Käänteisfunktio

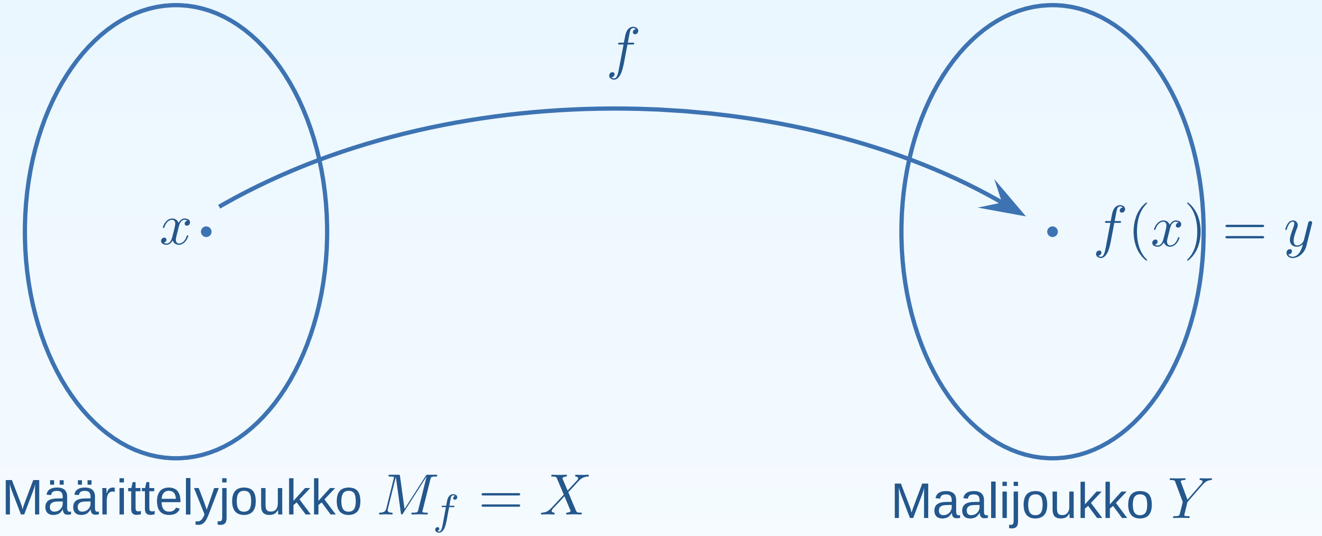
Hannu Lehto
Lahden Lyseon lukio

Funktio

Määritelmä 1. Funktio $f : X \to Y$ liittää jokaiseen määrittelyjoukon X alkioon x tarkalleen yhden maalijoukon Y alkion $y = f(x)$.

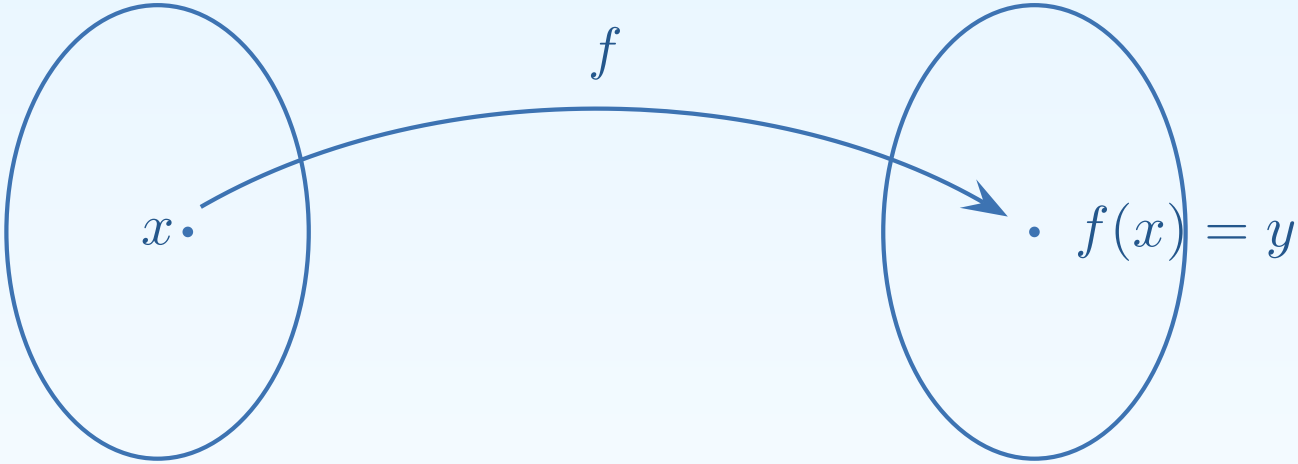
Funktio

Määritelmä 1. Funktio $f : X \to Y$ liittää jokaiseen määrittelyjoukon X alkioon x tarkalleen yhden maalijoukon Y alkion $y = f(x)$.



Funktio

Määritelmä 1. Funktio $f : X \to Y$ liittää jokaiseen määrittelyjoukon X alkioon x tarkalleen yhden maalijoukon Y alkion $y = f(x)$.



Määrittelyjoukko $M_f = X$

Maalijoukko Y

Funktion f arvojoukko on $A_f = \{f(x) | x \in X\}$. Arvojoukko on maalijoukon osajoukko.

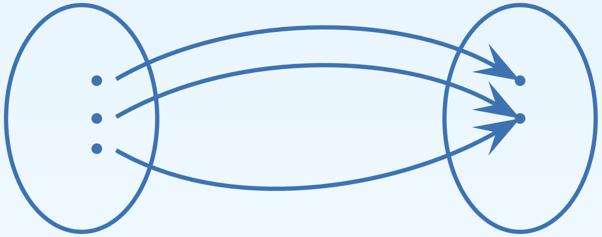
Funktio

Esimerkki 1. Onko kyseessä funktio?

- Funktio
- Käänteisfunktio
- Käänteisfunktion olemassaolo
- Käänteisfunktion ominaisuuksia
- Käänteisfunktion tutkiminen
- Käänteisfunktion derivaatta
- Käänteisfunktion derivaatta

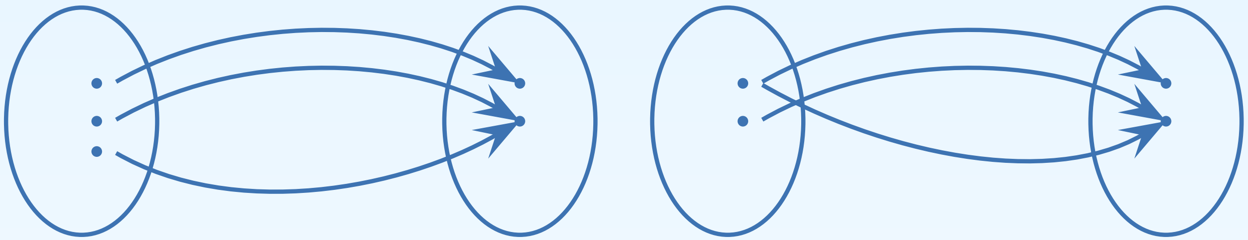
Funktio

Esimerkki 1. Onko kyseessä funktio?



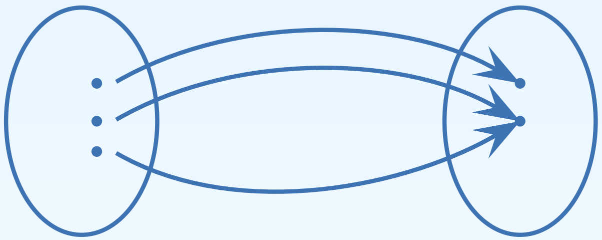
Funktio

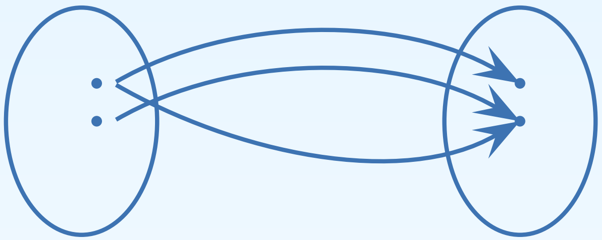
Esimerkki 1. Onko kyseessä funktio?

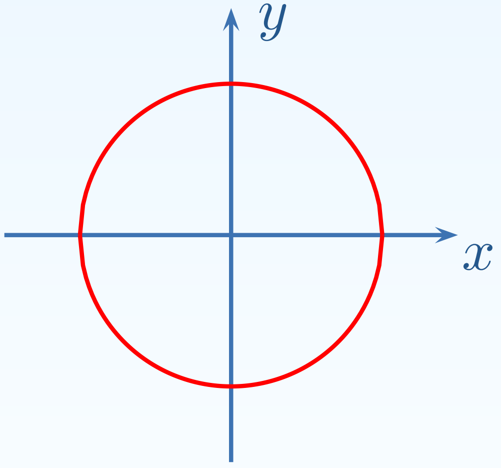


Funktio

Esimerkki 1. Onko kyseessä funktio?

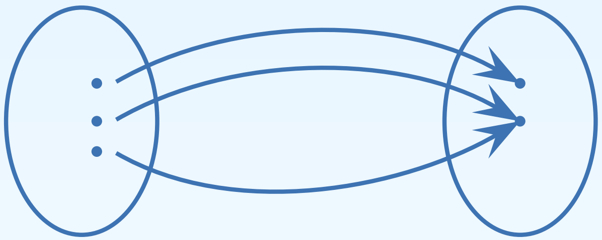


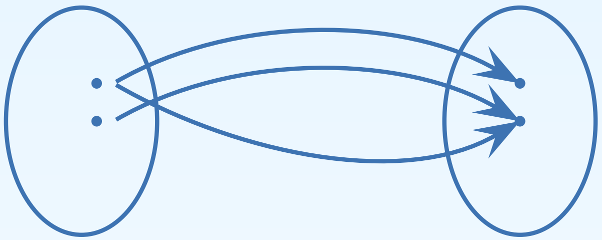


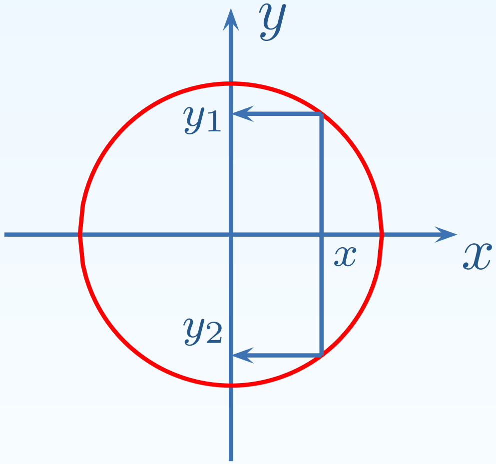


Funktio

Esimerkki 1. Onko kyseessä funktio?

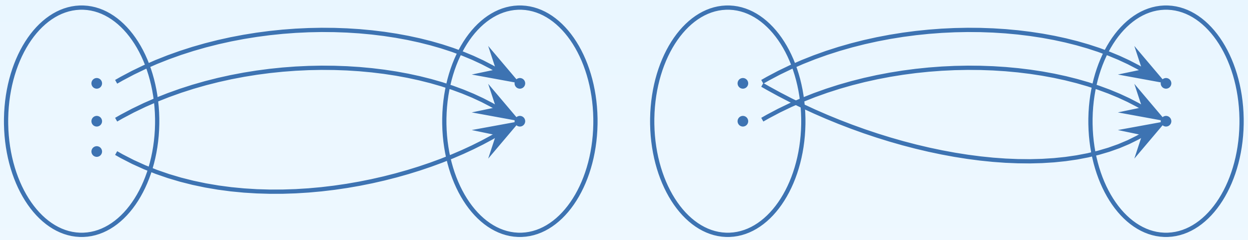


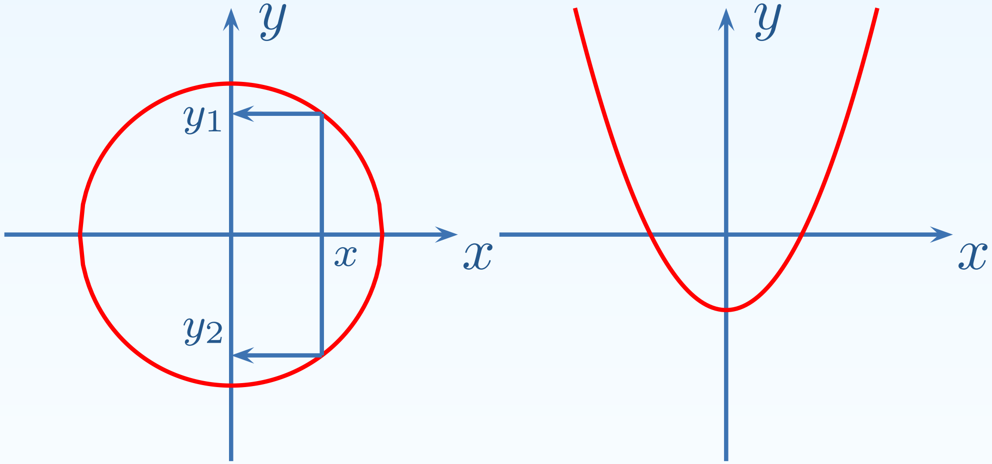




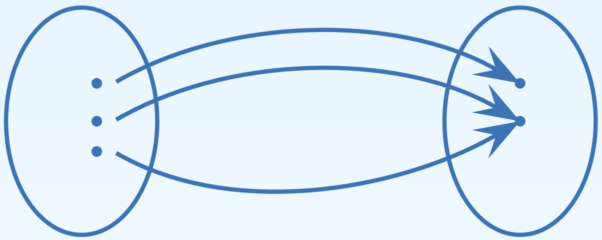
Funktio

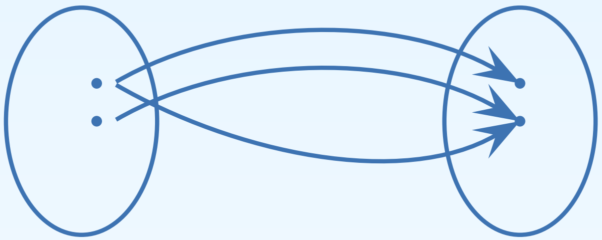
Esimerkki 1. Onko kyseessä funktio?

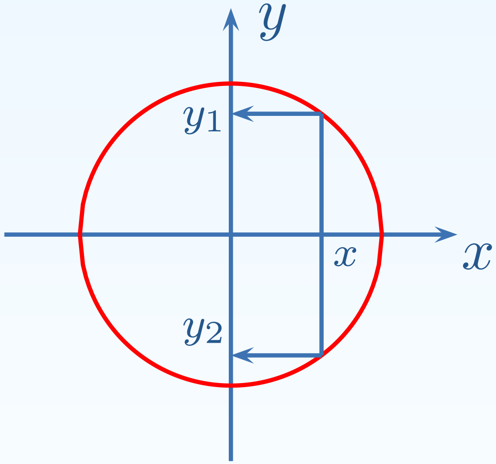


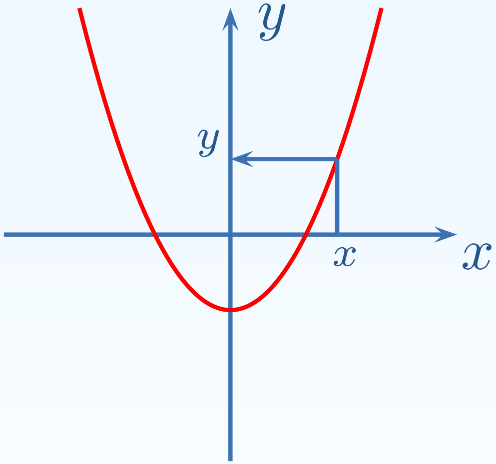


Esimerkki 1. Onko kyseessä funktio?

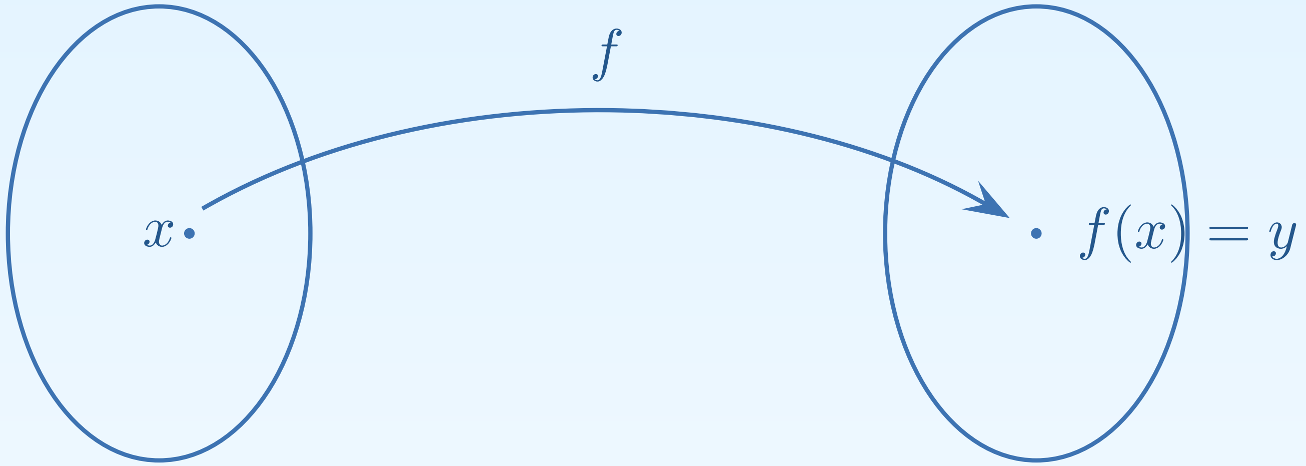






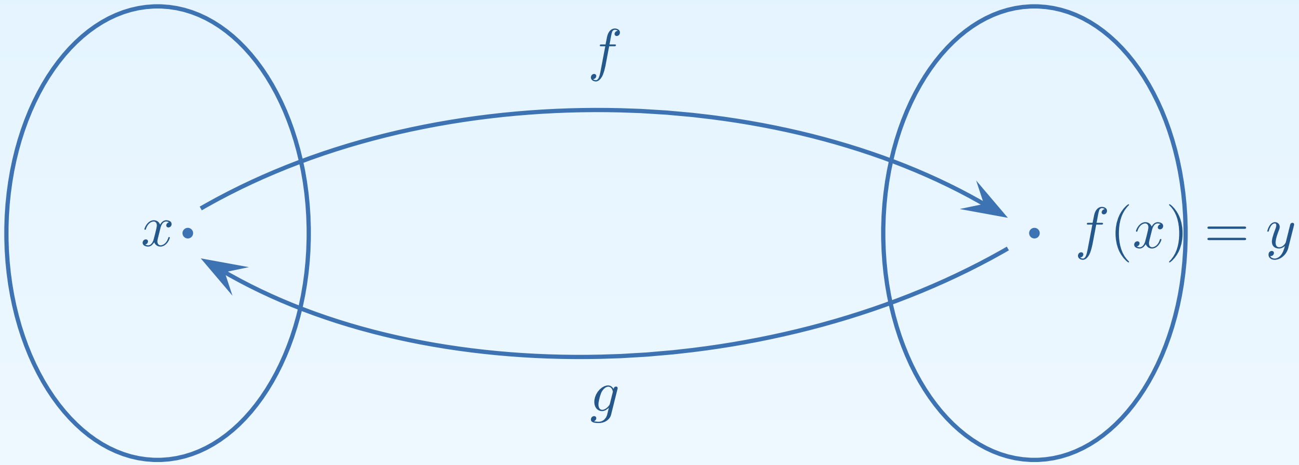


Käänteisfunktio



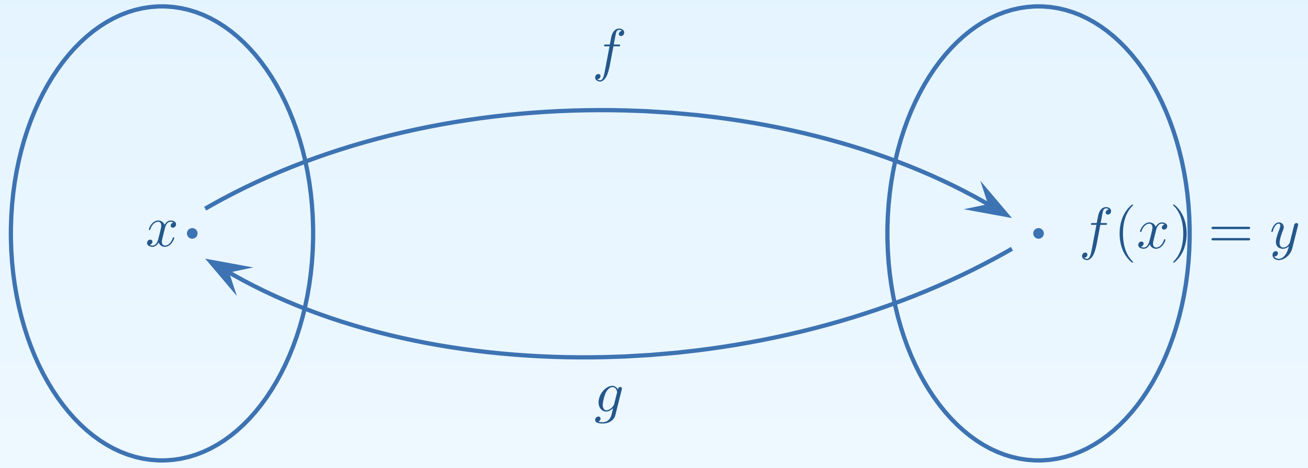
Määrittelyjoukko $M_f = X$ Arvojoukko $A_f = Y$

Käänteisfunktio



Määrittelyjoukko $M_f = X$ Arvojoukko $A_f = Y$

Käänteisfunktio



Määrittelyjoukko $M_f = X$ Arvojoukko $A_f = Y$

Määritelmä 2. Funktiot $f : X \to Y$ ja $g : Y \to X$ ovat toistensa *käänteisfunktioita*, jos kaikilla alkioilla $x \in X$ ja $y \in Y$ on

$$g(f(x)) = x \quad \text{ja} \quad f(g(y)) = y$$

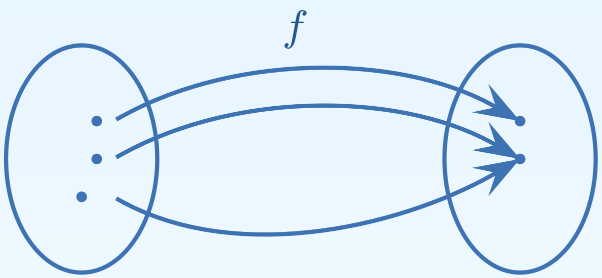
Funktion f käänteisfunktiota merkitään f^{-1}.

Käänteisfunktion olemassaolo

Onko seuraavilla funktioilla käänteisfunktio?

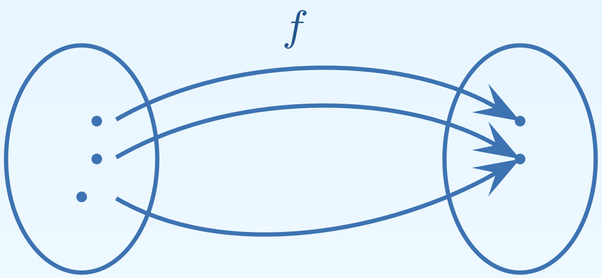
Käänteisfunktion olemassaolo

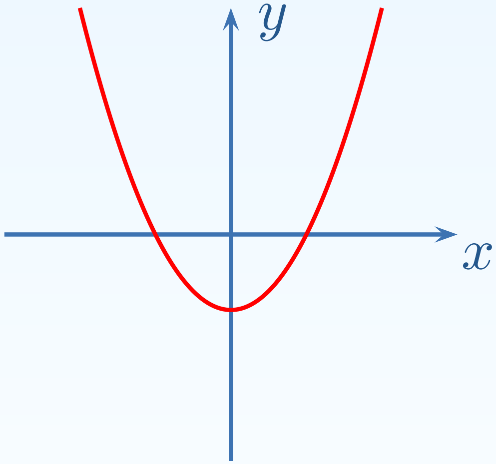
Onko seuraavilla funktioilla käänteisfunktio?



Käänteisfunktion olemassaolo

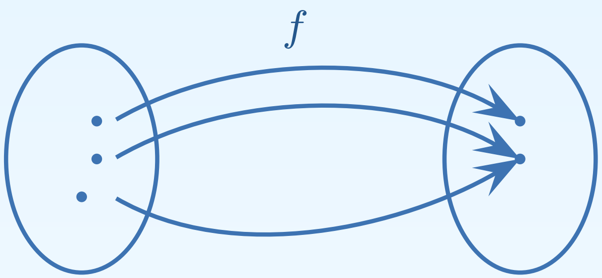
Onko seuraavilla funktioilla käänteisfunktio?

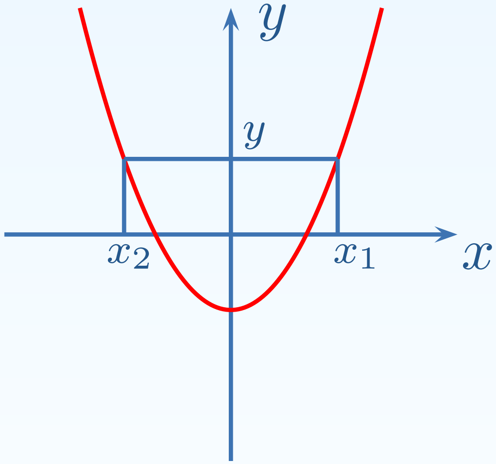




Käänteisfunktion olemassaolo

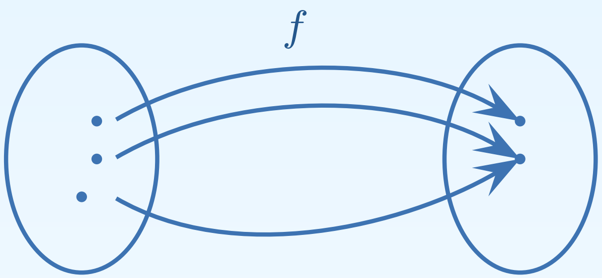
Onko seuraavilla funktioilla käänteisfunktio?

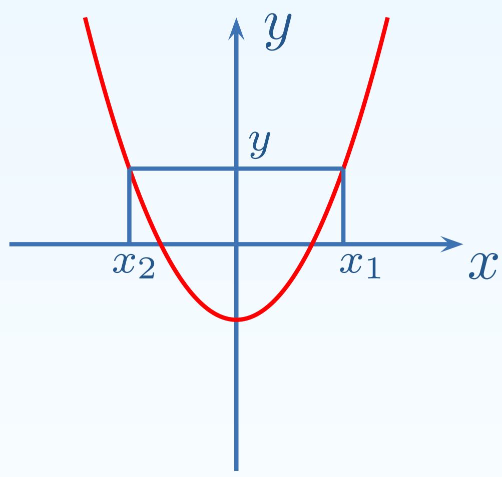


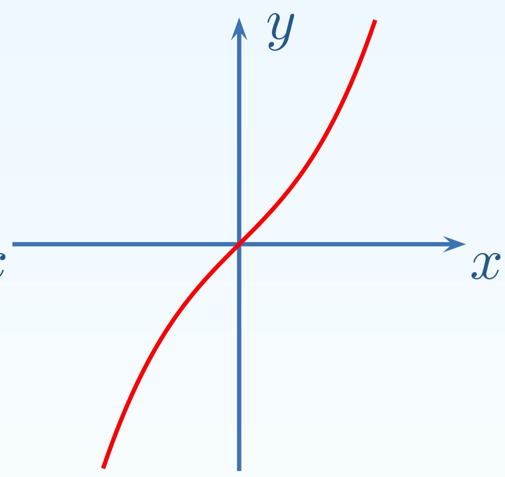


Käänteisfunktion olemassaolo

Onko seuraavilla funktioilla käänteisfunktio?

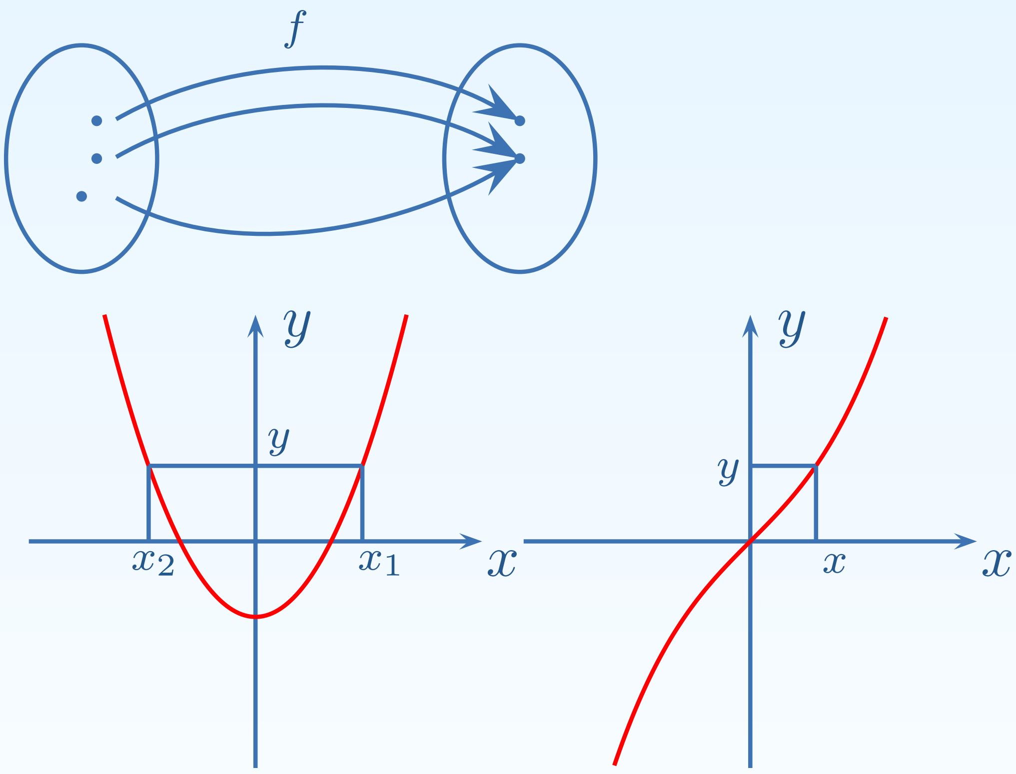






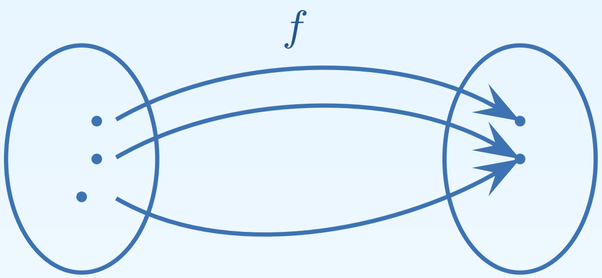
Käänteisfunktion olemassaolo

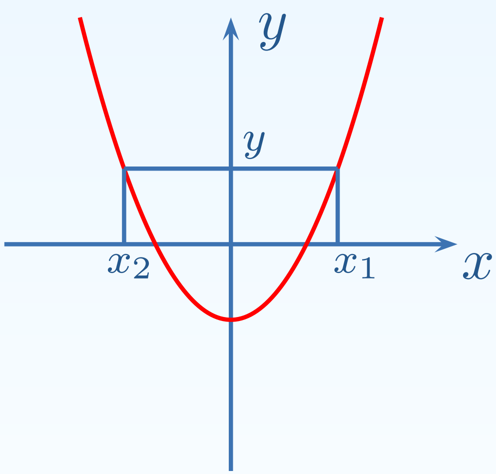
Onko seuraavilla funktioilla käänteisfunktio?

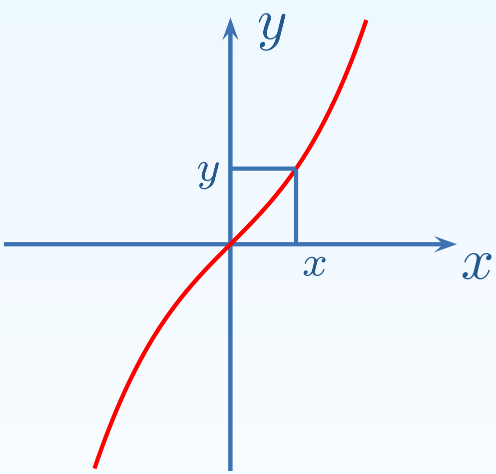


Käänteisfunktion olemassaolo

Onko seuraavilla funktioilla käänteisfunktio?







Funktion f käänteisfunktion olemassaolon edellytys on, että funktio f saa jokaisen arvonsa täsmälleen yhdessä kohtaa.

Käänteisfunktion olemassaolo

Lause 1. *Jokaisella aidosti monotonisella funktiolla on käänteisfunktio.*

Käänteisfunktion olemassaolo

Lause 1. *Jokaisella aidosti monotonisella funktiolla on käänteisfunktio.*

Esimerkki. Onko funktiolla $y = f(x) = x^3 + x^2 + x$ käänteisfunktio? Myönteisessä tapauksessa laske $f^{-1}(3)$.

Kääntelsfunktion ominaisuuksia

1. $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$

Käänteisfunktion ominaisuuksia

1. $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$
2. $M_{f^{-1}} = A_f$

Käänteisfunktion ominaisuuksia

1. $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$

2. $M_{f^{-1}} = A_f$

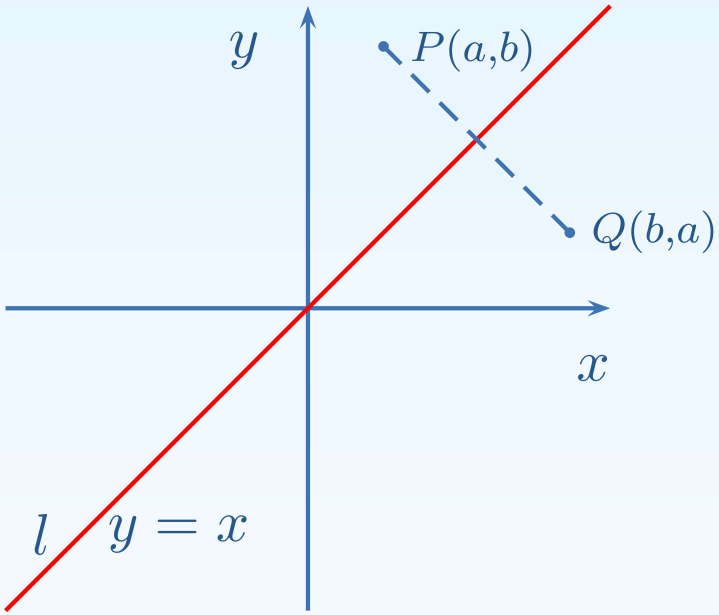
3. $A_{f^{-1}} = M_f$

Käänteisfunktion ominaisuuksia

1. $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$
2. $M_{f^{-1}} = A_f$
3. $A_{f^{-1}} = M_f$

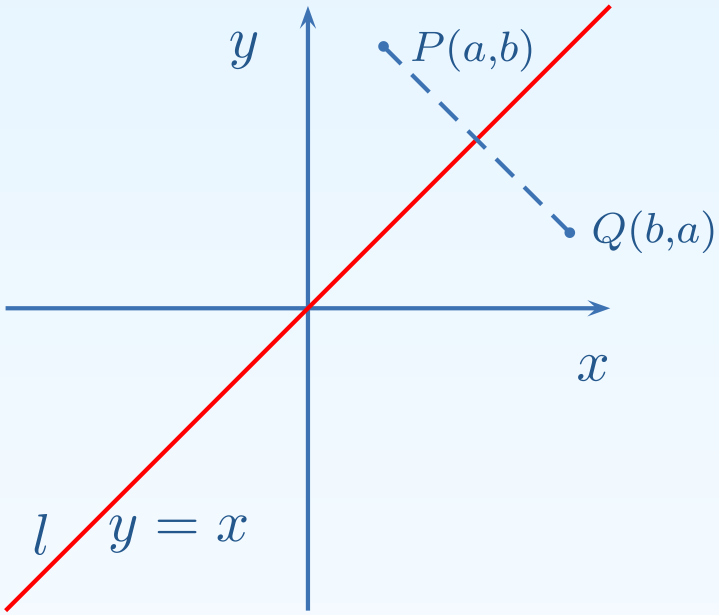
Käänteisfunktion ominaisuuksia

4. Tarkastellaan pisteitä $P(a, b)$ ja $Q(b, a)$.



Käänteisfunktion ominaisuuksia

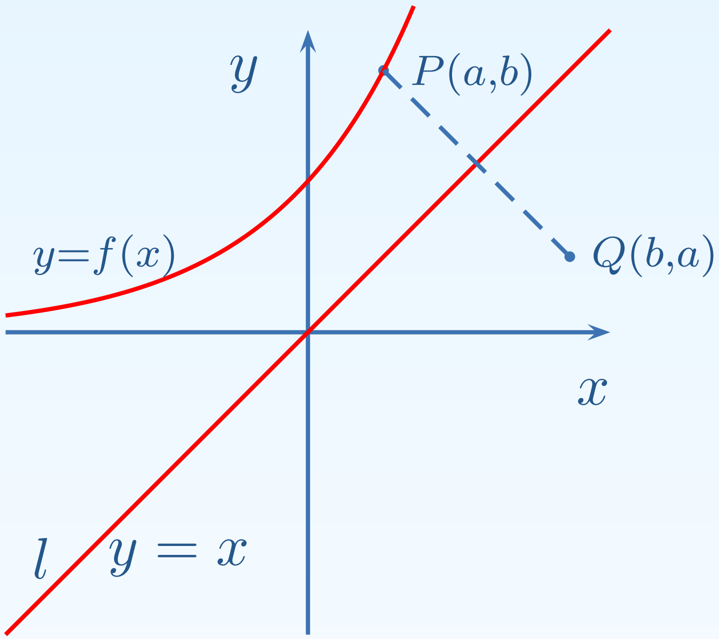
4. Tarkastellaan pisteitä $P(a, b)$ ja $Q(b, a)$.



P ja Q ovat toistensa peilikuvia suoran $y = x$ eli l suhteen, koska suoran PQ kulmakerroin on $\dfrac{a-b}{b-a} = -1$, joten $l \perp PQ$, ja janan PQ keskipiste $\left(\dfrac{a+b}{2}, \dfrac{b+a}{2}\right)$ on suoralla $y = x$.

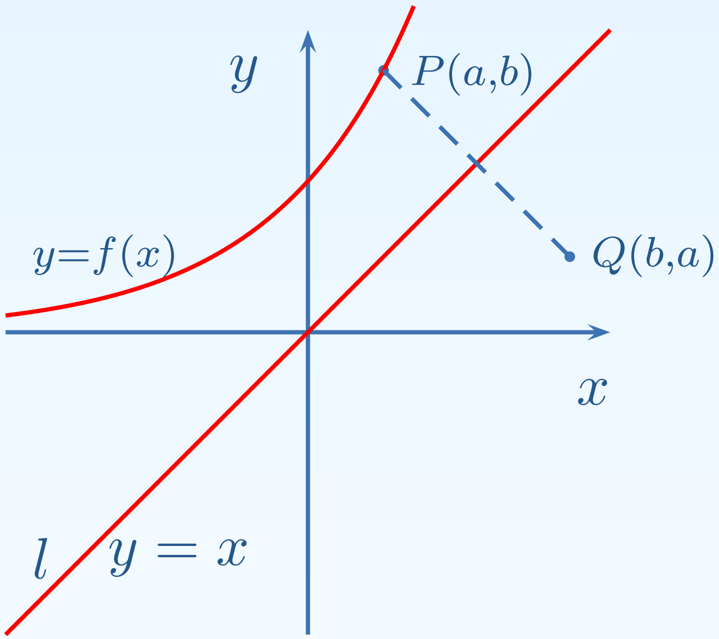
Käänteisfunktion ominaisuuksia

4. Olkoon (a, b) funktion f kuvaajan piste eli $b = f(a)$.



Käänteisfunktion ominaisuuksia

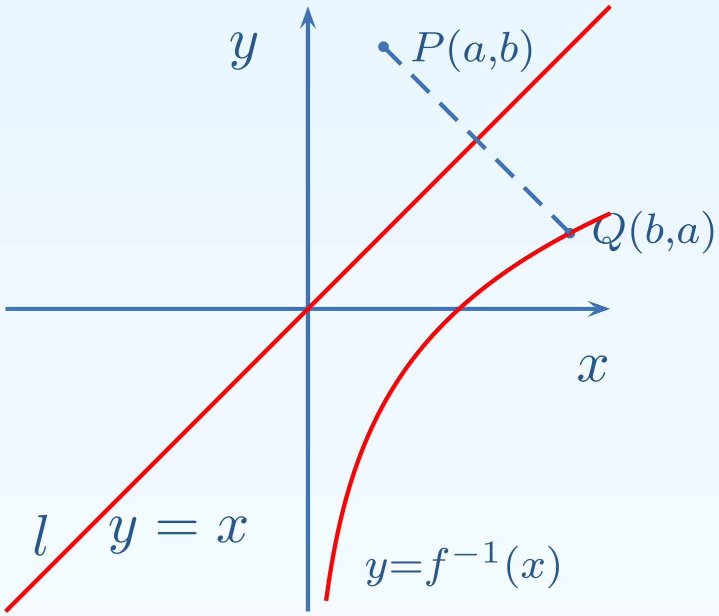
4. Olkoon (a, b) funktion f kuvaajan piste eli $b = f(a)$.



Koska $b = f(a) \Leftrightarrow a = f^{-1}(b)$,
niin peilikuvapiste (b, a) on käänteisfunktion f^{-1} kuvaajan piste.

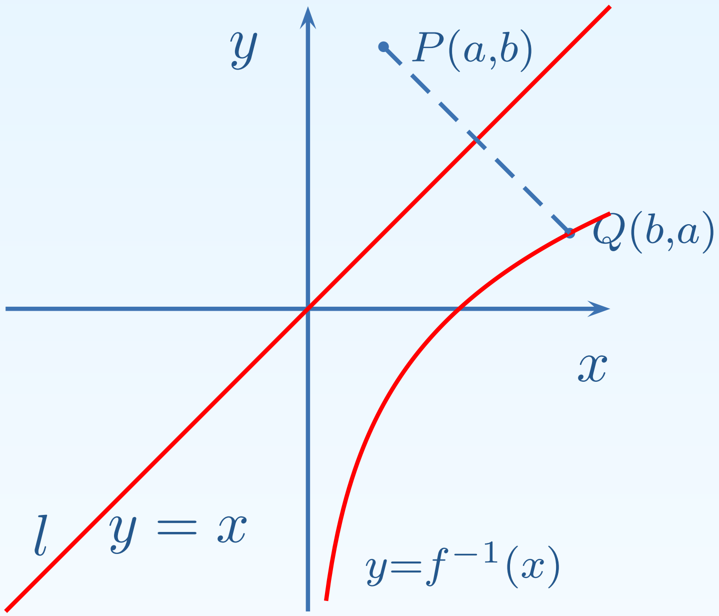
Käänteisfunktion ominaisuuksia

4. Olkoon (b, a) funktion f^{-1} kuvaajan piste eli $a = f^{-1}(b)$.



Käänteisfunktion ominaisuuksia

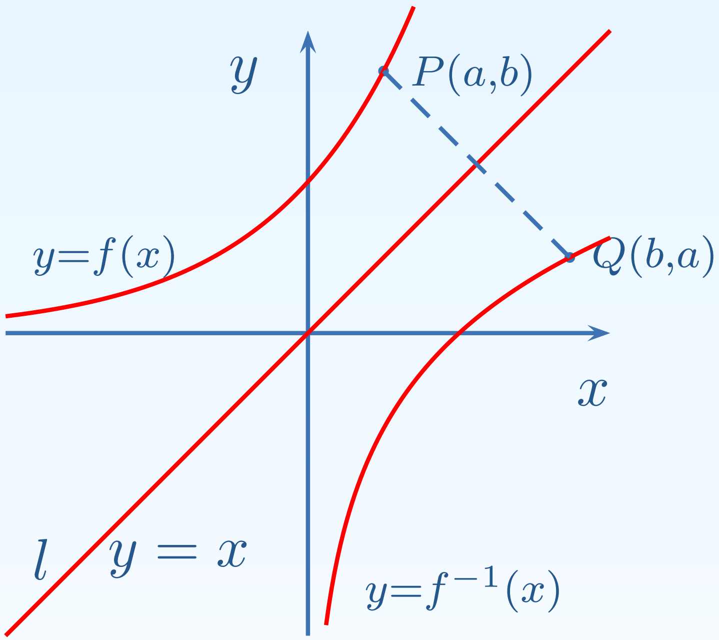
4. Olkoon (b, a) funktion f^{-1} kuvaajan piste eli $a = f^{-1}(b)$.



Koska $b = f(a) \Leftrightarrow a = f^{-1}(b)$,
niin peilikuvapiste (a, b) on funktion f kuvaajan piste.

Käänteisfunktion ominaisuuksia

4. Funktion ja käänteisfunktion kuvaajat ovat toistensa peilikuvia suoran $y = x$ suhteen



Käänteisfunktion tutkiminen

Esimerkki. Tutki funktion $y = x^2 - 2, x \geq 0$ käänteisfunktiota.

Käänteisfunktion tutkiminen

Esimerkki. Tutki funktion $y = x^2 - 2, x \geq 0$ käänteisfunktiota.

- Olemassaolo

Käänteisfunktion tutkiminen

Esimerkki. Tutki funktion $y = x^2 - 2, x \geq 0$ käänteisfunktiota.

- Olemassaolo
- Määrittely- ja arvojoukot

Käänteisfunktion tutkiminen

Esimerkki. Tutki funktion $y = x^2 - 2, x \geq 0$ käänteisfunktiota.

- Olemassaolo
- Määrittely- ja arvojoukot
- Käänteisfunktion lauseke

Käänteisfunktion tutkiminen

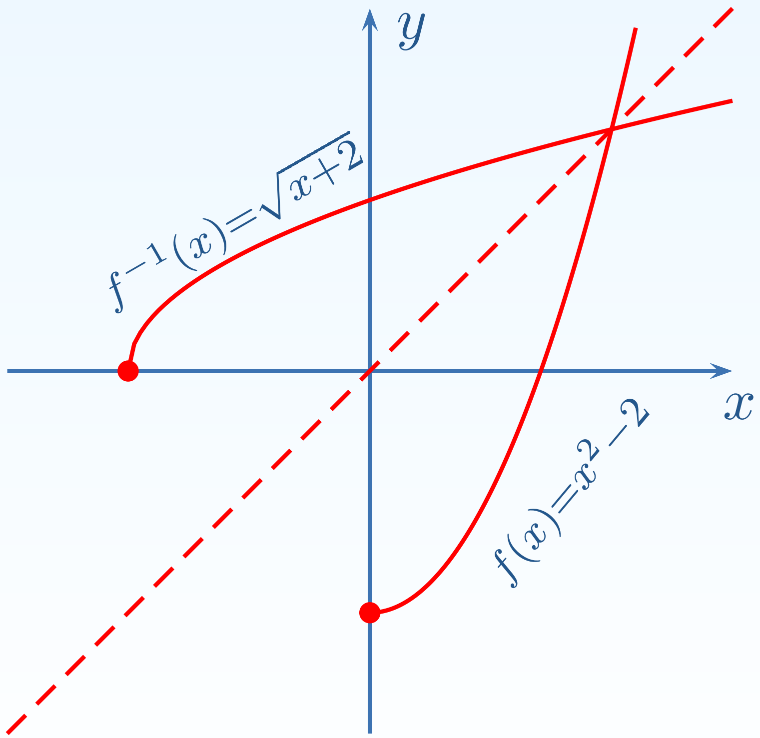
Esimerkki. Tutki funktion $y = x^2 - 2, x \geq 0$ käänteisfunktiota.

- Olemassaolo
- Määrittely- ja arvojoukot
- Käänteisfunktion lauseke
- Kuvaajat

Käänteisfunktion tutkiminen

Esimerkki. Tutki funktion $y = x^2 - 2, x \geq 0$ käänteisfunktiota.

- Olemassaolo
- Määrittely- ja arvojoukot
- Käänteisfunktion lauseke
- Kuvaajat



Käänteisfunktion derivaatta

Lause 2. *Olkoon funktiolla f on käänteisfunktio f^{-1} ja olkoon f derivoituva. Jos $y = f(x)$ ja $f'(x) \neq 0$, niin käänteisfunktio f^{-1} on derivoituva kohdassa y ja*

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Käänteisfunktion derivaatta

Lause 2. *Olkoon funktiolla f on käänteisfunktio f^{-1} ja olkoon f derivoituva. Jos $y = f(x)$ ja $f'(x) \neq 0$, niin käänteisfunktio f^{-1} on derivoituva kohdassa y ja*

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Kaavan johto. Olkoon f ja f^{-1} derivoituvia. [1]

$$f^{-1}(f(x)) \quad = \quad x$$

Käänteisfunktion derivaatta

Lause 2. *Olkoon funktiolla f on käänteisfunktio f^{-1} ja olkoon f derivoituva. Jos $y = f(x)$ ja $f'(x) \neq 0$, niin käänteisfunktio f^{-1} on derivoituva kohdassa y ja*

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Kaavan johto. Olkoon f ja f^{-1} derivoituvia. [1]

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(x)) &= x \\ D\left(f^{-1}(f(x))\right) &= Dx \end{aligned}$$

Käänteisfunktion derivaatta

Lause 2. *Olkoon funktiolla f on käänteisfunktio f^{-1} ja olkoon f derivoituva. Jos $y = f(x)$ ja $f'(x) \neq 0$, niin käänteisfunktio f^{-1} on derivoituva kohdassa y ja*

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Kaavan johto. Olkoon f ja f^{-1} derivoituvia. [1]

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(x)) &= x \\ D\left(f^{-1}(f(x))\right) &= Dx \\ \left(f^{-1}\right)'(f(x))\, f'(x) &= 1 \end{aligned}$$

Käänteisfunktion derivaatta

Lause 2. *Olkoon funktiolla f on käänteisfunktio f^{-1} ja olkoon f derivoituva. Jos $y = f(x)$ ja $f'(x) \neq 0$, niin käänteisfunktio f^{-1} on derivoituva kohdassa y ja*

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Kaavan johto. Olkoon f ja f^{-1} derivoituvia. [1]

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(x)) &= x \\ D\left(f^{-1}(f(x))\right) &= Dx \\ \left(f^{-1}\right)'(f(x))\, f'(x) &= 1 \\ \left(f^{-1}\right)'(f(x)) &= \frac{1}{f'(x)} \end{aligned}$$

- Funktio
- Käänteisfunktio
- Käänteisfunktion olemassaolo
- Käänteisfunktion ominaisuuksia
- Käänteisfunktion tutkiminen
- Käänteisfunktion derivaatta
- Käänteisfunktion derivaatta

Käänteisfunktion derivaatta

Lause 2. *Olkoon funktiolla f on käänteisfunktio f^{-1} ja olkoon f derivoituva. Jos $y = f(x)$ ja $f'(x) \neq 0$, niin käänteisfunktio f^{-1} on derivoituva kohdassa y ja*

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Kaavan johto. Olkoon f ja f^{-1} derivoituvia. [1]

$$\begin{aligned}
f^{-1}(f(x)) &= x \\
D\left(f^{-1}(f(x))\right) &= Dx \\
\left(f^{-1}\right)'(f(x))\, f'(x) &= 1 \\
\left(f^{-1}\right)'(f(x)) &= \frac{1}{f'(x)} \\
\left(f^{-1}\right)'(y) &= \frac{1}{f'(x)}
\end{aligned}$$

[1] Tämä ei ole lauseen täydellinen todistus, koska derivoituvuutta ei todisteta.

Käänteisfunktion derivaatta

Esimerkki. Funktiolla $y = f(x) = x^3 + x^2 + x$ on käänteisfunktio. Määritä $\left(f^{-1}\right)'(3)$. (Vastaus: $\frac{1}{6}$)