

Murtopotenssifunktion ja juurifunktion derivaatta

Hannu Lehto
Lahden Lyseon lukio

Potenssifunktion derivaatta	2
Murtopotenssifunktion derivaatta	3
Juurifunktion derivaatta	5

Potenssifunktion derivaatta

$$Dx^n = nx^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}^a$$
$$Dx^{-n} = D\left(\frac{1}{x^n}\right) = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}, \quad n \in \mathbb{Z}_+, x \neq 0$$

Esimerkki. Määritä funktion $f(x) = \frac{5}{x^2}$ derivaatta.

Lahden Lyseon lukio – 2 / 5

^aJos $n = 1$ tai $n = 0$, niin on oltava $x \neq 0$

Murtopotenssifunktion derivaatta

Tarkastellaan murtopotenssifunktiota

$$f(x) = x^{\frac{m}{n}}, \quad n, m \in \mathbb{Z}, n \neq 0, x > 0$$

Korotetaan puolittain potenssiin n .

$$\begin{aligned} f(x)^n &= x^m \quad \text{derivoidaan puolittain}^a \\ n f(x)^{n-1} f'(x) &= m x^{m-1} \\ f'(x) &= \frac{m}{n} \cdot \frac{x^{m-1}}{f(x)^{n-1}} = \frac{m}{n} \cdot \frac{x^{m-1} \cdot f(x)}{f(x)^n} \\ &= \frac{m}{n} \cdot \frac{x^{m-1} \cdot x^{\frac{m}{n}}}{x^m} = \frac{m}{n} \cdot x^{-1} \cdot x^{\frac{m}{n}} \\ &= \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m}{n}-1} \end{aligned}$$

$$\text{Täten on } Dx^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1}, \quad n, m \in \mathbb{Z}, n \neq 0, x > 0$$

Lahden Lyseon lukio – 3 / 5

^aOletetaan ilman perusteluja, että f on derivoituva.

Murtopotenssifunktion derivaatta

Esimerkki. Derivoi funktio $f(x) = (x^2 + 1)^{-\frac{2}{3}}$

Lahden Lyseon lukio – 4 / 5

Juurifunktion derivaatta

Juurifunktio derivoidaan muuttamalla se ensin potenssifunktioksi:

$$\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}, \quad n, m \in \mathbb{Z}, x \geq 0$$

Esimerkki. Derivoi funktiot $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}}$ ja $g(x) = \sqrt{2x-1}$. Mitkä ovat funktioiden ja derivaattojen määrittelyehdot? Ratkaise myös yhtälö $g'(x) = 0$.

Lahden Lyseon lukio – 5 / 5