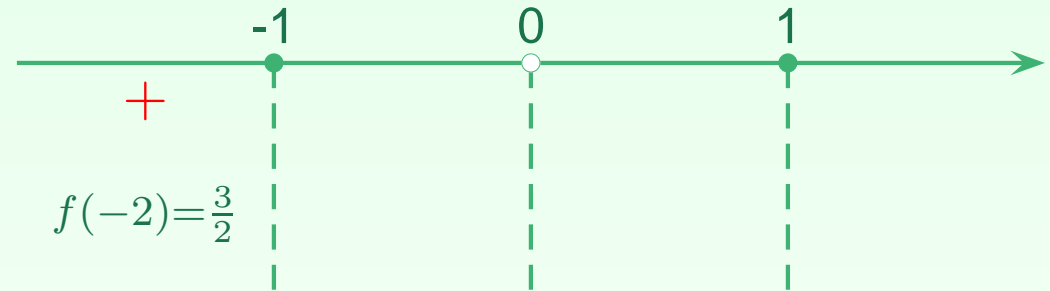
$$\begin{aligned}\frac{1}{x} - x &\geq 0 \\ \frac{1 - x^2}{x} &\geq 0 \\ \underbrace{\hspace{2cm}}_{f(x)} &\geq 0\end{aligned}$$

Osoittajan nollakohdat:

$$1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

Nimittäjän nollakohta:

$$x = 0$$



Rationaaliepäyhtälöt

- Raationaaliyhtälöt
- Raationaaliepäyhtälöt

Esimerkki. Ratkaise epäyhtälö $\frac{1}{x} \geq x$

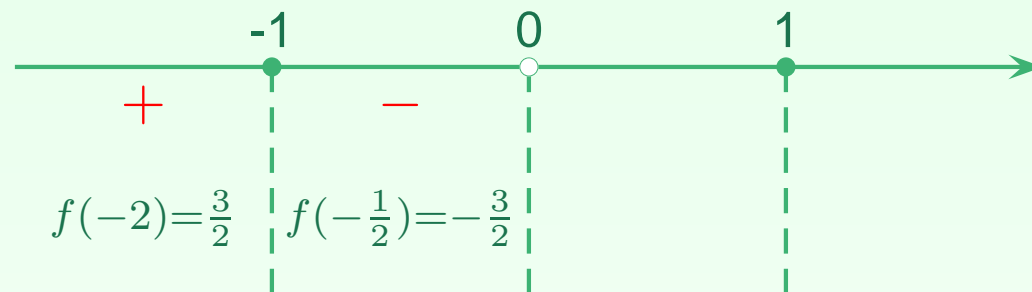
$$\begin{aligned} \frac{1}{x} - x &\geq 0 \\ \frac{1 - x^2}{x} &\geq 0 \\ \underbrace{\frac{1 - x^2}{x}}_{f(x)} &\geq 0 \end{aligned}$$

Osoittajan nollakohdat:

$$1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

Nimittäjän nollakohta:

$$x = 0$$



Rationaaliepäyhtälöt

- Raationaaliyhtälöt
- Raationaaliepäyhtälöt

Esimerkki. Ratkaise epäyhtälö $\frac{1}{x} \geq x$

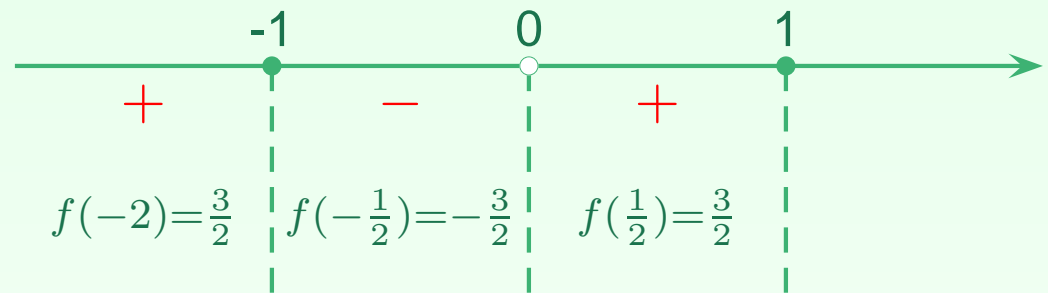
$$\begin{aligned} \frac{1}{x} - x &\geq 0 \\ \frac{1 - x^2}{x} &\geq 0 \\ \underbrace{\hspace{2cm}}_{f(x)} &\geq 0 \end{aligned}$$

Osoittajan nollakohdat:

$$1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

Nimittäjän nollakohta:

$$x = 0$$



Rationaaliepäyhtälöt

- Raationaaliyhtälöt
- Raationaaliepäyhtälöt

Esimerkki. Ratkaise epäyhtälö $\frac{1}{x} \geq x$

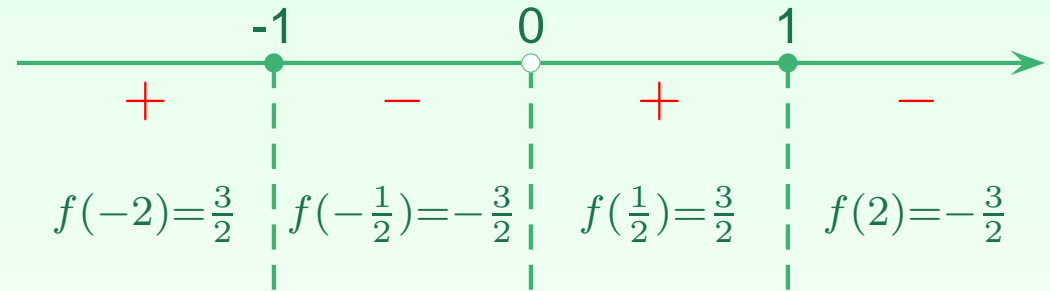
$$\begin{aligned} \frac{1}{x} - x &\geq 0 \\ \frac{1 - x^2}{x} &\geq 0 \\ \underbrace{\hspace{2cm}}_{f(x)} &\geq 0 \end{aligned}$$

Osoittajan nollakohdat:

$$1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

Nimittäjän nollakohta:

$$x = 0$$

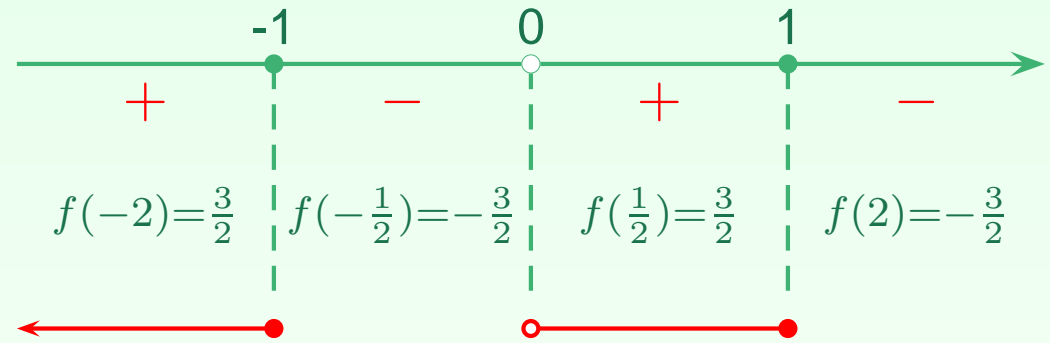


Rationaaliepäyhtälöt

- Raationaaliyhtälöt
- Raationaaliepäyhtälöt

Esimerkki. Ratkaise epäyhtälö $\frac{1}{x} \geq x$

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} - x &\geq 0 \\ \frac{1 - x^2}{x} &\geq 0 \\ \underbrace{}_x &\geq 0 \\ f(x) & \end{aligned}$$



Osoittajan nollakohdat:

$$1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

Nimittäjän nollakohta:

$$x = 0$$

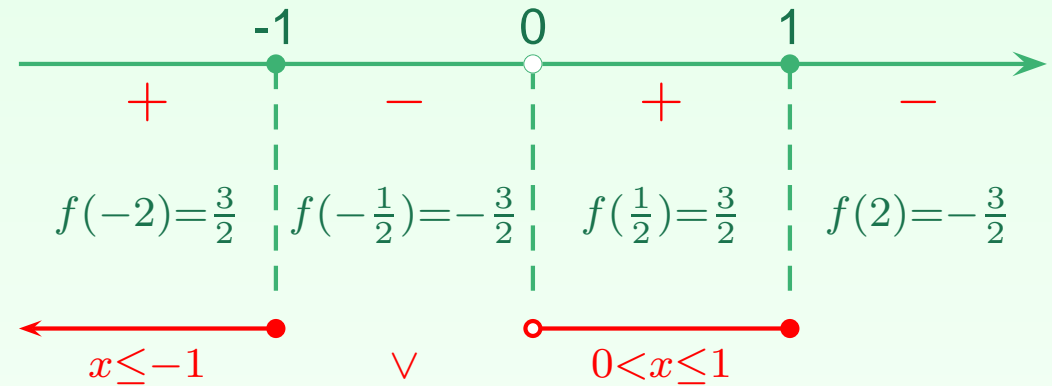
Rationaaliepäyhtälöt

- Raationaaliyhtälöt
- Raationaaliepäyhtälöt

Esimerkki. Ratkaise epäyhtälö $\frac{1}{x} \geq x$

$$\frac{1}{x} - x \geq 0$$
$$\frac{1 - x^2}{x} \geq 0$$

$f(x)$



Osoittajan nollakohdat:

$$1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

Nimittäjän nollakohta:

$$x = 0$$