

# Neliöjuuriyhtälöt ja –epäyhtälöt

Hannu Lehto  
Lahden Lyseon lukio

Neliöjuuriyhtälöt . . . . .	2
Neliöjuuriepäyhtälöt . . . . .	3

## Neliöjuuriyhtälöt

**Lause 1.** Olkoon  $a, b \geq 0$ . Silloin on

$$a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2.$$

Mikäli  $a$  ja  $b$  ovat erimerkkiset, niin ekvivalenssi ei päde!

Ratkaistaan yhtälö  $\sqrt{x+3} = 2x$ .

### Tapa 1.

- Määrittelyehto
- Neliöönkorotusehto
- Neliöönkorotus ja yhtälön ratkaisu
- Valitaan ehdot 1 ja 2 täyttävät ratkaisut

### Tapa 2.

- Neliöönkorotus ja yhtälön ratkaisu
- Tutkitaan sijoittamalla, mitkä ratkaisuehdokkaat toteuttavat yhtälön.

2 / 7

## Neliöjuuriepäyhtälöt

**Lause 2.** Olkoon  $a, b \geq 0$ . Silloin on

$$a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2.$$

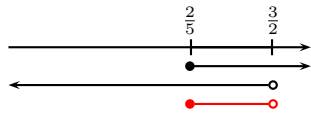
**Esimerkki 1.** Ratkaise  $\sqrt{5x-2} < \sqrt{x+4}$ .

Määrittelyehto:  $x \geq -4 \wedge x \geq \frac{2}{5} \Leftrightarrow x \geq \frac{2}{5}$

$$\sqrt{5x-2} < \sqrt{x+4} \quad |(\ )^2 \quad \text{Molemmat puolet} \geq 0$$

$$5x - 2 < x + 4$$

$$x < \frac{3}{2}$$



Vastaus:  $\frac{2}{5} \leq x < \frac{3}{2}$

3 / 7

## Neliöjuuriepäyhtälöt

**Esimerkki 2.** Ratkaise  $\sqrt{x} + 1 > 2x$ .

Määrittelyehto:  $x \geq 0$

$$\sqrt{x} > 2x - 1$$

1. Jos  $2x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$ , niin epäyhtälö on tosi ja osaratkaisuksi saadaan

$$(x < \frac{1}{2}) \wedge (x \geq 0) \Leftrightarrow \boxed{0 \leq x < \frac{1}{2}}$$

2. Jos  $2x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$ , niin voidaan korottaa neliöön.

$$\begin{aligned}\sqrt{x} > 2x - 1 & \quad |(\ )^2 \\ x > (2x - 1)^2 \\ x > 4x^2 - 4x + 1 \\ 4x^2 - 5x + 1 < 0 \\ \frac{1}{4} < x < 1\end{aligned}$$

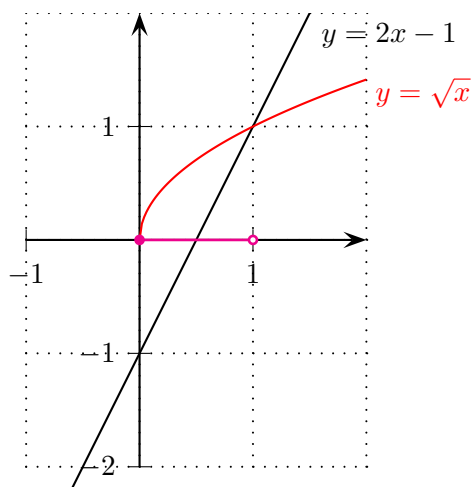
Osaratkaisuksi saadaan  $(\frac{1}{4} < x < 1) \wedge (x \geq 0) \wedge (x \geq \frac{1}{2}) \Leftrightarrow \boxed{\frac{1}{2} \leq x < 1}$ .

Yhdistämällä osaratkaisut 1 ja 2:  $0 \leq x < 1$ .

4 / 7

## Neliöjuuriepäyhtälöt

**Esimerkki 2 jatkuu.** Epäyhtälön  $\sqrt{x} > 2x - 1$  ratkaisun tarkistaminen graafisesti.



5 / 7

## Neliöjuuriepäyhtälöt

**Esimerkki 3.** Ratkaise  $\sqrt{x+2} < x$ .

Määrittelyehto:  $x+2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2$

1. Jos  $x < 0$ , niin epäyhtälö on epätosi ja osaratkaisuja ei tule.
2. Jos  $x \geq 0$ , niin voidaan korottaa neliöön.

$$\begin{aligned}\sqrt{x+2} < x & \quad |()^2 \\ x+2 & < x^2 \\ -x^2 + x + 2 & < 0 \\ x < -1 \vee x > 2 & \end{aligned}$$

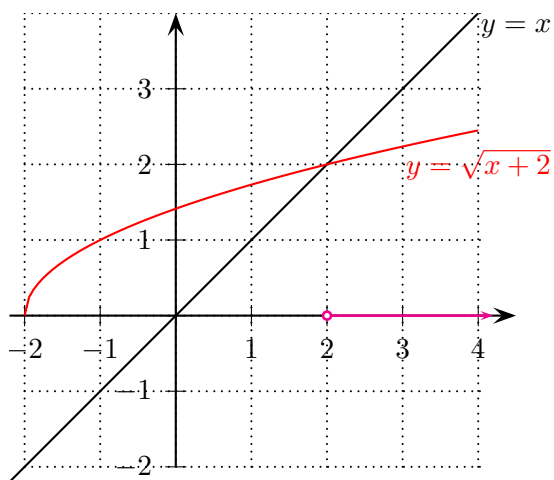
Osaratkaisuksi saadaan  $(x < -1 \vee x > 2) \wedge (x \geq -2) \wedge (x \geq 0) \Leftrightarrow x > 2$ .

Yhdistämällä osaratkaisut 1 ja 2:  $x > 2$ .

6 / 7

## Neliöjuuriepäyhtälöt

**Esimerkki 3 jatkuu.** Epäyhtälön  $\sqrt{x+2} < x$  ratkaisun tarkistaminen graafisesti.



7 / 7